ISSN 2079–1836
2012, вип. 20

УДК 681.5.001.63: 519.711

В. В. Лаврик

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МКЭ И МСКЭ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Производится анализ разностных схем численных методов конечных элементов, в основе которых положен классический метод КЭ и метод моментных схем. Приведены примеры расчётов объектов рассмотренными методами и их сравнительные характеристики.

Ключевые слова: *модель, аппроксимация, эластомер, напряжение, деформация, схема.*

Введение. Основным этапом расчета конструкций методом конечных элементов (МКЭ) в перемещениях является вывод матриц жесткости (МЖ). Свойства МЖ во многом определяют существование, устойчивость и сходимость решений МКЭ, а также эффективность метода в целом.

Многолетний опыт решения различных задач механики деформируемых твердых тел на основе МКЭ показал, что описанный в [1, 2] вариант МКЭ нередко обладает сравнительно медленной сходимостью, в особенности для оболочек и массивных тел сложных криволинейных форм. Этот факт был отмечен многими авторами [3, 4]. Они установили, что замедленная сходимость характерна для тех случаев, когда принятый вариант аппроксимации перемещений не позволяет точно описать смещения КЭ как жесткого целого.

Изложение основного материала исследования. Характерной особенностью указанных выше методов является то, что все средства сосредоточиваются на точном или приближенном учете в матрицах жесткости свойств КЭ при смещениях его как жесткого целого, оставляя без внимания вопрос о влиянии на точность решений жестких смещений элементарных объемов конечного элемента при его деформации. В то же время это явление может быть существенным при различных аппроксимации перемещений. Поясним это на примере кубического КЭ в задаче о деформации при полилинейном законе аппроксимации для перемещений:

$$u_i = \omega_i^{(0)} + \omega_i^{(1)} x + \omega_i^{(2)} y + \omega_i^{(3)} z + \omega_i^{(4)} xy + \omega_i^{(5)} xz + \omega_i^{(6)} yz + \omega_i^{(7)} xyz \ ,$$

для которого точно удовлетворяются необходимые условия при смещениях как жёсткого целого. Деформации КЭ согласно формулам [3, 4] равны:

$$\varepsilon_{11} = \omega_1^{(1)} + \omega_1^{(4)} y + \omega_1^{(5)} z + \omega_1^{(7)} yz \ ;$$
$$\varepsilon_{22} = \omega_2^{(2)} + \omega_2^{(4)} x + \omega_2^{(6)} z + \omega_2^{(7)} xz \ ;$$
$$\varepsilon_{33} = \omega_3^{(3)} + \omega_3^{(5)} x + \omega_3^{(6)} y + \omega_3^{(7)} xy \ ;$$

© В. В. Лаврик, 2012

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\omega_1^{(2)}+\omega_2^{(1)}+\omega_1^{(4)}x+\omega_2^{(4)}y+\left(\omega_1^{(6)}+\omega_2^{(5)}+\omega_1^{(7)}x+\omega_2^{(7)}y\right)z\right);$$

$$\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\omega_3^{(1)}+\omega_1^{(3)}+\omega_1^{(5)}x+\left(\omega_3^{(4)}+\omega_1^{(6)}+\omega_1^{(7)}x+\omega_3^{(7)}z\right)y+\omega_3^{(5)}z\right);$$

$$\varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left(\omega_3^{(2)}+\omega_2^{(3)}+\left(\omega_3^{(4)}+\omega_2^{(5)}+\omega_2^{(7)}y+\omega_3^{(7)}z\right)x+\omega_2^{(6)}y+\omega_3^{(6)}z\right). \qquad (1)$$

Пусть действительные перемещения соответствуют более сложному закону

$$u^*_i=\omega_i^{(0)}+\omega_i^{(1)}x+\omega_i^{(2)}y+\omega_i^{(3)}z+\omega_i^{(4)}xy+\omega_i^{(5)}xz+\omega_i^{(6)}yz+\omega_i^{(7)}xyz+$$
$$+\omega_i^{(8)}x^2+\omega_i^{(8)}y^2+\omega_i^{(8)}z^2.$$

Тогда значения новых деформаций можно записать следующим способом:

$$\varepsilon^*_{11}=\omega_1^{(1)}+\omega_1^{(4)}y+\omega_1^{(5)}z+\omega_1^{(7)}yz+2\omega_1^{(8)}x;$$

$$\varepsilon^*_{22}=\omega_2^{(2)}+\omega_2^{(4)}x+\omega_2^{(6)}z+\omega_2^{(7)}xz+2\omega_2^{(9)}y;$$

$$\varepsilon^*_{33}=\omega_3^{(3)}+\omega_3^{(5)}x+\omega_3^{(6)}y+\omega_3^{(7)}xy+2\omega_3^{(10)}z;$$

$$\varepsilon^*_{12}=\frac{1}{2}\left(\omega_1^{(2)}+\omega_2^{(1)}+\left(\omega_1^{(4)}+2\omega_2^{(8)}\right)x+\left(\omega_2^{(4)}+2\omega_1^{(9)}\right)y+\right.$$
$$\left.+\left(\omega_1^{(6)}+\omega_2^{(5)}+\omega_1^{(7)}x+\omega_2^{(7)}y\right)z\right);$$

$$\varepsilon^*_{13}=\frac{1}{2}\left(\omega_3^{(1)}+\omega_1^{(3)}+\left(\omega_1^{(5)}+2\omega_3^{(8)}\right)x+\left(\omega_3^{(4)}+\omega_1^{(6)}+\omega_1^{(7)}x+\omega_3^{(7)}z\right)y+\right.$$
$$\left.+\left(\omega_3^{(5)}+2\omega_3^{(10)}\right)z\right);$$

$$\varepsilon^*_{23}=\frac{1}{2}\left(\omega_3^{(2)}+\omega_2^{(3)}+\left(\omega_3^{(4)}+\omega_2^{(5)}+\omega_2^{(7)}y+\omega_3^{(7)}z\right)x+\right.$$
$$\left.+\left(\omega_2^{(6)}+2\omega_3^{(5)}\right)y+\left(\omega_3^{(6)}+2\omega_2^{(10)}\right)z\right). \qquad (2)$$

Таким образом, видно, что члены разложения деформаций (1) не совпадающие с (2), содержат слагаемые, пропорциональные производным от вектора жестких вращений элементарных объемов. При расчете конструкций, части которых претерпевают по сравнению с величинами деформаций значительные жесткие повороты, погрешности вычисления деформаций по формулам (1) и (2) резко возрастают и полученные по МКЭ решения имеют значительно меньшую точность, чем можно было ожидать. Это явление было обнаружено многими авторами, в особенности при решении задач теории оболочек и пластин на базе трехмерных изопараметрических элементов, однако оно не связывалось со свойствами жестких смещений, и применяемые способы уточнения решений подбирались опытным путем без какого-либо обоснования их правомерности.

Исследуем численно сходимость решений при использовании конечных элементов треугольной формы на нескольких контрольных задачах с использованием как стандартного КЭ так и метода моментных схем. Рассмотрим ряд таких задач [3, 4]:

1. Консоль, нагруженная сосредоточенной силой на конце (рис. 1), причём длина балки $l = 8$ см, ширина $b = 1$ см, высота $h = 1$ см. Сила, приложенная на конце балки, равна $F = 0,0008$ МПа, модуль упругости Юнга $E = 2$ МПа. Точность решений оценивалась по величине максимального прогиба на конце балки и исходя из аналитических расчётов составляет $w = 0,8192$ м. Результаты исследования приведены в табл. 1

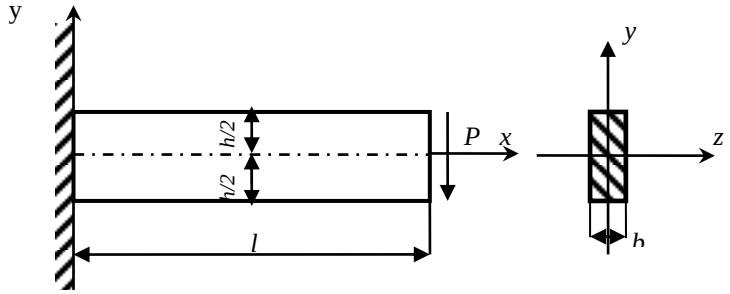


Рис. 1 – **Расчётная схема изгиба консольной балки силой, приложенной на конце**

Таблица 1– **Результаты расчета консольной балки**

Сетка разбиения	Линейный треугольный конечный элемент ω, см		Квадратичный треугольный конечный элемент ω, см	
	МКЭ	МСКЭ	МКЭ	МСКЭ
$5 \times 5 \times 3$	0,204	0,416	0,501	0,568
$5 \times 7 \times 3$	0,312	0,560	0,629	0,665
$5 \times 9 \times 3$	0,393	0,641	0,689	0,717
$5 \times 11 \times 3$	0,451	0,689	0,722	0,746
$7 \times 13 \times 3$	0,493	0,718	0,742	0,765
$7 \times 21 \times 3$	0,581	0,768	0,776	0,796

Сопоставление МКЭ и МСКЭ подтверждает преимущества предлагаемой схемы. Так, при линейной аппроксимации перемещений моментная схема по скорости сходимости не уступает МКЭ с квадратичным законом распределения перемещений. А при сравнении квадратичных КЭ видно, что расчёты на основе моментной схемы дают более наилучший результат.

В результате анализа соотношений МСКЭ было установлено, что преимущества схемы обусловлены точным удовлетворением однородных уравнений равновесия во всех внутренних точках прямоугольных КЭ.

Соответствующий вариант МКЭ при изгибе конечных элементов за счет точного соблюдения условий совместности приводит к значительному нарушению уравнений равновесия внутри КЭ, в особенности в угловых зонах КЭ (эффект «ложного сдвига»), что является причиной пониженной сходимости [3].

2. Круглая плита (рис. 2),защемлённая по контуру, радиусом $R = 0,3$ м и толщиной $t = 0,01$ м, под действием поверхностной нагрузки $q = 0,0002$. Модуль упругости материала $E = 2$ МПа.

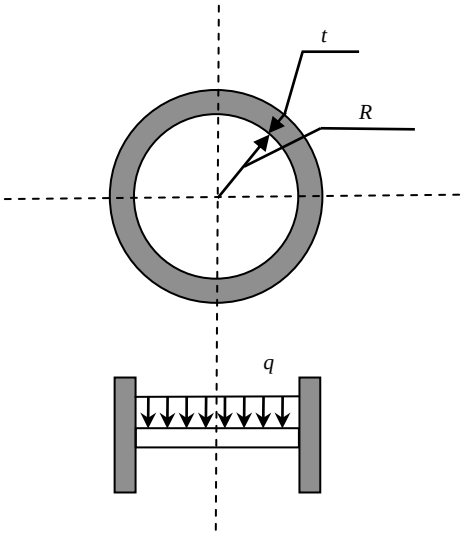


Рис. 2 – **Расчётная схема круглой плиты, защемлённой по контуру, под действием равномерно распределённой нагрузки**

При решении задач оценивалась точность определения величины перемещения осевой части плиты по направлению силы q**.** Аналитическое решение показывает, что при равенстве коэффициента Пуассона $v = 0,49$ максимальный прогиб в центре плиты составляет $w = 0,1156$ м.

В следствии симметричности объекта, расчёт производится на четвёртой части конструкции [3].

При анализе результатов расчётов, приведённых в табл. 2 следует, что схема МКЭ дает удовлетворительную сходимость только для квадратичной аппроксимации. Но наилучшая сходимость соответствует квадратичному конечному элементу на основе моментной схемы**.**

Таблица 2– **Результаты расчета круглой плиты, защемлённой по контуру**

Сетка разбиения	Линейный треугольный конечный элемент ω, см		Квадратичный треугольный конечный элемент ω, см	
	МКЭ	МСКЭ	МКЭ	МСКЭ
$3\times 5\times 5$	0,0076	0,058	0,043	0,0573
$3\times 7\times 7$	0,0123	0,063	0,064	0,0688
$5\times 9\times 9$	0,0228	0,073	0,080	0,0731
$5\times 11\times 11$	0,0290	0,079	0,087	0,0814
$5\times 15\times 15$	0,0390	0,091	0,098	0,1070

3. Квадратная плита (рис. 3) со стороной $a = 0,2$ м, толщиною $t = 0,01$ м, под действием поверхностной нагрузки $q = 0,002$ МПа. Модуль упругости материала $E = 2$ МПа.

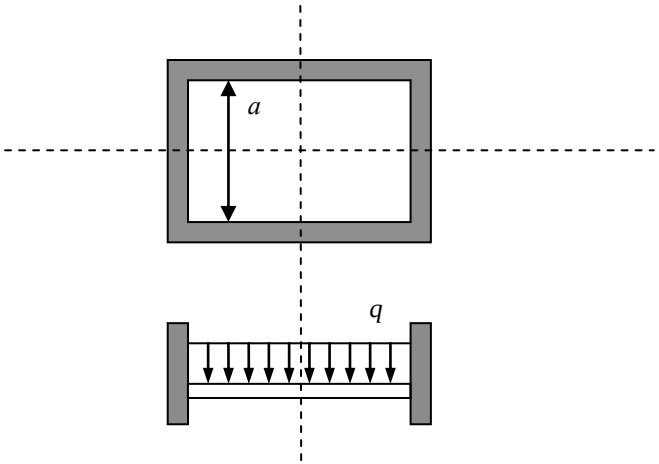


Рис 3 – **Расчётная схема квадратной плиты, защемлённой по контуру, под действием равномерно распределённой нагрузки**

Как и в предыдущем так и в этом примере с учетом циклической симметрии для расчета была выделена четвёртая часть конструкции.

Аналитическое решение показывает, что максимальный прогиб в центре плиты при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,49$ равен $w = 0,0187$. Результаты численного исследования приведены в табл. 3.

Таблица 3 – **Результаты расчета прямоугольной плиты, защемлённой по контуру**

Сетка разбиения	Линейный треугольный конечный элемент ω, см		Квадратичный треугольный конечный элемент ω, см	
	МКЭ	МСКЭ	МКЭ	МСКЭ
$3 \times 5 \times 5$	0,0031	0,0087	0,0095	0,0119
$3 \times 7 \times 7$	0,0039	0,0125	0,0128	0,0141
$3 \times 9 \times 9$	0,0044	0,0149	0,0146	0,0150
$3 \times 11 \times 11$	0,0047	0,0166	0,0157	0,0160
$5 \times 15 \times 15$	0,0050	0,0186	0,0171	0,0177

Самый лучший результат при расчёте такой плиты из слабосжимаемых материалов даёт квадратичный конечный элемент на основе моментной схемы [3].

Так, во всех выше приведённых случаях метод моментных схем даёт более точные результаты для слабосжимаемых эластомеров, чем традиционный метод конечных элементов.

Выводы. Изложенные в трудах [3, 4] выводы соотношений МКЭ позволяют учесть основные свойства жестких смешений как для изопараметрических, так и для криволинейных конечных элементов, для которых негативная

ситуация усугубляется тем, что компоненты деформаций зависят не только от производных жестких вращений, но и от поступательных и вращательных смещений каждого элемента в целом.

Представленная методика расчётов методом моментных схем в дальнейшем будет использоваться для расчёта конструкций, находящихся в напряжённо-деформированном состоянии. На её основе разрабатывается САПР, который будет решать задачи автоматизации конструкций как в механике так и в строительстве.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Галлагер Р***. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
2. ***Зенкевич О. К.*** Метод конечных элементов в технике / О.К. Зенкевич. – М., 1975. – 541 с.
3. ***Киричевский В. В.*** Метод конечного элемента в исследовании малых и больших перемещений трехмерных упругих тел / В.В. Киричевский // Механика твердого тела. – М. : АН СССР, 1973. – № 4. – С. 191.
4. ***Сахаров А. С.*** Метод конечных элементов в механике твердых тел. / [А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокий, В. В. Киричевский, А. Альтенбах, У. Габерт и др.]: под ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К., 1982. – 480 с.

Бердянский государственный педагогический университет, Бердянск, Украина

Поступила в редколлегию 28.03.2012

В. В. Лаврик

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ І ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ МСЕ І МССЕ ПРИ РІЗНИХ АПРОКСИМАЦІЯХ ПЕРЕМІЩЕННЯ

Проводиться аналіз різницевих схем чисельних методів кінцевих елементів, в основі яких покладений класичний метод СЕ і метод моментних схем. Приведені приклади розрахунків об'єктів розглянутими методами і їх порівняльні характеристики.

Ключові слова*: модель, апроксимація, еластомер, напруга, деформація, схема.*

V. V. Lavrik

THE COMPARATIVE ANALYSIS AND NUMERICAL RESEARCH OF CONVERGENCE THE METHOD OF FINAL ELEMENTS AND TORQUE SCHEMES OF FINAL ELEMENTS AT VARIOUS APPROXIMATIONS OF MOVING

The analysis разностных schemes of numerical methods of final elements in which basis classical method final elements and a method torque schemes is put is made. Examples of calculations of objects by the considered methods and their comparative characteristics are resulted.

Keywords*: model, approximation, elastomers, pressure, deformation, the scheme.*