

УДК 539.3:519.6

Р. Р. Лабібов

РАЗВИТИЕ ЛИНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Для описания текучести стали используется предположение о том, что поведение материала на пике-зубе течения и последующее резкое падение напряжения течения связано с освобождением дислокаций. Возникающие при этом неоднородности в виде полос Людерса – Чернова рассматриваются как полосы сдвига структурных слоёв под действием внешней нагрузки в состоянии пластичности.

Ключевые слова: текучесть, локализация, полосы сдвига, задача Йоффе.

Введение. В ряде экспериментов показано как развитие полос локализации в теле под действием нагрузки происходит в состоянии текучести [8, 10]. В экспериментальных работах [7] установлено, что полоса локализации распространяется в теле с постоянной скоростью V . В то же время, в моделях пластической деформации [1 – 3, 7, 9] не определяется эта скорость и не делаются попытки дать этому процессу физическое объяснение. В [4] дается оценка скорости, полученная из аналитического решения. Однако такое решение не отвечает большинству материалов, так как оно требует наличия на диаграмме напряжений-деформаций материала только упругого состояния и состояния упрочнения.

В стали и сплавах, а также ряде других используемых на практике материалах, полоса локализации развивается в виде полосы сдвига между структурными слоями (слоями атомов в кристаллической решётке, слоями зёрен и т.п.). Существует ряд свойств, которые сблизжают линию локализации с процессом образования трещины II типа [6]: наличие скачка поперечных перемещений v , действующие на берега трещины и полосы локализации касательных напряжений. Однако линия локализации обладает рядом особых свойств, таких как возможность «залечивания» из-за обратимого характера сдвига структурной решётки.

Решение задачи динамики установившегося процесса движения трещины описано в [11]. В то же время, оригинальное решение [11] описывает трещину I типа, и процесс залечивания в этом случае не имеет физического смысла.

В данной работе рассматривается линия скольжения постоянной длины, движущаяся с постоянной скоростью в бесконечном теле. В этой модели принято предположение о том, что сдвиг полосы происходит в вершине и «залечивание» – на другом конце. Полученное ре-

шение показывает особенности, присущие движущимся дислокациям и позволяет дать физическое объяснение происходящим процессам.

Описание модели. Для моделирования механизма развития полос Людерса – Чернова в мягкой стали, которая состоит из феррита с включениями существенно более прочного перлита, рассматривается сдвиг η двух соседних зерен перлита и феррита под действием сдвигающего усилия T . Если принять в зерне феррита модель упругопластического поведения, а в зерне перлита – модель хрупкого разрушения, то можно охарактеризовать зависимость касательного напряжения τ ($\tau = T / \delta$) от деформации сдвига γ ($\gamma = \eta / \delta$) между двумя зернами зависимостью, которая обобщает модель Новожилова [9] образования трещины в упругом теле

$$\tau = G(\gamma / \gamma_C) \exp(-\gamma / \gamma_C) + \tau_0 (1 + a\gamma / \gamma_C) [1 - \exp(-\gamma / \gamma_C)], \quad (1)$$

где γ_C – деформация на пределе прочности на сдвиг:

$$\tau_C = G \exp(-1) + \tau_0 (1 + a) [1 - \exp(-1)].$$

Первое слагаемое в формуле (1) отвечает разрушению зерна перлита, а второе – упругопластической деформации феррита.

Из закона (1) следует, что система 2-х зерен при $\tau_C > \tau > \tau_m$, где τ_m – минимальное напряжение, может находиться в трех равновесных состояниях, отвечающих значениям γ равным $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_L$. Состояние $\gamma = \gamma_1$ отвечает восходящему участку, при $\gamma = \gamma_2$ – ниспадающему участку, а $\gamma = \gamma_L$ – состоянию упрочнения. При этом положение равновесия $\gamma = \gamma_2$ неустойчиво, а два других положения равновесия устойчивы. Пара зерен, оказавшаяся в состоянии взаимодействия по закону нисходящего участка кривой $\tau - \gamma$ неизбежно перейдет во взаимодействие по закону участка упрочнения $\gamma = \gamma_L$. Если бы все пары зерен двух смежных слоев, пересекающих тело, оказались в таком состоянии, то оно перешло бы в состояние идеальной пластичности. Из сказанного следует, что в упругом теле, находящемся в состоянии устойчивой равновесной деформации, взаимодействие по закону нисходящего участка кривой $\tau - \gamma$ может существовать только локально. Вследствие этого о подобных участках можно говорить как о линиях разрыва перемещений в сплошном теле или о линиях скольжения. Вокруг этих линий все зерна находятся в состоянии устойчивого взаимодействия по закону восходящей ветви кривой $\tau - \gamma$, в соответствии с чем, разрыв перемещений отсутствует.

Постановка задачи. При теоретическом исследовании равновесных деформаций упругопластических тел всегда можно трактовать тело как сплошную среду, используя методы теории пластичности. Однако, можно учесть не только формы равновесия, когда все зерна взаимодействуют

вуют по закону восходящей (устойчивой) ветви кривой $\tau - \gamma$, но и такие формы, когда в теле возникают разрывы перемещений, между берегами которых осуществляется взаимодействие по закону нисходящей ветви кривой $\tau - \gamma$ (рис. 1). Форма и размеры этих разрывов заранее неизвестны. Они могут быть определены из уравнений теории упругости при задании на берегах каждой линии разрыва соответствующих граничных условий, вытекающих из закона (1), при $\gamma > \gamma_C$.

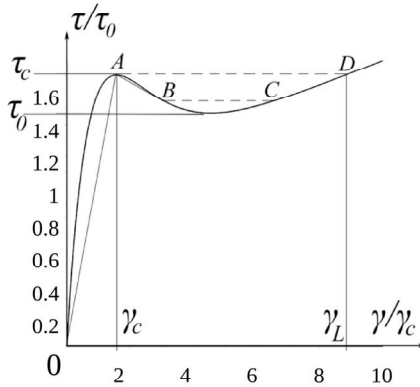


Рис. 1 – Зависимость $\tau - \gamma$, построенная на основании формулы (1)

Строгая постановка и решение этой нелинейной задачи представляют определенные трудности, ввиду чего сформулируем приближенный подход на основе следующих упрощающих допущений:

1) соотношение между напряжениями и деформациями на восходящем (устойчивом) участке кривой ($\gamma < \gamma_L$), т. е. во всей области тела, где сохраняется его сплошность, отвечает закону Гука;

2) уравнения равновесия и формулы, связывающие деформации с перемещениями, принимаются в линейной форме, т. е. задача трактуется как геометрически линейная;

3) нисходящий участок зависимости $\tau - \gamma$ аппроксимируется в простейшем варианте:

$$\tau = \tau_C H(\gamma_1 - \gamma_*), (\gamma_* = \gamma - \gamma_C, \gamma_* > 0),$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Постоянная γ_1 может быть выбрана из соображений наилучшей аппроксимации кривой $\tau - \gamma$ при $\gamma > \gamma_C$. Определим γ_1 из условия

$$\tau_C \gamma_1 = u,$$

потребовав тем самым, чтобы площадь, ограниченная аппроксимирующей кривой $\tau = \tau(\gamma)$ и прямой $\tau = \tau_m$ на интервале $\gamma_C \leq \gamma \leq \gamma_1$, была равна площади, которая ограничена кривой $\tau = \tau(\gamma)$ и прямой $\tau = \tau_m$ на интервале $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_L$ (рис. 1). Это условие равносильно требованию, чтобы аппроксимирующая зависимость давала то же значение плотности поверхностной энергии. Принятые упрощения приводят к линейаризации всех уравнений задачи и дают возможность получить её приближенное решение.

Представленная модель образования линии скольжения напоминает модель движения дислокации, когда «квантом» пластического сдвига является смещение дислокации на расстояние, равное длине вектора Бюргера b_0 . В принятой модели для поликристаллического материала принято, что пластическая деформация развивается за счет пластических сдвигов отдельных зерен (кристаллитов) и «квантом» пластической деформации в этом случае является сдвиг в пределах пары зерен δ .

На рис. 2 показана линия разрыва перемещений. Раскрытия в отличие от трещины здесь не происходит, то есть показано перемещение u , а не v . Принято энерго-независимое «залечивание», которое сглаживает закрытие в конце трещины. Принимая Кулоново трение и область процесса Баренблатта, линейность сохранена.

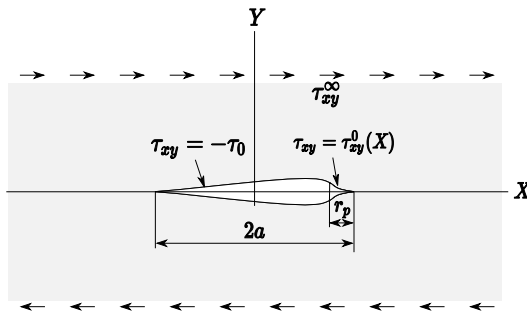


Рис. 2 – Задача Иоффе для трещины II типа

Решение для движущейся полосы сдвига находится из статического решения, умноженного на параметр $Y_{II}(\beta)$, называемого функцией Йоффе. Параметр β представляет собой отношение скорости распространения полосы сдвига к скорости распространения упругой волны в материале $\beta = V / c_p$. Из принципа суперпозиции следует, что реакция

от касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{xy}^0(x)$ на $Y = 0$ определяется из статического решения от воздействия касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{xy}^0(x)$, умноженного на $Y_{II}(\beta)$.

Исходя из представленной выше модели, на поверхностях разрыва перемещений будем иметь

$$\tau_{xy} = \tau_0.$$

Поскольку уравнения остаются неизменными, то решение в нашем случае может быть получено непосредственно из результатов задачи [11] с проскальзыванием. Таким образом, решения [11] изменяются на

$$\tau_{xy} = \left(\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0\right) \sqrt{\frac{X+a}{X-a}} + \tau_0 \quad \text{для } |X| > a; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_+}{\partial x} = \frac{\left(\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0\right) Y_{II}(\beta)}{2(1-k^2)\mu} \sqrt{\frac{a+X}{a-X}} \quad \text{для } |X| < a; \quad (3)$$

$$\Delta = \frac{\pi\left(\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0\right) a Y_{II}(\beta)}{2(1-k^2)\mu}.$$

Здесь используется статическое решение, полученное в [2, 3], умноженное на функцию Йоффе $Y_{II}(\beta)$, которая в данном случае имеет вид

$$Y_{II}(\beta) = \frac{2k(1-k^2)\beta^2\sqrt{k^2-\beta^2}}{R(\beta)}. \quad (4)$$

Модель пригодна для описания, как плоского напряженного состояния, так и плоского деформируемого состояния. Тип модели обуславливается выбором параметра k , который определяется как отношение между скоростью S - и P -волны

$$k^2 = \begin{cases} (1-2\nu)/2/(1-\nu) & \text{для плоского деформируемого состояния} \\ (1-\nu)/2 & \text{для плоского напряжённого состояния} \end{cases}.$$

В (4) $R(\beta)$ обозначена функция Релея

$$R(\beta) = 4k^3\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{k^2-\beta^2} - (2k^2-\beta^2)^2 = k^4 R(a_P, a_S),$$

где a_S и a_P – безразмерные параметры скорости S - и P -волны в материале соответственно

$$a_P = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad a_P > 0,$$

$$a_S = \sqrt{1 - \beta^2 / k^2}, \quad a_S > 0.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \mu \gamma_L h / (\tau_0 a) &= \gamma_L / \gamma \cdot h / a = \\ &= \pi \left(\tau_{xy}^\infty / \tau_0 - 1 \right) \frac{k \beta^2 \sqrt{k^2 - \beta^2}}{2k^3 \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{k^2 - \beta^2} - (2k^2 - \beta^2)^2}. \end{aligned}$$

Из уравнения (2) замечаем, что

$$K_{II} = 2 \left(\tau_{xy}^\infty - \tau_0 \right) \sqrt{\pi a}.$$

Для медленно движущейся трещины II типа [9] была использована модель области процесса Баренблатта. Полученные результаты будут использоваться здесь для динамического дорелеевского случая. Длина трещины (включая область процесса) $2a$, и напряжение сдвига на $Y=0$

$$\tau_{xy} = \begin{cases} \tau_0 & \text{для } -a < X < a - r_P \\ \tau_{xy}^0(X) & \text{для } a - r_P < X < a \end{cases}$$

где r_P – длина области развития трещины; $\tau_{xy}^0(X)$ – значение в условии гладкого закрытия,

$$\frac{1}{\pi} \int_{a-r_P}^a \frac{|\tau_{xy}^0(\xi) - \tau_0| d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \tau_{xy}^\infty(\xi) - \tau_0.$$

Для динамического дорелеевского случая использование результатов статического решения [6,11], которое получено в предположении о нулевой энергии «залечивания» (чтобы при этом не рассматривались процессы в хвосте трещины), дает

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{X \sqrt{X^2 - a^2}}{\pi |X|} \int_{-a}^a \frac{\tau_{xy}(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (X - \xi)} \\ &= \frac{X \sqrt{X^2 - a^2}}{\pi |X|} \int_{a-r_P}^a \frac{[\tau_{xy}^0(\xi) - \tau_0] d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (X - \xi)} + \tau_f \quad \text{для } |X| > a \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial x} = \frac{\sqrt{a^2 - X^2} Y_{II}(\beta)}{2\pi(1-k^2)\mu} \int_{a-r_p}^a \frac{[\tau_{xy}^0(\xi) - \tau_0]}{\sqrt{a^2 - \xi^2} (X - \xi)} \quad \text{для } |X| < a$$

для $Y=0$, и, если $r_p \ll a$, скольжение на каждой стороне трещины будет

$$\Delta \approx \frac{T_{II} Y_{II}(\beta)}{2(1-k^2)\mu} \sqrt{\frac{a}{2}}. \quad (5)$$

Равенство (5) становится строгим в пределе при $r_p / a \rightarrow 0$ и затем совпадает с (3), так как T_{II} – модуль сцепления Баренблатта для трещины II типа

$$T_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} K_{II} = \pi (\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0) \sqrt{2a}. \quad (6)$$

Значение T_{II} , так же как и K_{II} во время динамического распространения трещины, зависит от β и, вероятно, также от истории распространения трещины.

Уравнение (6) показывает, что длина области скольжения

$$2a = \frac{T_{II}^2}{\pi^2 (\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0)^2} \quad (7)$$

и скольжение на краях трещины

$$\Delta = \frac{T_{II}^2 Y_{II}(\beta)}{4\pi(1-k^2)\mu(\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0)}. \quad (8)$$

Выражения (7), (8) зависят от модуля сцепления T_{II} , перенапряжения $\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0$ и скорости. При медленном распространении линии скольжения длина ее определена единственным образом, когда T_{II} и $\tau_{xy}^{\infty} - \tau_0$ известны. Но в динамическом случае даже при единственном и известном соотношении между T_{II} и скоростью, уравнения, представляемые до сих пор, не дают определение скорости. Длина трещины и накопленное скольжение не могут быть определены в динамическом случае из одного только отношения устойчивого состояния: история, в результате которой достигнуто устойчивое состояние, должна также быть известна.

Диссипация энергии на переднем крае вычисляется таким же образом, как в случае медленного роста трещины, но диссипация полной энергии также включает энергию трения вдоль всей области скольжения. Таким образом, энергетическое рассеяние на единицу области

вдоль интерфейса после того, как импульс однонаправленного скольжения прошел мимо, будет

$$\frac{dW}{dS} \approx 2\tau_f \Delta + \frac{T_{II}^2 Y_{II}(\beta)}{2\pi(1-k^2)\mu}. \quad (9)$$

Отметим, что выражение (9) не содержит r_p . Оно становится точным в пределе при $r_p/a \rightarrow 0$. Как будет показано позже, соответствующее выражение для диссипации энергии при дозвуковой скорости трещины зависит от r_p/a и исчезает в пределе при $r_p/a \rightarrow 0$.

Простой результат получен для отношения w_{pr} между диссипацией энергии в области процесса (то есть на переднем крае) и диссипацией полной энергии

$$w_{pr} = (\tau_{xy}^\infty - \tau_0) / \tau_0. \quad (10)$$

Если скольжение имеет место в неоднородном материале, в котором происходит слабое взаимодействие между берегами трещины, то недопустимо пренебрегать модулем «залечивания» H_{II} . Изменения, необходимые для ненулевого значения H_{II} , незначительны [5]. Таким образом, замена $T_{II} \rightarrow (T_{II} - H_{II})$ должна быть сделана в уравнениях (5) и (7), и замена $T_{II}^2 \rightarrow (T_{II}^2 - H_{II}^2)$ в (8) и (9), тогда как (10) остаться без изменений. Уравнение (6) должно быть изменено на

$$T_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{2} K_{II}};$$

$$T_{II} - H_{II} = \pi (\tau_{xy}^\infty - \tau_0) \sqrt{2a}.$$

Выводы. Предложено решение развития линий скольжения в условиях сложного сдвига. Решение построено путём введения в уравнения для стационарной задачи функций специального вида, которые вносят в уравнения состояния параметр времени.

Предложенный подход в перспективе применим к целому ряду задач динамики полос локализации и может быть применён для рассмотрения развития полосы сдвига под действием внешних нагрузок другого характера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Barenblatt G. I.** The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23. No. 3. P. 622–636.

2. **Barenblatt G. I.** Equilibrium cracks formed during brittle fracture rectilinear cracks in plane plates // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23. No. 4. P. 1009–1029.
3. **Barenblatt G. I.** Concerning equilibrium cracks forming during brittle fracture. The stability of isolated cracks. Relationships with energetic theories // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23. No. 5. P. 1273–1282.
4. **Bažant Z. P., Belytschko T. B.** Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution. 1985. Vol. 111. No. 3. P. 381–389.
5. **Broberg K. B., Broberg K. B.** On transient sliding motion // Geophysical Journal International. 1978. Vol. 52. No 3. P. 397–432.
6. **Broberg K. B.** Cracks and fracture // Academic Press, 1999. 761 p.
7. **Corona E., Shaw J. A., Iadicola M. A.** Buckling of steel bars with Lüders bands // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39. P. 3313–3336.
8. **Kyriakides S., Miller J. E.** On the Propagation of Lüders Bands in Steel Strips // Journal of Applied Mechanics. 2000. Vol. 67. No 4. P. 645.
9. **Novozhilov V. V.** On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 33. No 2. P. 201–210.
10. **Shaw J., Kyriakides S.** Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension // International Journal of Plasticity. 1997. Vol. 13. P. 837–871.
11. **Yoffe E. H.** The moving Griffith crack // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1951. Vol. 42. No 330. P. 739–750.

УДК 539.3:519.6

P. P. Лабібов

РОЗВИТОК ЛІНІЇ КОВЗАННЯ З ПОСТІЙНОЮ ШВИДКІСТЮ

Для опису текучості сталі розглядається гіпотеза про те, що поведінка матеріалу на піку-зубу течії та подальше різке падіння напружень текучості пов'язане з вивільненням дислокацій. Виникаючі при цьому неоднорідності у вигляді смуг Людерса – Чорнова розглядаються як смуги зсуву структурних шарів під впливом зовнішнього навантаження у стані пластичності.

Ключові слова: текучість, локалізація, смуги зсуву, задача Йоффе.

UDC 539.3:519.6

R. R. Labibov

CONSTANT VELOCITY LOCALIZATION SLIP LINE DEVELOPMENT

Yielding of soft steels is described assuming the yielding peak and softening behavior is connected to the process of dislocation release. Discrepancies created during this process in the form of Lüders strips are described as shear lines between structural layers (e.g. ferrite-pearlite boundary, interatomic lattice) under an applied loading in a state of plastic yielding.

Keywords: yielding, localization, shear strips, Yoffe problem.

Experiments in [8, 10] show the process of localization of plastic deformation in solids in a form of Lüders strips. In empirical data [7] localized band is shown to progress along the solid body at a constant rate V . However this works do not discuss the velocity this process occurs at. The solu-

tion [4] proposes analytical solution to the problem of plasticity localization, yet it is applicable to certain type of materials with strain-softening behavior under stresses that exceed elastic limit and require the segment of negative slope on the stress-strain curve [5, 9].

Localized plasticity bands in soft steels are developed as the lines of internal slip between structural layers [1, 2] (e.g. crystal lattice, pearlite-ferrite boundary). A number of properties such as displacement discontinuity ν and shear stresses at the edges plastic bands share with mode II cracks [6]. At the same time an ability to «heal» due to the reversible slip set the localized bands apart from the cracks. Steady crack propagation problem in given in [11]. The solution describes mode I crack and healing does not correspond to experimental observations in this case [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**3].

Localization slip developing at a constant rate is described in this paper. The model proposed assumes slip to occur at the tip of the line and healing process at the end. The model exhibit properties typical for moving dislocations and allows to characterize physical processes in them.

REFERENCES

1. **Barenblatt G. I.** The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23. No. 3. P. 622–636.
2. **Barenblatt G. I.** Equilibrium cracks formed during brittle fracture rectilinear cracks in plane plates // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23. No. 4. P. 1009–1029.
3. **Barenblatt G. I.** Concerning equilibrium cracks forming during brittle fracture. The stability of isolated cracks. Relationships with energetic theories // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1959. Vol. 23. No. 5. P. 1273–1282.
4. **Bažant Z. P., Belytschko T. B.** Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution. 1985. Vol. 111. No. 3. P. 381–389.
5. **Broberg K. B., Broberg K. B.** On transient sliding motion // Geophysical Journal International. 1978. Vol. 52. No 3. P. 397–432.
6. **Broberg K. B.** Cracks and fracture // Academic Press, 1999. 761 p.
7. **Corona E., Shaw J. A., Iadicola M. A.** Buckling of steel bars with Lüders bands // International Journal of Solids and Structures. 2002. Vol. 39. P. 3313–3336.
8. **Kyriakides S., Miller J. E.** On the Propagation of Lüders Bands in Steel Strips // Journal of Applied Mechanics. 2000. Vol. 67. No 4. P. 645.
9. **Novozhilov V. V.** On a necessary and sufficient criterion for brittle strength // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 33. No 2. P. 201–210.
10. **Shaw J., Kyriakides S.** Initiation and propagation of localized deformation in elastoplastic strips under uniaxial tension // International Journal of Plasticity. 1997. Vol. 13. P. 837–871.
11. **Yoffe E. H.** The moving Griffith crack // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1951. Vol. 42. No 330. P. 739–750.

*Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 28.04.2018