

УДК 539.3

К. А. Чумак, канд. фіз.-мат наук, Р. М. Мартиняк, д-р фіз.-мат наук

ЛОКАЛЬНЕ ПОРУШЕННЯ КОНТАКТУ ДВОХ ПІВБЕЗМЕЖНИХ ТІЛ, ЗУМОВЛЕНЕ ЗМІННИМ ПОВЕРХНЕВИМ ТЕРМОПОРОМ

З урахуванням впливу теплопроникного заповнювача міжконтактного зазору досліджено термопружне розшарування двох півбезмежних тіл на ділянці зі змінним вздовж поверхні термопором. Запропоновано аналітично-числову методику розв'язування системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, до якої зведено сформульовану контактну задачу. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача зазору на висоту зазору та контактний тиск.

Ключові слова: термопружне розшарування, термоопір, міжконтактний зазор, теплопроникний заповнювач, термічна дистортивність.

Вступ. У природі та різноманітних конструкціях широко розповсюджені структури, взаємодія яких супроводжується локальною відсутністю контакту внаслідок нерівності поверхонь або дії механічних чи термічних чинників. Міжконтактні зазори, які виникають при цьому, є заповненими теплопровідним середовищем (газом, рідиною, речовиною функціонального призначення тощо). Наявність на поверхнях тіл тонких межових шарів, окисних і адсорбованих плівок, забруднень зумовлює неідеальний тепловий контакт тіл з термопором. Перелічені недосконалості границь та міжконтактне середовище в комплексі істотно впливають на передачу зусиль і тепла між тілами через ділянки спряження, а внаслідок цього – на розподіл температури, напружень і переміщень в тілах, контактну міцність, жорсткість і провідність.

Однією з причин виникнення локальних нерівностей поверхонь тіл (міжповерхневих зазорів) під час їх контакту є розшарування границь тіл під дією теплових чинників. Comninou і Dundurs [1] теоретично обґрунтували явище розшарування пари півбезмежних тіл, які перебувають під дією прикладеного тиску та нормального до поверхні спряження теплового потоку, за ідеального теплового контакту їх поверхонь. Вони показали, що у разі теплового потоку, напрямленого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю, поряд з повним контактом тіл можливий такий рівноважний стан, за якого прямий механічний контакт тіл відсутній на локальній ділянці, якщо поверхні на цій ділянці розшарування є теплоізольованими. Термічною дистортивністю (ТД) називають матеріальну константу, яку визначають за формулою $\delta = \alpha(1 + \nu) / \lambda$ [2], де α , ν , λ – коефіцієнти лінійного теплового розширення, Пуассона і теплопровідності матеріалу. У праці [3] вперше показано, що причиною термомеханічного розшарування тіл з різних матеріалів може бути ділянка неідеального теплового контакту. Підтверджено той факт, що міжконтактний зазор може утворитися лише тоді, коли тепловий потік напрямлений до тіла з більшим значенням параметра δ . Термонапружений стан біматеріалу з закритою міжфазною тріщиною досліджено в праці [4], де пока-

зано, що контактний термоопір берегів тріщини може зумовити її розкриття.

Раніше авторами було досліджено явище термомеханічного розшарування двох ізотропних півпросторів на ділянці з розподіленим по еліптичному закону поверхневим термоопором з урахуванням заповнення утвореного зазору теплопроникним середовищем [5]. Нижче проаналізовано локальне порушення контакту двох півбезмежних тіл за наявності на поверхні одного з них ділянки з термоопором, який описується функцією, що рівна нулю разом з її першою похідною на кінцях ділянки неідеального теплового контакту.

Формулювання задачі. Розглянемо контакт двох півбезмежних тіл S_1 і S_2 (рис. 1), в яких реалізується двовимірне поле температури і стан плоскої деформації. Матеріали тіл є пружними, ізотропними та характеризуються різними модулями Юнга E_1, E_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 , коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1, α_2 та коефіцієнтами теплопровідності λ_1, λ_2 . Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що термічна дистортивність (ТД) δ_2 верхнього тіла S_2 є меншою, ніж ТД δ_1 нижнього тіла S_1 . Тіла контактують під дією заданих на нескінченності стискальних однорідних зусиль p та стаціонарного теплового потоку q , нормальних до поверхні розмежування. Також на безмежності до тіл прикладені напруження σ_{xx} , які компенсують глобальне термічне викривлення тіл, зумовлене тепловим потоком q . Механічний контакт відбувається без тертя вздовж всієї лінії розмежування. Тепловий контакт півплощин є ідеальним скрізь, за винятком смуги шириною $2c$, на якій нижнє тіло має тонку поверхневу неоднорідність (плівку, окисел, забруднення тощо), що зумовлює неідеальний тепловий контакт тіл з термоопором $R(x)$.

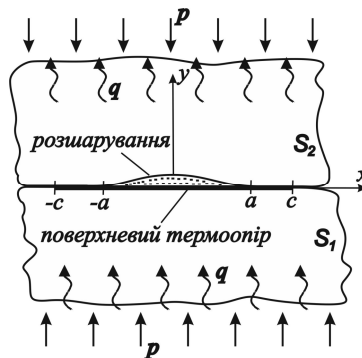


Рис. 1 – Локальне порушення контакту двох півбезмежних тіл, зумовлене поверхневим термоопором

Надалі вважатимемо, що розподіл термоопору на ділянці $[-c, c]$ описує функція

$$R(x) = r(1 - x^2/c^2)^{3/2}. \quad (1)$$

На рис. 2 подано графіки розподілу безрозмірного контактної тиску KP вздовж ділянки з термоопором вигляду (1) за повного контакту тіл ($Kp = 0,01$, $\delta_2/\delta_1 = 0,5$). Штрихові криві відповідають напрямку теплового потоку до тіла з більшою ТД, суцільні – до тіла з меншою ТД. Бачимо, що у разі теплового потоку до тіла з меншою ТД контактний тиск залишається додатним вздовж усієї ділянки неідеального теплового контакту, тоді як у разі теплового потоку до тіла з більшою ТД контактний тиск стає від'ємним на частині ділянки з термоопором при перевищенні тепловим потоком деякого критичного значення. Фізично це означає, що за одностороннього контакту тіл на даній частині ділянки з термоопором відбувається розшарування і утворюється зазор. У цьому разі задачу про повний контакт тіл потрібно переформулювати, врахувавши наявність зазору між тілами.

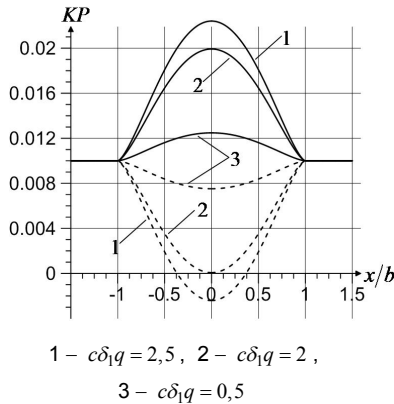


Рис. 2 – Розподіл контактної тиску KP за повного контакту тіл

Висота $h(x)$ і довжина $2a$ ($a < c$) міжповерхневого зазору, який утворився (рис. 1), наперед невідомі та залежать від прикладеного механічного і термічного навантаження. Вважаємо, що зазор заповнює теплопровідне середовище, яке не чинить тиску на тіла. Зважаючи на малу висоту зазору, його вплив на температурні поля моделюватимемо термоопором $h(x)/\lambda$, де λ – коефіцієнт теплопровідності заповнювача. Результируючий контактний термоопір між тілами на ділянці розшарування рівний сумі поверхневого термоопору $R(x)$ і термоопору зазору $h(x)/\lambda$.

Враховуючи сказане вище, крайові умови задачі запишемо у вигляді: на ділянках прямого механічного контакту $|x| \geq a$

$$T^- = T^+, |x| \geq c; T^- - T^+ = R(x)q_y^+, a \leq |x| \leq c; q_y^- = q_y^+;$$

$$\sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+; \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0; u_y^+ = u_y^-;$$

на ділянці міжконтактного зазору $|x| < a$

$$T^- - T^+ = (R(x) + h(x)/\lambda)q_y^+; q_y^+ = q_y^-;$$

$$\sigma_{yy}^+ = 0; \sigma_{yy}^- = \sigma_{yy}^+; \sigma_{xy}^+ = \sigma_{xy}^- = 0;$$

на нескінченності

$$q_x^\infty = 0; q_y^\infty = q; \sigma_{xx}^\infty = \alpha_j E_j q y / (\lambda_j (1 - \nu_j)); \sigma_{yy}^\infty = -p; \sigma_{xy}^\infty = 0.$$

Тут T – температура; q_x, q_y – компоненти вектора теплового потоку; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень; u_y – компонента вектора переміщень у напрямку осі y ; індексами «+» та «-» позначено граничні значення функцій на осі x у верхньому і нижньому тілах; $j = 1, 2$.

Розв'язування задачі. Контактна задача термопружності для двох пів-безмежних тіл із заповненим теплопроникним середовищем міжконтактним зазором, зумовленим розшаруванням на ділянці з поверхневим термоопором $R(x)$, зводиться до системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно висоти зазору $h(x)$ та стрибка температури $\gamma(x) = T^- - T^+$ на ділянці з термоопором [5]:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda_{12}}{2} (\delta_2 - \delta_1) \gamma(x) = \frac{Kp}{2}, \quad |x| < a; \quad (2)$$

$$\frac{\gamma(x)}{R(x) + h(x)/\lambda} - \frac{\lambda_{12}}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = -q, \quad |x| < c, \quad (3)$$

де $h(x) = 0, |x| \geq a$; $\lambda_{12} = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$; $K = 4\left(\frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}\right)$; а знак “-” в правій частині рівняння (3) відображає той факт, що тепловий потік напрямлений до тіла з більшою ТД.

Шукані функції повинні задовольняти умови [5]

$$\gamma(\pm c) = 0; h(\pm a) = 0; h'(\pm a) = 0. \quad (4)$$

За відомої функції $h(x)$ рівняння (3) – це СІДР типу Прандтля відносно функції $\gamma(x)$. У роботі [5], де розподіл поверхневого термоопору описувала функція $R(x) = r(1 - x^2/c^2)^{1/2}$, розв'язок рівняння (3) був знайдений за допомогою методу колокацій. У даній роботі розподіл поверхневого термоопору $R(x)$ описує функція вигляду (1). У цьому випадку для розв'язування СІДР

типу Прандтля (3) може бути використана аналітично-числова методика, розроблена в працях [6, 7]. Такий вибір щодо знаходження розв'язку рівняння (3) зумовлений межами застосовності зазначених методик. Метод колокацій використовують при розв'язуванні СІДР типу Прандтля у класі функцій, які є сталими в точках $x = \pm c$, а їх перша похідна відмінна там від нуля. Саме до цього класу належить функція $R(x) = r(1 - x^2/c^2)^{1/2}$. Розвинутий в [6, 7] аналітично-числовий підхід розроблений для розв'язування СІДР типу Прандтля у класі функцій, які рівні нулю разом зі своїми першими похідними в точках $x = \pm c$. До цього класу належить функція (1).

Для знаходження розв'язку системи нелінійних СІДР (2), (3) застосуємо метод послідовних наближень. На кожному кроці ітераційного процесу відповідне наближення стрибка температури та висоти зазору шукаємо з системи СІДР:

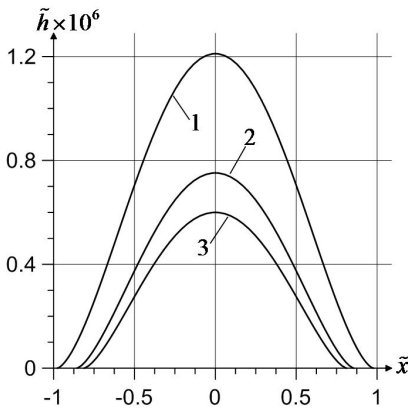
$$\frac{\gamma_i(x)}{R(x) + h_i(x)/\lambda} - \frac{\lambda_{12}}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{\gamma'_i(t)}{t-x} dt = -q, \quad |x| < b; \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'_{i+1}(t)}{t-x} dt = \frac{Kp_{i+1}}{2} - \frac{\lambda_{12}}{2} (\delta_2 - \delta_1) \gamma_i(x), \quad |x| < a, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

За початкові наближення ($i = 0$) висоти зазору та стрибка температури вибрано такі їх значення, що фізично відповідають повному контакту тіл, коли розшарування не враховується ($h_0(x) = 0$). i -те наближення стрибка температури $\gamma_i(x)$ шукаємо з СІДР типу Прандтля (5) за допомогою аналітично-числової методики [6, 7]. Визначивши розв'язок сингулярного інтегрального рівняння (6), який задовольняє другу і третю умови (4), знайдемо i -ті наближення висоти зазору $h_i(x)$ та зовнішнього тиску p_i [5]. За критерій зупинки ітераційного процесу вибрали одночасне виконання умов $|\gamma_i(x) - \gamma_{i-1}(x)|/\gamma_i(x) \leq 10^{-5}$, $|h_i(x) - h_{i-1}(x)|/h_i(x) \leq 10^{-5}$.

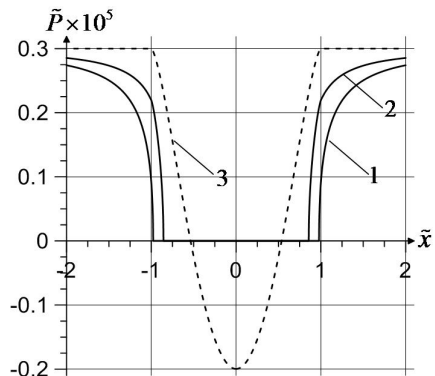
Аналіз числових результатів. Введемо безрозмірні параметри: $\tilde{x} = x/c$, $\tilde{a} = a/c$, $\tilde{h} = h/c$, $\tilde{r} = r\lambda_{12}/c$, $\tilde{\lambda} = \lambda/\lambda_{12}$, $\tilde{\gamma} = \lambda_{12}\delta_1\gamma$, $\tilde{p} = Kp$, $\tilde{q} = c\delta_1q$, $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/\delta_1$, $\tilde{P} = KP$. Обчислення були проведені для $\tilde{r} = 0,001$, $\tilde{\delta}_2 = 0,5$, $\tilde{p} = 0,3 \times 10^{-5}$, $\tilde{q} = 0,01$.

На рис. 3 зображено форму зазору, що утворився внаслідок розшарування, для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\tilde{\lambda}$ заповнювача. Бачимо, що довжина і висота зазору зростають зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності міжконтактного середовища.



1 - $\tilde{\lambda} = 0,003$, 2 - $\tilde{\lambda} = 0,005$,
3 - $\tilde{\lambda} = 0,01$

Рис. 3 – Залежність висоти зазору \tilde{h} від координати \tilde{x}



1 - $\tilde{\lambda} = 0,003$, 2 - $\tilde{\lambda} = 0,005$,
3 - $\tilde{h}(\tilde{x}) = 0$

Рис. 4 – Розподіл контактного тиску \tilde{P} поверхонь тіл

Розподіл контактного тиску \tilde{P} поверхонь тіл для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\tilde{\lambda}$ заповнювача зображено на рис. 4. Штрихова крива побудована за припущення про повний контакт (відсутність зазору), за якого на частині ділянки з термоопором виникає від'ємний контактний тиск. Якщо ж врахувати явище розшарування, то контактний тиск при $\tilde{x} \leq \tilde{a}$ буде відсутнім, а поза зазором ($\tilde{x} > \tilde{a}$) контактний тиск є додатнім та зростає, асимптотично прямуючи до $\tilde{p} = 0,3 \times 10^{-5}$. З рисунка видно, що контактний тиск зростає разом з коефіцієнтом теплопровідності міжконтактного середовища $\tilde{\lambda}$.

Висновки. Проаналізовано термопружне розшарування двох ізотропних півбезмежних тіл, зумовлене змінним вздовж поверхні термоопором, який описується функцією, що рівна нулю разом з її першою похідною на кінцях ділянки неідеального теплового контакту. Зазор, що утворився, заповнений теплопроникним середовищем, вплив якого на температурні поля моделюється термоопором, прямо пропорційним висоті зазору та обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності середовища в зазорі. Для розв'язування системи нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь, до якої зводиться сформульована контактна задача, розроблено ітераційну процедуру. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача зазору на розподіл нормальних переміщень та напружень.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Comninou M.** On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact / M. Comninou, J. Dundurs // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 1980. – Vol. 102, № 2. – P. 156–162.

2. **Dundurs J.** Heat conduction between bodies with wavy surfaces / J. Dundurs, C. Panek // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1976. – Vol. 19, № 7. – P. 731–736.

3. **Швец Р. Н.** Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей / Р. Н. Швец, Р. М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – Вып. 27. – С. 23–28.

4. **Мартиняк Р. М.** Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів / Р. М. Мартиняк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – т. 35, № 5 – С. 14–22.

5. **Мартиняк Р. М.** Термопружне розшарування тіл за наявності теплопроникного заповнювача міжконтактного просвіту / Р. М. Мартиняк, К. А. Чумак // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – т. 45, № 4. – С. 45–52.

6. **Мартиняк Р. М.** Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту / Р. М. Мартиняк, К. А. Чумак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – т. 51, № 3. – С. 163–175.

7. **Martynyak R.** Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids / R. Martynyak, K. Chumak // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2012. – Vol. 55, № 4. – P. 1170–1178.

*Інститут прикладних проблем
механіки та математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна*

Поступила в редакцію 09.03.2012.

К. А. Чумак, канд. фіз.-мат наук, Р. М. Мартыняк, д-р физ.-мат наук

ЛОКАЛЬНОЕ НАРУШЕНИЕ КОНТАКТА ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ТЕЛ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ПЕРЕМЕННЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ТЕРМИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

С учетом влияния теплопроницаемого заполнителя межконтактного зазора исследовано термоупругое расслоение двух полубесконечных тел на участке с переменным вдоль поверхности термическим сопротивлением. Предложена аналитико-численная методика решения системы нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений, к которой сведена сформулированная контактная проблема. Проанализировано влияние коэффициента теплопроводности среды, заполняющей зазор, на высоту зазора и контактное давление.

Ключевые слова: термоупругое расслоение, термическое сопротивление, межконтактный зазор, теплопроницаемый заполнитель, термическая дистортивность.

K. A. Chumak, Associate Professor, R. M. Martynyak, Professor

LOCAL LOSS OF CONTACT BETWEEN TWO SEMI-INFINITE SOLIDS CAUSED BY VARYING SURFACE THERMAL RESISTANCE

Considering the effect of a heat-permeable filler of an intercontact gap, the thermoelastic delamination of two semi-infinite solids on a localized area with thermal resistance varying along the surface is investigated. An analytical-numerical approach is proposed to solve a set of nonlinear singular integro-differential equations to which the contact problem has been reduced. The influence of the thermal conductivity of the gap filler on the height of the gap and contact pressure is analysed.

Keywords: thermoelastic delamination, thermal resistance, intercontact gap, heat-permeable filler, thermal distortivity.