ISSN 2079–1836
2012, вип. 19

УДК 539.4

М. М. Кундрат, д-р техн. наук, Ю. В. Мельник

ЛОКАЛЬНЕ РУЙНУВАННЯ В ПЛАСТИНІ З ГНУЧКИМ ПРУЖНИМ ПІДКРІПЛЕННЯМ

Запропоновано математичну модель для аналізу напружено-деформованого стану в задачі Мелана для півплощини з пружною накладкою, яка передбачає двофазну зону передруйнування. Задача зведена до сингулярного інтегрального рівняння, яке в класі функцій необмежених на кінцях інтервалу розв'язано методом колокацій. Отримано фізично коректні обмежені напруження та деформації в усіх точках композиції, що задовольняють також і закону парності дотичних напружень. Для різних значень рівнів навантаження обчислено довжину зони передруйнування, розподіл контактних напружень.

Ключові слова: *напівнескінченна пластина, накладка, навантаження, зона передруйнування, інтегральне рівняння, контактні напруження, осьові зусилля.*

Вступ. Задача розрахунку підкріплюючих елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій, зважаючи на те, що велика кількість важливих матеріаломістких конструкцій України (мости, трубопроводи, технологічні установки тощо) близька до вичерпання свого проектного ресурсу, залишається не дослідженою. Необхідна наукова експертиза можливості їх безпечної експлуатації і визначення засобів рентабельного продовження функціонування. Використовувані для цього підкріплюючі елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень і спричиняють нелінійні та пластичні деформації, що в значній мірі ускладнює розрахунок таких композицій.

Задача для пластини з приєднаним по всій довжині безмежно довгим ребром вперше розв'язана в праці Е. Мелана [14]. Присутня в таких постановках задач, які в літературі отримали назву задачі Мелана, сингулярність контактних напружень в околах кінців підкріплення в явному вигляді виділена у статті Н. Арутюняна [2]. Задача для періодичної системи накладок сформульована та розв'язана в праці [3]. Дослідження та огляд контактної задачі Мелана для пружного тіла виконано в монографіях Н. Мусхелішвілі [10], А. Каландії [5], Е. Григолюка, В. Толкачова [4], Г. Попова [11], В. Саркісяна [12], В. Александрова, С. Мхітаряна [1], Г. Сулима [13] та широкому колі праць. Використовувані в них підходи розглядали досить ідеалізовані схеми, які не враховували можливостей виникнення в області країв накладки зон ослабленого контакту з пластиною.

Вплив малих зон пластичності матеріалу ізотропної півплощини в околах країв накладки на розподіл контактних напружень досліджувався в працях Ю. Кудишина [6, 7] з використанням ітераційного методу пружних розв'язків

О. Ільюшина. Для числового прикладу була взята м'яка сталь типу Ст. 3 з необмеженою по деформаціям площадкою текучості. У паралельному до краю напрямі пластина рівномірно розтягувалася заданими напруженнями. В такій постановці було отримано більш прийнятні обмежені напруження в околах кінців підкріплюючого ребра, а найбільших значень пластичні деформації досягали в околах завантажених кінців. Інша розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану та граничної рівноваги в півплощині з нерозтягливою чи пружною накладкою запропонована в працях М. Кундрата [8, 9], яка дала можливість уникнути сингулярності напружень в околах країв накладок та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції. Нижче цю модель застосовано до розв'язання задачі для півнескінченної пластини, підкріпленої пружною абсолютно гнучкою кінцевої міцності на розрив накладкою. Аналіз такої задачі дає можливість також оцінити межі пружних характеристик пластини та підкріплення, для яких застосовні результати, отримані для нерозтягливих накладок.

Постановка задачі. За умов плоскої задачі теорії пружності розглядаємо ізотропну півнескінченну пластину, вільна поверхня якої підкріплена пружною гнучкою накладкою завдовжки $2a$ (рис. 1) та малої порівняно з довжиною сталої товщини *h*. $E_f > E$ – модуль пружності накладки більший від такого ж для пластини. Пластина розтягується на нескінченності напруженнями

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q \tag{1}$$

паралельно до її краю, а накладка по своїй верхній границі навантажена тангенціальними напруженнями $\tau_+(x)$ і одночасно на кінцях зосередженими силами величиною Q_1 та Q_2.

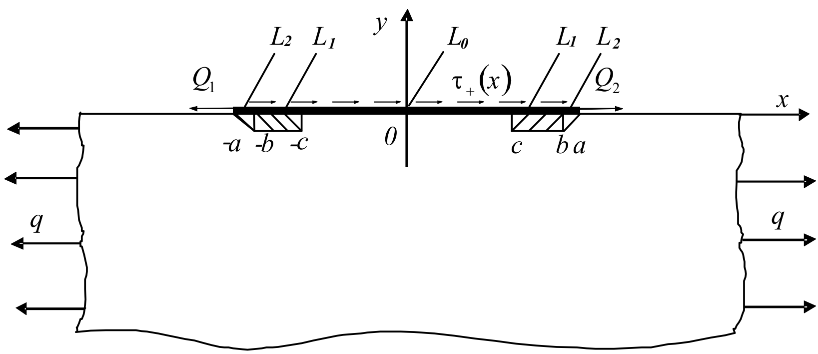

Рис. 1 – **Напівнескінченна пластина підкріплена накладкою**

З аналізу пружних розв'язків відповідної задачі випливає, що найбільша концентрація напружень має місце в околах кінців накладки. Вважаємо, що саме під кінцями накладки зароджуються локалізовані зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини вздовж межі з’єднання пластина-накладка, і складаються з двох частин: ділянок пластичного деформування та розпушення.

На ділянках нелінійного зв’язку між напруженнями і деформаціями $(x \in L_1)$ дотичні напруження прийняті сталими і рівними своєму граничному значенню τ_s^*

$$\tau_{xy}(x) = \chi \tau_s^* sign(x), \ (x \in L_1). \tag{2}$$

На ділянках розпушення $(x \in L_2)$ дотичні напруження лінійно зростають від нуля до граничного значення

$$\tau_{xy}(x) = \chi \tau_s^* \frac{a - |x|}{a - b} sign(x), \ (x \in L_2). \tag{3}$$

Тут χ – параметр, значення якого залежить від напряму дії зсувних контактних напружень в околах кінців накладки $(x = \pm a)$ і залежно від умов зовнішнього навантаження розглядуваної композиції приймає значення $+1$ або -1. Зокрема, за переважаючої дії розтягувальних напружень прикладених до пластини $(q > 0)$ приймаємо $\chi = 1$, а за переважаючої дії розтягуючих сил прикладених до накладки $(Q > 0)$ – $\chi = -1$. Відповідно при $q < 0$ $(Q = 0)$ приймаємо $\chi = -1$, а при $Q < 0$ $(q = 0)$ – $\chi = 1$. За одночасного розтягування пластини та накладки вибір значення параметра χ залежить від їх співвідношення та пружних характеристик складових системи і вимагає окремого дослідження розв’язку задачі.

Параметр τ_s^* трактуємо як теоретичну або як технічну адгезійну зсувну міцність контактної межі пластина-накладка, а при пластичному деформуванні – як її зсувний поріг пластичності. При досягненні взаємними переміщеннями матеріалу контактної межі в таких зонах певної границі зв’язок між матеріалами може порушуватися, тобто накладка в її кінцевих областях відшарується від пластини.

Розглянемо окремо деформації накладки та пластини на межі з’єднання і за їх результатами побудуємо інтегральне рівняння. Для довільного перерізу накладки з координатою x деформації [4]

$$\frac{\partial u^f(x)}{\partial x} = \varepsilon_{xx}^f = \frac{1}{hE_f}\left[\int_x^c \tau_{xy}(t)dt + \int_x^c \tau_+(t)dt + \frac{\tau_s^*}{2}(a + b - 2c) + Q_2\right], x \in [-c, c]. \tag{4}$$

Загальний розв’язок основних задач теорії пружності для півплощини відомий і поданий, зокрема, у монографії М. Мусхелішвілі [10]. За результатами цієї праці та врахування крайових умов задачі і навантаження отримаємо вираз для деформації вільного краю пластини:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x}=\frac{\kappa+1}{4G}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau_{xy}(t)}{t-x}dt+\frac{q}{2}\right],\ x\in[-a,a]. \qquad (5)$$

Умова рівності деформацій між накладкою і пластиною згідно (1)–(5) породжує сингулярне інтегральне рівняння стосовно контактних напружень $\tau_{xy}(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\tau_{xy}(t)dt}{t-x}+\frac{1}{2h\lambda_0}\int_{x}^{c}\tau_{xy}(t)dt+\int_{x}^{c}\tau_{+}(t)dt+\tau_s^*\left[\frac{a+b-2c}{4h\lambda_0}-\frac{1}{\pi}g(x)\right]+$$
$$+\frac{Q_2}{2h\lambda_0}-\frac{q}{2}=0,\quad x\in[-c,c], \qquad (6)$$

де $g(x)=\frac{1}{a-b}\left((a+x)\ln\frac{b+x}{a+x}-(a-x)\ln\frac{a-x}{b-x}\right)+\ln\frac{c^2-x^2}{b^2-x^2}+2$, $\lambda_0=E_f/E$.

Одночасно з рівнянням виконуються умова загальної рівноваги накладки

$$\int_{-a}^{a}\tau_{xy}(t)dt=Q_2-Q_1 \qquad (7)$$

та умова обмеженості контактних напружень в околах вершин зон передруйнування $x=\pm c$ (що одночасно є і умовою для обчислення довжини зон)

$$\tau_{xy}(\pm c)=\tau_s^*. \qquad (8)$$

Проведемо числове дослідження отриманої системи рівнянь (6)–(8) за умови розтягування накладки зосередженими силами $Q_1=Q_2=Q$. Для цього обезрозміримо рівняння увівши нові змінні y,τ способом $x=cy;\ t=c\tau$ та означимо відносні довжини для ділянок розпушення $\gamma=(a-b)/a$ і загальної довжини зони передруйнування $\varepsilon=(a-c)/a$. Вираз для напружень $\tau_{xy}(y)$ подаємо у вигляді ряду за многочленами Чебишева першого роду $T_n(y)=\cos(n\arccos(y))$ з виділеною кореневою особливістю та невідомими коефіцієнтами b_n . Отримуємо безмежну систему нелінійних рівнянь стосовно невідомих довжини зони передруйнування ε та коефіцієнтів b_n, яку розв'язували методом редукції.

За результатами їх розв'язання на рис. 2 подано залежності відносної довжини зони передруйнування ε від параметра навантаження $Q_s=Q/(2\tau_s^*a)$. Для ліній 1, 2, 3 відносна жорсткість $\lambda_0=10/3$, ліній 4, 5, 6 – $\lambda_0=10$, 7, 8, 9 – $\lambda_0=20$. Параметр $\gamma=0{,}1$ відповідає лініям 1, 4, 7, $\gamma=0{,}05$ – 2, 5, 8, $\gamma=0{,}0001$ – 3, 6, 9.

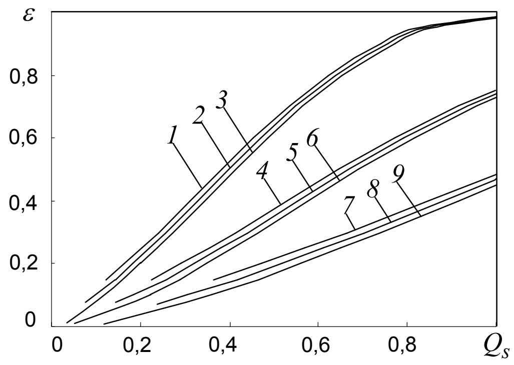

Рис. 2 – **Довжина зон передруйнування**

Помітно, що із збільшенням жорсткості накладки довжина локалізованих зон передруйнування зменшується за інших однакових умов. Збільшення довжини ділянки розпушення дещо видовжує зону передруйнування, хоча сама область нелінійного деформування при цьому зменшується. За наперед заданої довжини ділянки розпушення загальна довжина зони передруйнування не може бути меншою і, отже, це передбачає деяке мінімальне навантаження, за якого починається розвиток ділянки нелінійного деформування. Це відповідає обриву ліній на рис. 2 в околі початку координат.

На рис. 3 подано знерозмірені контактні напруження $\widetilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \Big/ \left(\tau_s^*\right)$ уздовж правої половини накладки (на лівій вони симетричні і з протилежним знаком) при фіксованому навантаженні $Q_s = Q \Big/ \left(2\tau_s^* a\right)$=0,15 та жорсткості накладки $\lambda_0 =$ 10/3: для лінії 1 параметр $\gamma =$ 0,1 ($\varepsilon =$ 0,182279); для 2 – $\gamma =$ 0,05 ($\varepsilon =$ 0,157342); для 3 – $\gamma =$ 0,0001 ($\varepsilon =$ 0,132818).

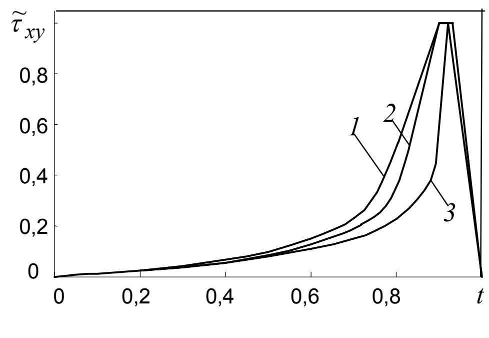

Рис. 3 – **Розподіл напружень під накладкою**

Більша частина навантаження передається на накладку в околах країв на ділянках розпушення та нелінійного деформування, поза околом зон передруйнування дотичні напруження швидко зменшуються. Збільшення жорсткості накладки при фіксованому навантаженні зменшує і зону передруйнування і величину зсувних напружень за межами зони. Зміна довжини ділянки розпушення впливає на перерозподіл напружень лише в самій зоні передруйнування та її незначному околі.

Висновки. Запроваджено двофазну зону передруйнування (ослабленого контакту) у композиції з накладками, що дало можливість уникнути сингулярності напружень в околах країв накладок та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції. Більша частина навантаження на накладку передається в околах її країв.

Підтверджено існування області на середині підкріплень, де значення дотичних напружень та розривних осьових зусиль змінюється незначно. Це вказує про можливість одночасного множинного поперечного розтріскування підкріплюючих елементів у даній зоні.

Отримані результати свідчать, що урахування пружних властивостей підкріплення істотно впливає на його контактну взаємодію з пластиною, а також на її напружений стан. Розрахунок композиції з використанням моделі абсолютно нерозтягливого підкріплення, безумовно, створює запас міцності конструкції, однак цей запас може виявитися надто великим. З іншого боку саме модель пружної накладки адекватна спостережуваному множинному руйнуванню довгих накладок.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Александров В. М.*** Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 488 с.

2. ***Арутюнян Н. Х.*** Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением / Н. Х. Арутюнян // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, вып. 4. – С. 632−646.

3. ***Арутюнян Н. Х.*** Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругим креплением / Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 5. – С. 813−843.

4. ***Григолюк Э. И.*** Контактные задачи теории пластин и оболочек / Є. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М. : Машиностроение, 1980. – 411 с.

5. ***Каландия А. И.*** Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М. : Наука, 1973. – 303 с.

6. ***Кудишин Ю. И.*** Контактная задача о подкреплении бесконечной плоскости стрингером с учетом пластических свойств материала / Ю. И. Кудишин // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 4. – С. 83−92.

7. ***Кудишин Ю. И.*** Задача о подкреплении полуплоскости ребром с учетом пластических свойств материала / Ю. И. Кудишин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – № 2. – С. 25−28.

8. ***Кундрат М. М.*** Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою М. М. Кундрат // Вісн. РДТУ. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Спецвипуск. – Рівне, 1999. – С. 200−204.

9. ***Кундрат М. М.*** Термопружна рівновага півбезмежної пластини з жорсткою гнучкою накладкою / М. М. Кундрат // П'ятий українсько-польський науковий симпозіум "Актуальні задачі механіки неоднорідних структур" (Львів-Луцьк, 18−23 вересня 2003 р.): тези доп. − Львів : ЛДУ, 2003. – С. 54–55.

10. ***Мусхелишвили Н. И.*** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

11. ***Попов Г. Я.*** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.

12. ***Саркисян В. С.*** Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками / В. С. Саркисян. – Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.

13. ***Сулим Г. Т.*** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.

14. ***Melan E.*** Ein Beitrag zur Theoric geschweisster Verbindungen / E. Melan // Ingenieur – Archiv. – 1932. − Bd. 3. – Heft 2. – P. 123−129.

Національний університет
водного господарства
та природокористування,
Рівне, Україна

Надійшла до редколегії 01.03.2012

М. М. Кундрат, д-р техн. наук, Ю. В. Мельник

ЛОКАЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ В ПЛАСТИНЕ С ГИБКИМ УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ

Предложена математическая модель для анализа напряженно-деформированного состояния в задаче Мелана для полуплоскости с накладкой, предусматривающая двуфазность зоны предразрушения. Задача сведена к сингулярному интегральному уравнению, которое в классе функций неограниченных на концах интервала решено методом коллокаций. Получены физически корректные ограниченные напряжения и деформации во всех точках композиции, которые удовлетворяют также и закону четности касательных напряжений. Для различных значений уровней нагрузки вычислено длину зоны предразрушения, распределение контактных напряжений.

Ключевые слова: *полубесконечная пластина, накладка, нагрузка, зона предразрушения, интегральное уравнение, контактные напряжения, осевые усилия.*

M. M Kundrat, Professor, Ju. V. Melnik

LOCAL FRACTURE OF HALF-PLANE WITH ELASTIC FLEXIBLE REINFORCEMENT

The mathematical model for analysis the stressed-strained state in Melan's problem for half-plane with a stiffener, which provides the two-segment zone of prefracture is presented. The problem is transformed to singular integral equation and solved in the class of unlimited functions on the ends of interval. Physically correct limited stresses and deformations are received in all points of a composition. Tangents stresses also satisfy to relationship of pair law. Lengths of zones of prefracture, distribution of contact stress under reinforcement and axial stress in reinforcement are defined.

Keywords: *semi-infinite plate, reinforcement, loading, zone of prefracture, integral equation, contact stresses, axial stress.*