

УДК 539.3

*В. К. Опанасович, канд. фіз.-мат. наук,
І. С. Звізло, М. С. Слободян, канд. фіз.-мат. наук*

ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З КРУГОВОЮ ШАЙБОЮ ТА ДОВІЛЬНО РОЗТАШОВАНОЮ ТРІЩИНОЮ ВСЕРЕДИНІ ШАЙБИ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

Досліджена задача згину кусково-однорідної ізотропної пластини з круговою шайбою та довільно розташованою тріщиною всередині шайби з урахуванням гладкого контакту берегів тріщини. Використовуючи метод теорії функцій комплексної змінної, розв'язування задачі звелось до побудови розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь на тріщині, яка розв'язана чисельно. Умови ідеального механічного контакту на круговій межі поділу матеріалів вдалось задовільними аналітично. Проведено числовий аналіз задачі.

Ключові слова: тріщина, згин, плоска задача, шайба, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

Вступ. Конструкційні пластинчасті елементи широко застосовуються у машинобудуванні, приладобудуванні, будівельній індустрії та інших галузях техніки. Із конструкційних міркувань вони можуть містити кругові пружні включення, у яких під час виготовлення і експлуатації можуть виникнути та розвинути тріщини. Під дією зовнішнього навантаження в таких пластинчастих елементах біля тріщин виникає висока концентрація напружень, яка спричиняє пластичне деформування та загальне зменшення міцності. Дослідження згину кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною або круговою межею поділу матеріалів та тріщиною з урахуванням контакту її берегів проведено у публікаціях [2, 3].

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$, яка складається з пластини з круговим отвором радіуса R , в який впаєна шайба того ж самого радіуса, а на межі поділу матеріалів виконуються умови ідеального механічного контакту. Вважаємо, що пластина знаходиться під дією розподілених згинальних моментів на нескінченності. Крім того, в шайбі наявна довільно розташована наскрізна прямолінійна тріщина, береги якої під дією зовнішнього навантаження приходять у гладкий контакт по лінії на одній з основ пластини, причому береги тріщин були вільні від зовнішнього навантаження. Потрібно визначити напружено-деформований стан пластини.

В середній площині пластини виберемо декартову систему координат $Ox\bar{z}$ з початком координат у центрі кругової шайби, направивши вісь $O\bar{z}$

перпендикулярно до серединної площини. З тріщиною завдовжки $2l$ зв'язуємо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ з початком координат у центрі тріщини, направивши вісь O_1x_1 по ній, яка утворює кут α з віссю Ox . Область в середині шайби позначимо через $S_1(S^+)$, зовні – $S_2(S^-)$. Будемо користуватись полярною системою координат r, θ з полюсом у точці O і полярною віссю Ox . Відрізки дійсної осі $O_1x_1y_1$, для яких $|x_1| < l$, позначимо L_1 , x_{01}, y_{01} – координати центру тріщини у глобальній системі координат Oxy , причому $z_{01} = x_{01} + iy_{01}$ – комплексна координата цього центру. Граничним значенням відповідних величин при $y_1 \rightarrow \pm 0$ або $r \rightarrow R \pm 0$ будемо приписувати значки “+” і “-” відповідно. Параметрам пов'язаним із шайбою будемо приписувати індекс “1”, а для матриці – індекс “2”. Надалі індекс j набуває значень 1 і 2.

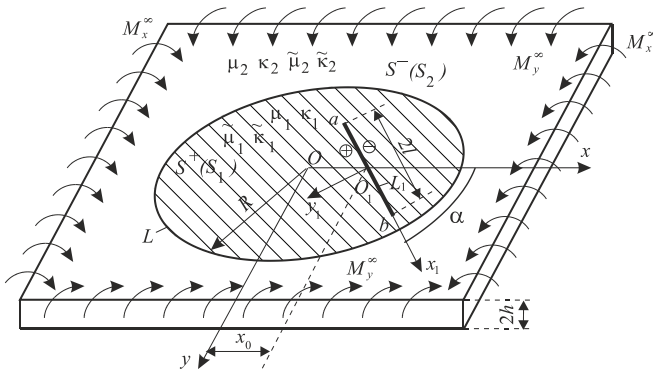


Рис. 1 – Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Оскільки під дією згинальних моментів M_x^∞ і M_y^∞ береги тріщин контактують, то розв'язку задачі розбиваємо на дві задачі: плоску задачу і задачу згину, де користуємось класичною теорією згину пластин.

Згідно постановки задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{y_1 y_1}^{(1)\pm} = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1 y_1}^{(1)\pm} = 0, \quad x_1 \in L_1; \quad (1)$$

$$P_{y_1}^{(1)\pm} = 0, \quad M_{y_1}^{(1)\pm} = hN, \quad \left[\partial_{x_1} v_P^{(1)} \right] + h \left[\partial_{x_1 y_1}^2 w^{(1)} \right] = 0, \quad x_1 \in L_1; \quad (2)$$

$$P_r^{(1)} = P_r^{(2)}, \quad M_r^{(1)} = M_r^{(2)}, \quad w^{(1)} = w^{(2)}, \quad \partial_r w^{(2)} = \partial_r w^{(2)} \quad \text{на } L; \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{rr}^{(2)}, \quad \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}, \quad u_{rP}^{(1)} = u_{rP}^{(2)}, \quad u_{\theta P}^{(1)} = u_{\theta P}^{(2)} \quad \text{на } L; \quad (4)$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{y_1 y_1}^{(j)}$, $\sigma_{x_1 y_1}^{(j)}$ і $\sigma_{rr}^{(j)}$, $\sigma_{r\theta}^{(j)}$ – компоненти тензора напружень, а $u_p^{(j)}$, $v_p^{(j)}$ і $u_{rp}^{(j)}$, $u_{\theta p}^{(j)}$ – компоненти вектора переміщення точки у плоскій задачі; $P_{y_1}^{(j)}$ і $P_r^{(j)}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $M_{y_1}^{(j)}$ і $M_r^{(j)}$ – згинальний момент; $w^{(j)}$ – прогин пластини. Квадратні дужки у формулі (2) вказують на стрибок відповідної величини на берегах тріщини.

Побудова розв'язку. Із використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [1] і класичної теорії згину пластин [4] розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на основі яких отримано системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини у задачі згину та стрибків переміщень на берегах тріщин у плоскій задачі, яка має вигляд:

$$\operatorname{Im} \int_{-1}^1 \left\{ R(\eta, \varepsilon) G(\eta) + S(\eta, \varepsilon) \overline{G(\eta)} \right\} d\eta = 0, \quad G_1(\eta) + \frac{1 + \tilde{\kappa}_1}{(1 + \tilde{\kappa}_1)(1 + \nu_1)} Y_2(\eta) = 0;$$

$$\operatorname{Im} \int_{-1}^1 \left\{ K(\eta, \varepsilon) Y(\eta) + L(\eta, \varepsilon) \overline{Y(\eta)} \right\} d\eta = c' + \operatorname{Im} P(\varepsilon); \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \int_{-1}^1 \left\{ K(\eta, \varepsilon) Y(\eta) + L(\eta, \varepsilon) \overline{Y(\eta)} + 2R(\eta, \varepsilon) G(\eta) + 2S(\eta, \varepsilon) \overline{G(\eta)} \right\} d\eta = \operatorname{Re} P(\varepsilon),$$

де

$$R(\eta, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{A_4 \eta}{\lambda^2 (1 - A_4)} \left(2A_4 + (A_4 - 1) \frac{\lambda^2 e^{-2i\alpha}}{\bar{X}^2} \right) + \frac{A_4 e^{i\alpha}}{T} \left(1 + \frac{\lambda^2 e^{-2i\alpha}}{\bar{X}^2} \right) + e^{i\alpha} (T - X)^{-1} + e^{-i\alpha} (\bar{T} - \bar{X})^{-1} + A_3 \lambda^2 e^{-i\alpha} \bar{X}^{-1} T_1^{-1} - A_4 e^{i\alpha} (\bar{T} \bar{T}_1^{-1} + \lambda^2 T_1^{-2} (1 + \lambda^2 \bar{X}^{-2} e^{-2i\alpha})) (\lambda^2 T^{-1} - \bar{T}) - 2\lambda^2 T e^{-2i\alpha} (X - \lambda^2 \bar{X}^{-1}) (\lambda^2 T^{-1} - \bar{T}) T_1^{-3} \right\};$$

$$S(\eta, \varepsilon) = \frac{e^{-i\alpha}}{2\pi} \left\{ \frac{A_4}{\bar{T}} + \frac{1}{\bar{T} - \bar{X}} - \frac{T - X}{\bar{T} - \bar{X}} e^{-2i\alpha} - A_4 \left(\lambda^2 (\lambda^2 T^{-1} - \bar{T}) \bar{T}_1^{-2} + (1 + \lambda^2 e^{-2i\alpha} \bar{X}^{-2}) T T_1^{-1} - T^2 T_1^{-2} e^{-2i\alpha} (X - \lambda^2 \bar{X}^{-1}) \right) + \right.$$

$$+ A_4 \eta e^{i\alpha} \lambda^{-2} (1 - A_4)^{-1} \left(2A_4 + \lambda^2 e^{-2i\alpha} \bar{X}^{-2} (A_4 - 1) \right) \Big\};$$

$$K(\eta, \varepsilon) = \frac{-i}{2\pi\tilde{\mu}_1} \left\{ \frac{\eta}{2\lambda^2} \left(\tilde{D}_{21} (1 - \tilde{\kappa}_1) + \tilde{D}_{61} e^{-2i\alpha} \frac{\lambda^2}{\bar{X}^2} \right) - \tilde{\kappa}_1 e^{i\alpha} \left(\frac{1}{T - X} + \frac{\tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 \bar{T}}{\bar{T}_1} \right) - \right. \\ \left. - \tilde{A}_4 e^{i\alpha} \left(\lambda^2 T_1^{-2} \left(\lambda^2 T^{-1} - \bar{T} \right) - T^{-1} \right) + 2\lambda^2 \tilde{A}_4 T X e^{-i\alpha} T_1^{-3} \left(\lambda^2 T^{-1} - \bar{T} \right) + e^{-i\alpha} \times \right. \\ \left. \times \left(\lambda^2 \bar{X}^{-2} \left(\tilde{A}_3 \bar{X} T_1^{-1} - \tilde{A}_4 \left(-T^{-1} + \lambda^2 T_1^{-3} \left(3T\bar{X} - \lambda^2 \right) \left(\lambda^2 T^{-1} - \bar{T} \right) \right) \right) \right) - \tilde{\kappa}_1 \left(\bar{T} - \bar{X} \right)^{-1} \right\};$$

$$L(\eta, \varepsilon) = 0.5i(\pi\tilde{\mu}_1)^{-1} \left\{ \lambda^2 \tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 e^{-i\alpha} \bar{T}_1^{-2} \left(\lambda^2 T^{-1} - \bar{T} \right) - \tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 T^{-1} e^{-i\alpha} + e^{-i\alpha} \left(\bar{T} - \bar{X} \right) + \right. \\ \left. + \tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 T_1^{-1} T e^{-i\alpha} + e^{-3i\alpha} X \left(\left(\bar{T} - \bar{X} \right)^{-2} - \tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 T^2 T_1^{-2} \right) - T e^{-3i\alpha} \left(\bar{T} - \bar{X} \right)^{-2} + \right. \\ \left. + \tilde{A}_4 \tilde{\kappa}_1 \lambda^2 T e^{-3i\alpha} \bar{X}^{-2} \left(\bar{T}_1^{-1} + T \bar{X} \bar{T}_1^{-2} \right) + 0.5\eta \lambda^{-2} \left(\tilde{D}_{31} (1 - \tilde{\kappa}_1) + \tilde{D}_{61} \lambda^2 \bar{X}^{-2} e^{-2i\alpha} \right) \right\};$$

$$P(\varepsilon) = -\Gamma_2 \tilde{\mu}_1^{-1} \left\{ \left(1 - \tilde{g}^{-1} \tilde{A}_3 \right) \left(1 - \tilde{A}_4 \right)^{-1} (1 - \tilde{\kappa}_1) + \left(1 + \tilde{g} \tilde{A}_4 \right) e^{-2i\alpha} \right\};$$

$$T = X_0 + \eta e^{i\alpha}, \quad X = X_0 + \eta e^{i\alpha}, \quad X_0 = x_0/l, \quad \eta = x_1/l, \quad \varepsilon = x_1/l;$$

$$\rho = \frac{M_x^\infty}{M_y^\infty}, \quad \tilde{n} = \frac{E_2}{E_1}, \quad \lambda = \frac{R}{l}, \quad T_1 = \bar{X}T - \lambda^2, \quad \mu_1 = \frac{1}{2(1+\nu_1)}, \quad \mu_2 = \frac{\tilde{n}}{2(1+\nu_2)};$$

$$\kappa_1 = \frac{3-\nu_1}{1+\nu_1}, \quad \tilde{\kappa}_1 = \frac{3+\nu_1}{1-\nu_1}, \quad \tilde{\mu}_j = \frac{1}{2D_j(1-\nu_j)}, \quad D_1 = \frac{2}{3(1-\nu_1^2)}, \quad D_2 = \frac{2\tilde{n}}{3(1-\nu_2^2)};$$

$$A_1 = \mu_1 + \mu_2 \kappa_1, \quad A_2 = \mu_2 + \mu_1 \kappa_2, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{\mu}_2 + \tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2;$$

$$g = -A_1/A_2, \quad \tilde{g} = -\tilde{A}_1/\tilde{A}_2, \quad A_4 = (\mu_2 - \mu_1) A_1^{-1}, \quad \tilde{A}_4 = (\tilde{\mu}_2 - \tilde{\mu}_1) \tilde{A}_1^{-1};$$

$$A_3 = A_2^{-1} (\mu_1 \kappa_2 - \mu_2 \kappa_1), \quad \tilde{A}_3 = \tilde{A}_2^{-1} (\tilde{\mu}_1 \tilde{\kappa}_2 - \tilde{\mu}_2 \tilde{\kappa}_1), \quad A_5 = \mu_2 A_1^{-1} (1 + \kappa_1);$$

$$\Gamma_2 = -\frac{1+\rho}{4D_2(1+\nu_2)}, \quad D_3 = \frac{1-A_3 g^{-1}}{1-A_4^2}, \quad \tilde{D}_{31} = \frac{\tilde{A}_4^2 (1-\tilde{\kappa}_1)}{1-\tilde{A}_4}, \quad \tilde{D}_{61} = \tilde{A}_4 (\tilde{\kappa}_1 - 1);$$

$$y(x) E_1 h^3 / M_y^\infty = Y(x) = Y_1(x) + iY_2(x), \quad y(x) = (1 + \tilde{\kappa}_1)^{-1} \left[\partial_x w^{(1)} + i\partial_y w^{(1)} \right];$$

$$\frac{h^2 g'(x)}{M_y^\infty} = G(x) = G_1(x) + iG_2(x), \quad g'(x_1) = \frac{2\mu_1}{i(1+\kappa_1)} \left[\partial_{x_1} (u_{II} + iv_{II}) \right].$$

Систему рівнянь (3) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_1^1 Y(\eta) d\eta = 0, \quad \int_1^1 G(\eta) d\eta = 0, \quad \int_1^1 \eta Y_2(\eta) d\eta = 0, \quad (6)$$

де перші дві умови виражають собою відповідно однозначність кутів повороту у задачі згину та однозначність переміщень у плоскій задачі при обході контура тріщини, а остання – однозначність прогину при обході контура тріщини. Умови ідеального механічного контакту на круговій межі поділу матеріалів (3)–(4) вдалося задовольнити аналітично.

Контактне зусилля між берегами тріщини та коефіцієнти інтенсивності моментів (KIM) K та зусиль (KIZ) k можна обчислити за формулами [5]:

$$N^* = 2 \operatorname{Re} \int_{-1}^1 \left\{ R(\eta, \varepsilon) G(\eta) + S(\eta, \varepsilon) \overline{G(\eta)} \right\} d\eta;$$

$$k = \mp \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x) g'(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)} / l;$$

$$K = \pm 2E_1 h^3 (3 + \nu_1) \left(3(1 - \nu_1^2) \right)^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x) Q(x)).$$

Числовий аналіз та висновки. Система сингулярних інтегральних рівнянь (5), (6) розв'язана чисельно з використанням методу механічних квадратур [5] при $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$.

На рис. 2, а наведено графічну залежність зведеного контактного зусилля між берегами тріщини N^* від $\varepsilon = x_1/l$ при $X_0 = x_0/l = 2$, $\rho = M_x^\infty / M_y^\infty = 1$, $\lambda = R/l = 4$, $\alpha = 30^\circ$. Крива 1 отримана при $\beta = \lg E_1/E_2 = -1$, крива 2 – при $\beta = -0,5$, крива 3 – при $\beta = 0$, крива 4 – при $\beta = 0,5$, крива 5 – при $\beta = 1$. При $\beta < 0$ контактне зусилля у вершині a ($\xi = -1$) є більшим ніж у вершині b ($\xi = 1$), а при $\beta > 0$ контактне зусилля у вершині a ($\xi = -1$) є меншим ніж у вершині b ($\xi = 1$). При зростанні жорсткості шайби по відношенню до матриці і при $\beta < 0$ контактне зусилля між берегами тріщини зростає, а при $\beta > 0$ воно спочатку зростає, а потім спадає. На рис. 2, б–г отримано графічну залежність KIM $K^* = K / (M_y^\infty \sqrt{l}) = K_1^* + iK_2^*$, і KIZ

$k^* = hk / (M_y^\infty \sqrt{l}) = k_1^* + ik_2^*$ від α при $X_0 = 2, \lambda = 4, \rho = 1$. Криві 1 побудовані при $\beta = \lg E_1/E_2 = -1$, криві 2 – при $\beta = -0,5$, криві 3 – при $\beta = 0$, криві 4 – при $\beta = 0,5$, криві 5 – при $\beta = 1$. Бачимо, що КІМ K_2 та КІЗ k_2 у точці a при $\beta < 0$ є від'ємними, а при $\beta > 0$ – додатні. Як впливає з (2), має місце залежність $k_1^*/K_1^* = 3(1+\nu_1)/(3+\nu_1)$, тому графічних залежностей для k_1^* не наводимо.

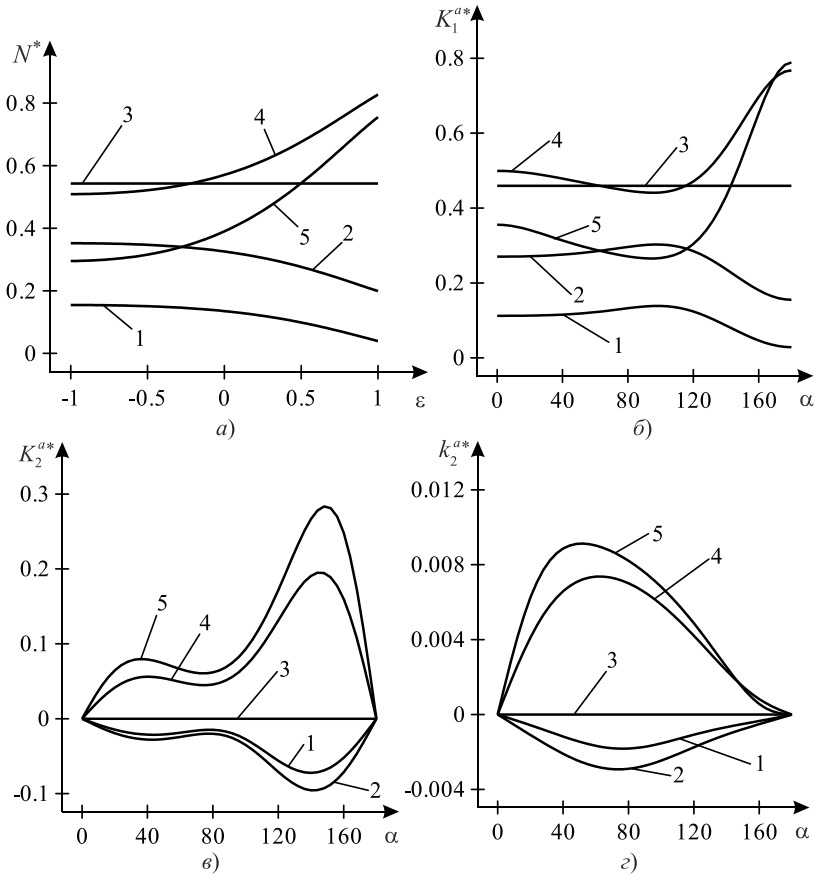


Рис. 2 – Графічна залежність контактної зусилля між берегами тріщини (а) та коефіцієнтів інтенсивності моментів (б і в) і зусиль (г)

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

2. **Опанасович В.** Двосторонній згин ізотропної кусково-однорідної пластини з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням контакту берегів / В. Опанасович, І. Звізло // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: зб. наук. праць. – Львів : Каменяр. – 2009. – Вип. 8. – С. 63–78.

3. **Опанасович В. К.** Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів / В. К. Опанасович, І. С. Звізло, І. М. Яцик // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2007. – Вип. 11, Т. 2. № 2/2. – С. 141–148.

4. **Прусов И. А.** Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов. – Минск : Изд-во Беларус. ун-та. – 1975. – 256 с.

5. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – К. : Наук. думка. – 1988. – 324 с.

*Львівський національний університет
ім. Івана Франка,
Львів, Україна*

Надійшла до редколегії 01.03.2012

*В. К. Опанасович, канд. физ.-мат. наук,
И. С. Звизло, М. С. Слободян, канд. физ.-мат. наук,*

ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВОЙ ШАЙБОЙ И ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЙ ТРЕЩИНОЙ ВНУТРИ ШАЙБЫ С УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Исследована задача об изгибе кусочно-однородной изотропной пластины с круговой шайбой и произвольно расположенной трещиной внутри шайбы с учетом гладкого контакта берегов трещины. Используя метод теории функций комплексной переменной, решение задачи свелось к построению решения системы сингулярных интегральных уравнений на трещине, которая решена численно. Условия идеального механического контакта на круговой границе раздела материалов удалось удовлетворить аналитически. Проведен численный анализ задачи.

Ключевые слова: трещина, изгиб, плоская задача, шайба, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности усилий и моментов.

*V. K. Opanasovych, Associate Professor,
I. S. Zvizlo, M. S. Slobodyan, Associate Professor*

BENDING OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR PLATE AND AN ARBITRARILY LOCATED CRACK INSIDE THE WASHER WITH TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ITS SHORES

The problem of bending of piecewise-homogeneous isotropic plate with a circular plate and an arbitrarily located crack inside the washer with a taking into account the contact crack is investigated. Using the method of complex variable theory, the solution was reduced to the construction of solutions of singular integral equations on the crack, which is solved numerically. The conditions of ideal mechanical contact on a circular boundary materials could satisfy analytically.

Keywords: crack, bending, plane problem, washer, complex potentials, the contact force intensity factors of forces and moments.