

УДК 539.3

Э. И. Старовойтов, д-р физ.-мат. наук,  
Д. В. Леоненко, канд. физ.-мат. наук,  
Е. Э. Старовойтова, канд. физ.-мат. наук

## КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ТЕРМОРАДИАЦИОННОМ УДАРЕ

Исследованы симметричные поперечные колебания упругой трехслойной круговой пластины при терморadiационном ударе. Пластина связана с безынерционным основанием Винклера. Для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгоффа, в легком заполнителе деформированная нормаль прямолинейна и несжимаема. Получены аналитические решения, проведен их численный анализ.

*Ключевые слова:* трехслойная пластина, колебания, терморadiационный удар, упругое основание.

**Введение.** В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. Квазистатическое деформирование трехслойных стержней и пластин, покоящихся на упругом основании, рассмотрено в [3]. Задача об изотермических колебаниях круговой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием, решена в [2].

**Постановка задачи.** Расчеты проводятся в цилиндрической системе координат (рис. 1). Для изотропных несущих слоев толщиной  $h_1$ ,  $h_2$  приняты гипотезы Кирхгоффа. Несжимаемый по толщине заполнитель ( $h_3 = 2c$ ) легкий, т. е. в нем пренебрегаем работой касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  в тангенциальном направлении. Деформированная нормаль заполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ . На границах слоев – перемещения непрерывны.

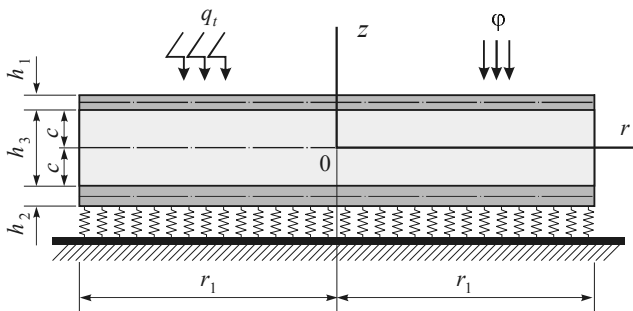


Рис. 1 – Расчетная схема трехслойной пластины при терморadiационном ударе

На контуре пластины – жёсткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев. В силу симметрии тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют, а прогиб пластины  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от угловой координаты. Далее эти функции  $w(r,t)$ ,  $\psi(r,t)$ ,  $u(r,t)$  считаем искомыми.

Пусть в начальный момент времени к внешней поверхности рассматриваемой шарнирно опертой пластины, связанной с упругим основанием Винклера, внезапно подводится тепловой поток плотностью  $q_t$  и падает нейтронный поток интенсивностью  $\varphi_0$  в направлении, противоположном внешней нормали. Нижняя поверхность и контур пластины теплоизолированы. Это позволяет возбуждаемое нестационарное и неоднородное температурное поле  $T(z,t)$  в пластине рассчитывать по формуле [3]:

$$T = \frac{q_t H}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( \frac{z+c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left( \pi n \frac{z+c+h_2}{H} \right) e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\};$$

$$\tau = \frac{at}{H^2}; \quad a = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k}{\sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k}, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k, \quad (1)$$

где  $a$  – осредненная температуропроводность;  $\lambda_k$ ,  $\tilde{N}_k$  – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости;  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя.

Радиационное облучение твердых тел сопровождается многочисленными эффектами, в результате которых в них возникает дополнительная объемная деформация  $\theta_I$ , изменяются упругие характеристики вещества. Если на внешнюю границу перпендикулярно падают нейтроны с одинаковой средней энергией и интенсивностью  $\varphi_0$ , нейтрон/( $m^2 \cdot c$ ), то интегральный нейтронный поток на глубине  $z$  определяется формулой [1]

$$I(z,t) = \varphi_0 t \exp(-\mu(c+h_1-z)), \quad (2)$$

где  $\mu$  – эффективное макроскопическое сечение (1/см), для любого химического элемента  $\mu = \sigma n_0 = \sigma A_0 \rho / A$ ;  $\sigma$  – эффективное сечение одного ядра;  $n_0$  – число ядер в  $1 \text{ см}^3$ ;  $A_0$  – число Авогадро;  $A$  – атомный вес.

В нашем случае под  $\mu$  понимаем осредненную по толщине пластинки характеристику пакета

$$\mu = \frac{1}{h_1 + h_2 + h_3} \sum_{k=1}^3 \mu_k h_k.$$

В грубом приближении можно считать, что изменение объема вещества прямо пропорционально интегральному нейтронному потоку (2) [1]:

$$\theta_{Ik} = B_k I(z, t), \quad (3)$$

где  $B_k$  – константа материала, получаемая из опыта.

Связь между реакцией и прогибом в соответствии с моделью Винклера:

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (4)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент жесткости основания.

Закон Гука для материала  $k$ -го слоя пластины можно записать в виде

$$s_{ij}^k = 2G_k \gamma_{ij}^k; \quad \sigma^k = K_k (3\varepsilon^k - 3\alpha_k T - B_k I), \quad (5)$$

где  $s_{ij}^k, \gamma_{ij}^k$  – девиаторные и  $\sigma^k, \varepsilon^k$  – шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации;  $\alpha_k$  – коэффициент линейного температурного расширения.

Система уравнений движения, описывающая поперечные колебания рассматриваемой пластины, будет совпадать с приведенной в [2] системой уравнений, описывающей свободные колебания подобной пластины на упругом основании (4) без учета воздействия внешних физических полей:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) = 0; \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) = 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - M_0 \ddot{w} - \kappa_0 w = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате; коэффициенты и дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+; \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k; \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+); \\ a_3 = h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+; \quad a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right); \\ a_5 = c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right]; \\ a_6 = h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+; \\ M_0 = r_1^2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3); \quad L_2(g) \equiv \left( \frac{1}{r} (rg), r \right), r \equiv g, rr + \frac{g, r}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g)), r \equiv g, rrr + \frac{2g, rr}{r} - \frac{g, r}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Начальные условия движения принимаются однородными, при отсутствии начальной температуры и нейтронного потока:

$$w(r, 0) = 0; \quad \dot{w}(r, 0) = 0; \quad T(z, 0) = 0, \quad I(z, t) = I(z, 0) = 0. \quad (7)$$

Контур пластинки шарнирно оперт, т. е. при  $r = r_l$  должны выполняться условия ( $\sigma_r^{(k)}$  – радиальные напряжения в  $k$ -ом слое):

$$u = \psi = w = 0; \quad M_r = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz = 0. \quad (8)$$

**Решение задачи.** Используя закон Гука (5) и принятые гипотезы, последнее условие в (8) можно записать в виде:

$$M_r = a_2 u_{,r} + a_5 \psi_{,r} - a_6 w_{,rr} - a_6 w_{,r} / r - M_t - M_I = 0, \quad (9)$$

где, в соответствии с (1), имеем

$$a_{60} = h_1(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3})K_1^- + h_2(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3})K_2^- + \frac{2}{3}c^3 K_3^-; \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k;$$

$$M_t = \sum_{k=1}^3 M_{kt};$$

$$M_{kt} = 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} K_k^- \int_{h_k} Tz dz = \frac{3q_t H \alpha_{0k} K_k^-}{\lambda} \left[ \left( \tau - \frac{1}{6} \right) \frac{z^2}{2} \Big|_{h_k} + \frac{1}{2H^2} \left( \frac{z^4}{4} \Big|_{h_k} + 2(c+h_2) \frac{z^3}{3} \Big|_{h_k} + (c+h_2)^2 \frac{z^2}{2} \Big|_{h_k} \right) - \frac{2H}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \exp(-n^2 \pi^2 \tau)}{n^3} \times \right. \\ \left. \times \left( z \sin \frac{\pi n(z+c+h_2)}{H} \Big|_{h_k} + \frac{H}{\pi n} \cos \frac{\pi n(z+c+h_2)}{H} \Big|_{h_k} \right) \right];$$

$$M_I = 3 \sum_{k=1}^3 K_k^- B_k \int_{h_k} I(z, t) z dz =$$

$$= 3\varphi_0 t \sum_{k=1}^3 \frac{B_k}{\mu_k} K_k^- \left( z - \frac{1}{\mu_k} \right) \exp(\mu_k(z - h_1 - c)) \Big|_{h_k} = M_{I0} t;$$

$$M_{I0} = 3\varphi_0 \left\{ \frac{B_1}{\mu_1} K_1^- \left[ \left( c + h_1 - \frac{1}{\mu_1} \right) - \left( c - \frac{1}{\mu_1} \right) e^{-\mu_1 h_1} \right] - \frac{B_2}{\mu_2} K_2^- \left[ \left( c + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-\mu_2(h_1+2c)} - \left( c + h_2 + \frac{1}{\mu_2} \right) e^{-\mu_2(h_1+2c+h_2)} \right] + \frac{B_3}{\mu_3} K_3^- \left[ \left( c - \frac{1}{\mu_3} \right) e^{-\mu_3 h_1} + \left( c + \frac{1}{\mu_3} \right) e^{-\mu_3(h_1+2c)} \right] \right\}.$$

Таким образом, в граничном условии (9) появился "температурный"  $M_t$  и "радиационный"  $M_I$  моменты, обусловленные дополнительной объемной деформацией от теплового и нейтронного (3) воздействий.

Из системы (6) после двукратного интегрирования получаем:

$$u = b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r;$$

$$L_3(w_{,r}) + \kappa^4 w + M^4 \ddot{w} = 0. \quad (10)$$

Решение последнего из уравнений системы (10) представим в виде суммы квазистатического прогиба  $w = w_s$  и динамической его части  $w_d$ . Квазистатический прогиб для сплошной пластины имеет вид

$$w_s = \frac{(M_t + M_I) r_1^2}{2(a_7 + a_8)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right];$$

$$a_7 = a_6 - a_3 b_1 - a_5 b_2; \quad a_8 = a_{60} + a_3 b_1 + a_5 b_2. \quad (11)$$

Искомый прогиб  $w_d$ , можно представить с помощью разложения в ряд по системе собственных ортонормированных функций  $v_n(\lambda_n, r)$ :

$$w_d = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t); \quad v_n(\lambda_n, r) \equiv \frac{1}{d_n} \left[ J_0(\lambda_n r) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_0(\lambda_n r) \right]; \quad (12)$$

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) -$$

$$- \frac{r_1^2 I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} \int_0^t \left( \kappa^4 (M_t(\tau) + M_{I0}(\tau)) + M^4 \ddot{M}_t(\tau) \right) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau,$$

где  $\omega_n$  – частота собственных колебаний;  $\lambda_n^4 = M^4 \omega_n^2 - \kappa^4$ ;

$$A_n = 0; \quad B_n = - \frac{r_1^2 I(\lambda_n)}{2(a_7 + a_8) \omega_n} (\dot{M}_t(0) + M_{I0});$$

$$I(\lambda_n) = \int_0^{r_1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 \right] r v_n dr = \frac{2}{d_n \lambda_n^2} \left( J_2(\lambda_n r_1) - \frac{J_0(\lambda_n r_1)}{I_0(\lambda_n r_1)} I_2(\lambda_n r_1) \right).$$

Собственные числа  $\lambda_n$  удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$\frac{J_1(\lambda r_1)}{J_0(\lambda r_1)} + \frac{I_1(\lambda r_1)}{I_0(\lambda r_1)} = 2 \frac{a_7}{a_7 - a_8} \lambda r_1.$$

Перемещения рассматриваемой пластины получим из (10), предварительно просуммировав (11) и (12).

**Численные результаты.** Результаты получены для рассматриваемой пластины с пакетом Д16Т–фторопласт–Д16Т, при этом принималось: весь нейтронный поток  $\varphi_0 = 5 \cdot 10^{16}$  нейтрон/( $m^2 \cdot c$ ) реализуется во внешнем слое;  $q_t = 0,2 \cdot 10^6$  Дж/( $m^2 \cdot c$ ); для дюралюминия величина  $\mu = 1,26 m^{-1}$  [1]; толщины слоев  $h_3 = 10 h_2 = 10 h_1 = 0,2 m$ . Теплофизические и упругие характеристики принятых материалов приведены в [3].

На рис. 2 показано изменение первых четырех частот собственных колебаний шарнирно опертой по контуру пластины в зависимости от жесткости упругого основания  $\kappa_0$  (Па/м): 1 –  $\omega_0$ , 2 –  $\omega_1$ , 3 –  $\omega_2$ , 4 –  $\omega_3$ . При основаниях малой жесткости ( $\kappa_0 < 10^7$ ) частоты практически постоянны. При увеличении жесткости основания до средней величины ( $10^7 < \kappa_0 < 10^9$ ) частота основного тона  $\omega_0$  увеличивается в 6,3 раза. В случае основания большой жесткости ( $10^9 < \kappa_0 < 10^{11}$ ) частота основного тона увеличивается еще в 9,5 раз.

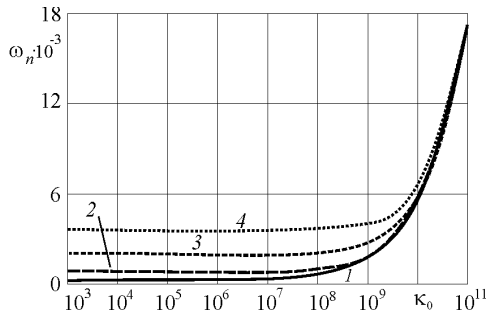


Рис. 2 – Зависимость собственных частот от жесткости упругого основания

Рис. 3 иллюстрирует изменение коэффициента  $k_n = w_{dn} / w_{sn}$  при частоте  $\omega_0$  в зависимости от времени ( $\kappa_0 = 10^8$  Па/м): 1 – тепловой удар ( $\varphi_0 = 0$ ); 2 – радиационный удар ( $q_t = 0$ ); 3 – терморрадиационное воздействие.

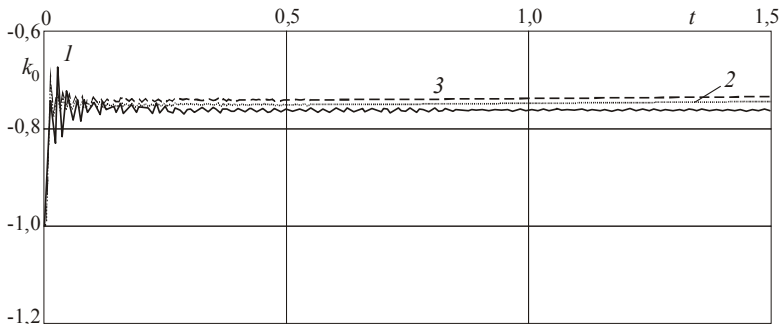


Рис. 3 – Отношение динамической части прогиба к квазистатической

В начальный момент времени основные всплески колебаний наблюдаются за счет превалирования динамической составляющей. Далее динамическая составляющая затухает относительно квазистатической, которая продолжает со временем расти. Совместное терморadiационное воздействие приводит к росту в большей мере квазистатической составляющей.

**Вывод.** Предложенная методика позволяет исследовать колебания круговых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием, при терморadiационном ударе. Получены расчетные формулы, описывающие соответствующие динамические перемещения в пластине.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Ильюшин А. А.** Уругопластические деформации полых цилиндров / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 224 с.
2. **Старовойтов Э. И.** Резонансные воздействия локальных нагрузок на круговые трехслойные пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 9. – С. 94–103.
3. **Старовойтов Э. И.** Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 380 с.

*Белорусский государственный  
университет транспорта,  
Гомель, Беларусь*

*Поступила в редакцию 07.03.2011*

*Е. І. Старовойтов, д-р фіз.-мат. наук,  
Д. В. Леоненко, канд. фіз.-мат. наук,  
О. Е. Старовойтова, канд. фіз.-мат. наук*

## КОЛИВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПРИ ТЕРМОРАДІАЦІЙНОМУ УДАРІ

Досліджено симетричні поперечні коливання пружної тришарової кругової пластини при терморadiаційному ударі. Пластина пов'язана з безінерційною основою Вінклера. Для зовнішніх шарів приймаються гіпотези Кирхгофа, в легкому заповнювачі деформована нормаль прямолінійна і нестискувана по товщині. Отримано аналітичні рішення, проведено їх чисельний аналіз.

**Ключові слова:** тришарова пластина, коливання, терморadiаційний удар, пружна основа.

*E. I. Starovoitov, Professor, D. V. Leonenko, Associate Professor,  
H. E. Starovoitova, Associate Professor*

## THE VIBRATION OF SANDWICH PLATE ON ELASTIC FOUNDATION UNDER THERMORADIATION STROKE

The axisymmetrical vibrations of elastic circular three-layer metal-polymeric plate on an elastic foundation under thermoradiation stroke are explored. Reaction of foundation was described on the base of Winkler's model. For the kinematics description asymmetrical on the thickness of package accepted hypotheses broken normal. Filler is light. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

**Keywords:** sandwich plate, vibration, thermoradiation stroke, elastic foundation.