ISSN 2079–1836
2014, вип. 23

УДК 532.5 + 523.4

В. І. Перехрест, канд. техн. наук, М. М. Осипчук

ПОЛЯ ТИСКУ ТА ГРАДІЄНТІВ ТИСКУ В ПЛАНЕТАРНИХ ВИХОРАХ

Аналітично й чисельно досліджуються поля тиску та градієнтів тиску в планетарних вихорах, які є математичною моделлю первинного стану утворення планетарних систем. Показано, що такі поля є основним чинником утворення з планетарної туманності масивної зірки та зародків майбутніх планет при будь-якій первинній формі планетарної туманності.

Ключові слова: *планетарний вихор, поле тиску, градієнт тиску.*

Вступ. Питання про поля тиску та градієнтів тиску в планетарному вихорі є важливим з огляду на те, що силове поле $G^* = -gradP$ є виштовхувальною силою Архімеда, яка діє на частинки і тіла, вміщені в течію. Оскільки загальноприйнятим і обґрунтованим є твердження [1, 8], що первинна планетарна туманність складалася з пилу, газів та дрібних часток, наявність такого силового поля є одним з визначальних чинників утворення зірки – Сонця та майбутніх планет. Зазначимо, що досі градієнтні поля не розглядалися у жодних моделях нестабільності протопланетних дисків та формування планетозималей або вихрових збурень [10].

Математична модель планетарного вихору, як початкового стану утворення планетарних систем, розвинена у [4, 6], де досліджувалась геометрія, структури та деякі динамічні характеристики планетарних вихорів. Зокрема, у [4] для однієї конкретної структури $(2,9)$ планетарного вихору було побудовано силове поле градієнта тиску. Структура цього поля свідчить, що у центральній частині вихору інтенсивні градієнтні поля сили Архімеда спрямовані до центра, що з часом повинно привести до утворення ядра Сонця та зародків планет на центральних колах вихрових кілець. У даній роботі поля тиску та градієнтів тиску досліджуються всебічно як у всій області вихору, так і у залежності від кількох основних параметрів задачі. Це дослідження показало, що в околі центрального вихору існує градієнтне кільце, де величини градієнтів у 10^4 разів перевищують їх значення на периферії вихору. Інші особливості градієнтного поля тиску також показують, що це поле є одним з кількох важливих чинників формування зірок та планет.

© В. І. Перехрест, М. М. Осипчук, 2014

Функція течії та поле тиску. Математична модель планетарного вихору була побудована на основі окремого точного розв'язку гідродинамічних рівнянь Ейлера [4] у сферичних координатах (r,θ,φ) для осесиметричного випадку. На основі відомих представлень швидкостей через функцію течії $\Psi(r,\theta)$

$$V_r = -\left(r^2\sin\theta\right)^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta};\ V_\theta = (r\sin\theta)^{-1}\frac{\partial\Psi}{\partial r};\ \mathrm{V}_\phi = \frac{C_0\Psi}{r\sin\theta}. \quad (1)$$

Шляхом спеціальних підстановок та відокремлення змінних було побудовано аналітичний розв'язок, неперервний варіант якого має вигляд:

$$\Psi = C_2\Phi(y)\sin^2\theta;\ \Phi(y) = \left[\alpha y^2 + \left(\cos y - \frac{\sin y}{y}\right)\right]. \quad (2)$$

Поле швидкостей (1) вихрової течії, яке породжено функцією течії (2) остаточно подамо у вигляді:

$$V_r = -\frac{2B}{y^2}\Phi(y)\cos\theta;\ V_\theta = \frac{B}{y}\Phi'(y)\sin\theta;\ V_\phi = \frac{B}{y}\Phi(y)\sin\theta, \quad (3)$$

де $B = C_2C_0^2$ – коефіцієнт із розмірністю швидкості; $y = C_0r$ – без розмірний радіус. Вихідна формула для безрозмірного тиску отримана у [4] і має вигляд

$$P = 1 + k_p\left[-\frac{4}{y^4}\Phi^2 + \left(\frac{2\Phi\Phi''}{y^2} + \frac{\Phi^2}{y^2} - \frac{\Phi'^2}{y^2}\right)\sin^2\theta\right], \quad (4)$$

де p, ρ – тиск і густина в течії; p_0 – тиск у критичній точці; $k_p = \dfrac{B^2}{V_p^2}$, $V_p = \sqrt{\dfrac{2p_0}{\rho}}$ – швидкість гальмування. Надамо їй кілька нових форм, зручних для розрахунків.

Для функції $\Phi(y)$ маємо диференціальне рівняння

$$\Phi'' = \left(\frac{2}{y^2} - 1\right)\Phi + \alpha y^2, \quad (5)$$

і після підставлення (5) в формулу тиску (4) та деяких спрощень отримаємо

$$P = 1 + k_p\left[-\frac{4}{y^4}\Phi^2\cos^2\theta + \left(-\frac{\Phi^2}{y^2} - \frac{\Phi'^2}{y^2} + 2\alpha\Phi\right)\sin^2\theta\right]. \quad (6)$$

Виділимо у формулі (6) член, що відповідає в інтегралі енергії кінетичній енергії, для чого підрахуємо квадрат абсолютної швидкості течії $V^2 = V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2$, скориставшись виразами (3):

$$V^2 = B^2\left[\frac{4\Phi^2}{y^4}\cos^2\theta + \left(\frac{\Phi^2}{y^2} + \frac{\Phi'^2}{y^2}\right)\sin^2\theta\right]. \qquad (7)$$

Виділимо у формулі тиску (6) член, що являє собою кінетичну енергію (7), тоді інтеграл енергії за (6) можна подати у вигляді

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - B^2\alpha\Psi = \frac{p_0}{\rho} - B^2\alpha\Psi_0, \qquad (8)$$

де p_0 – тиск у критичній точці течії $A_0(y_0, \theta_0)$, $V = 0$, а $\Psi_0 = \Psi_0(y_0, \theta_0)$. Тоді формула тиску (6) набуває вигляду

$$p = p_0 - \rho\frac{V^2}{2} + \rho B^2\alpha\left(\Psi - \Psi_0\right),$$

що у безрозмірному вигляді при $\Psi_0 = 0$ дає формулу (6). У подальшому ми будемо вказувати для кожного випадку положення критичної точки A_0 та значення Ψ_0 у ній.

За формулою (3) маємо, що умова $V_r = 0$ зводиться до рівняння

$$\Phi\left(y\right) = 0, \qquad (9)$$

корені якого $\{\tilde{y}_i,\ i = 1,2,..,n\}$ є радіусами непроникних сфер, які розділяють вихрові зони внутрішніх вихрових кілець (рис. 1). Очевидно, що на вертикальній осі $\theta = 0,\ \pi$ точки $\{\tilde{y}_i,\ i = 1,2,..,n\}$, які задовольняють умові (9), є критичними, бо у них $V_r = V_\theta = V_\phi = 0$. Виберемо за критичну точку A_0 «лобову» точку $\left(\tilde{y}_n, 0\right)$ на зовнішній *n*-й сфері. З формул (1) та (9) випливає, що у цій точці $\Psi_0 = 0$, і тиск визначається формулою (6).

Визначальними для структури вихору є також особливі точки поля швидкостей, які в силу осьової симетрії течії знаходяться з умов:

$$\begin{aligned} V_r\left(y,\theta\right) &= 0; \\ V_\theta\left(y,\theta\right) &= 0. \end{aligned} \qquad (10)$$

З огляду на (3) ці умови задовольняються значеннями $\theta = \pi/2$ і одним рівнянням

$$\Phi'\left(y\right) = 0, \qquad (11)$$

корені якого $\left\{ y_k^*,\ k = 1,2,..,m \right\}$ є центрами вихрових кілець всередині та зовні непроникних сфер. Усі вони лежать на горизонтальній осі, причому у замкнутих сферах існують тільки центри, а у зовнішніх кільцях – центри і сідла, які є точками самоперетину сепаратрис, що виділяють зовнішні вихрові кільця з наскрізної течії (рис. 1).

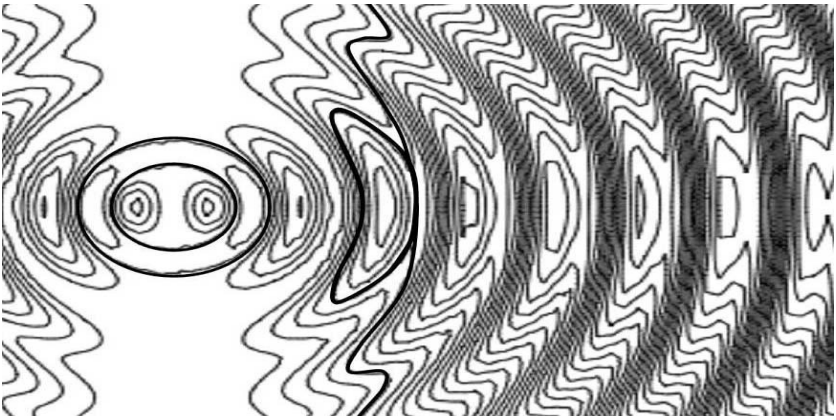


Рис. 1 – **Центральна область вихору структури** $(2,11)$, $\alpha = -0,00655$

Таким чином, глобальна структура планетарного вихору визначається набором (n,m) внутрішніх та зовнішніх вихрових кілець, який у свою чергу залежить від параметра α у функції течії (2). Параметр C_0 визначає інтенсивність закручування вихору, а C_2 – параметр інтенсивності центрального вихрового диполя, який є джерелом утворення вихору [6].

У попередніх роботах [4, 6] детально проаналізовано залежності структур (n,m) вихорів від параметра α, а також визначено параметри геометрії та руху кільцевих вихорів. Зокрема, для моделювання первинного вихору, що створив Сонячну систему, розглядався вихор структури $(2,11)$ з параметром $\alpha = -0,00655$, для нього було пораховано усі геометричні параметри, якими ми також будемо користуватися.

У [4] було показано, що параметри вихору зв'язані співвідношенням

$$\alpha = -\frac{V_\infty}{2B}, \tag{12}$$

де V_∞ – швидкість поступального руху незбуреного простору вздовж осі Oz.

За формулою (6) визначимо значення тиску в деяких визначних точках та на поверхнях течії, зокрема при $y \to 0$. Для цього вивчимо властивості функцій $\Phi(y)$, $\Phi'(y)$. Функцію з (1) представимо так:

$$\Phi(y)=y^2F(y);\quad F(y)=\left(\alpha+u(y)\right), \tag{13}$$

де

$$u(y)=\frac{1}{y^2}\left(\cos y-\frac{\sin y}{y}\right), \tag{14}$$

і при розкладенні у ряд отримаємо

$$u(y)=-\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}y^2-\frac{6}{7!}y^4+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(2n+2)y^{2n}}{(2n+3)!}+\ldots, \tag{15}$$

звідки $u(0)=-\frac{1}{3},\quad F(0)=\alpha-\frac{1}{3}$, і далі з (14) $\lim\limits_{y\to+\infty}u(y)=0,\quad \lim\limits_{y\to+\infty}F(y)=\alpha,$

$$\frac{\Phi}{y^2}=F(y)\approx O(1);\ \frac{\Phi^2}{y^4}=F^2(y)\approx O(1);\ \frac{\Phi^2}{y^2}=y^2F^2\approx O\left(y^2\right),\ y\to 0. \tag{16}$$

Похідну $\Phi'(y)$ представимо у вигляді:

$$\begin{gathered}\Phi'(y)=y\,f(y);\quad f(y)=2\alpha-\frac{\sin y}{y}-u(y),\\ \lim_{y\to 0}f(y)=2\left(\alpha-\frac{1}{3}\right);\quad \lim_{y\to\infty}f(y)=2\alpha,\end{gathered} \tag{17}$$

звідки $\frac{\Phi'^2(y)}{y^2}=f^2(y)\approx O(1),\ \ y\to 0$.

Виразимо формулу (6) для тиску через функції $F, f, u,$ враховуючи (13)–(17):

$$P=1+k_p\left[-4F^2\cos^2\theta+\left(-y^2F^2-f^2+2\alpha y^2F\right)\sin^2\theta\right], \tag{18}$$

або у такому вигляді:

$$P=1+k_p\left[-4(\alpha+u)^2\cos^2\theta+\left(y^2\left(\alpha^2-u^2\right)-f^2\right)\sin^2\theta\right]. \tag{19}$$

Коефіцієнт інтенсивності вихору можна виразити з (4) через α за допомогою (12):

$$k_p=\frac{\lambda^2}{4\alpha^2};\qquad \lambda=\frac{V_\infty}{V_p}, \tag{20}$$

де $V_\infty = -2B\alpha$ – поступальна швидкість простору на нескінченності, V_p – швидкість гальмування.

У центрі вихору $y = 0$ маємо

$$P_0 \equiv P(0,\theta) = 1 - \lambda^2\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right)^2 \text{ для } 0 \le \theta \le \pi/2, \qquad (21)$$

що виражає очевидну властивість, що тиск у центрі є однаковим на усіх променях $\theta = const$. Введемо перепад тиску $\Delta P_0 = 1 - P_0$ і з (21) маємо

$$\Delta P_0 = \lambda^2\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right)^2 = \lambda^2\gamma^2 = \gamma_0^2, \qquad (22)$$

де $\gamma_0 = V_0 / V_p$ – відношення швидкостей, яке визначає відповідний перепад тиску; $V_0 = -2B(\alpha - 1/3)$ – швидкість у центрі вихору.

Оскільки на непроникних сферах $F(\tilde{y}_i) = 0$, то на них тиск змінюється за законом

$$P_s(\theta) = 1 - \left(\frac{\lambda}{2\alpha}\right)^2\left(f^2(\tilde{y}_i)\sin^2\theta\right), \quad 0 \le \theta \le \pi/2, \quad P_s(0) = 1. \qquad (23)$$

У особливих точках y^* на горизонтальній осі з (12) і (17) маємо $f(y^*) = 0$ і

$$P(y^*) = 1 + (\lambda y^*/2\alpha)^2\left(\alpha^2 - u^2(y^*)\right). \qquad (24)$$

Нарешті, при $\theta = 0$ тиск на нескінченності $y \to +\infty$ має значення

$$P_\infty = 1 - \lambda^2 < 1, \qquad (25)$$

тоді як у критичній «лобовій» точці на сфері за (21) $P = 1$. Перепад тиску від нескінченно віддаленої точки до центра вихору

$$\Delta P_\infty \equiv P_\infty - P_0 = -\frac{\lambda^2}{3\alpha}\left(2 - \frac{1}{3\alpha}\right), \qquad (26)$$

у залежності від α може бути як додатним, так і від'ємним, а при $\alpha = 1/6$ перепад $\Delta P_\infty = 0$.

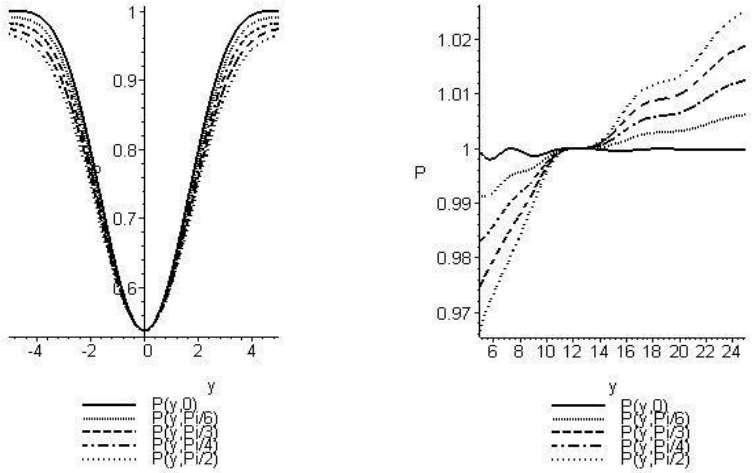
Межами зміни коефіцієнта λ є умова невід'ємності найменшого тиску (21) $P(0,0) > 0$, звідки

$$\lambda < 1\Big/\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right) = \lambda_{\max}. \qquad (27)$$

У табл. 1 дано значення коефіцієнта λ для падінь тиску ΔP_0 в центрі вихору від $0{,}1$ до $0{,}9$. Зокрема, для взятого розрахункового варіанту $\alpha = -0{,}00655$ з падінням у центрі $\Delta P_0 = 0{,}5$ коефіцієнт $\lambda = 0{,}013627$, тоді як значення (27) складає $\lambda_{\max} = 0{,}01927132$. За формулами (6), (19) були пораховані залежності тиску від радіуса у різних меридіональних площинах $\theta = \{0,\ \pi/6,\ \pi/4,\ \pi/3,\ \pi/2\}$ (відповідні графіки зображено на рис. 2).

Таблиця 1 – **Значення коефіцієнта λ для падінь тиску ΔP_0**

ΔP	0,1	0,2	0,3	0,4	**0,5**	0,6	0,7	0,8	0,9
λ	0,006	0,0086	0,0105	0,0121	**0,0136**	0,0149	0,016	0,017	0,018



а) **б)**

Рис.2 – **Зміна тиску: а) у центрі вихору; б) на периферії вихору**

Як видно з цього графіка, найкрутіше падіння тиску маємо вздовж вертикальної осі $\theta = 0$ а найплавніше – вздовж горизонтальної осі, хоча на відрізку $[0,5]$ графіки відрізняються у точці максимуму $y_m \approx 5$ не більше ніж на 4%.

Проте залежності тиску за радіусом на зовнішній частині вихору $y > 5$ (рис. 2, б) відрізняються суттєвіше. Лише вздовж вертикальної осі тиск є обмеженим і при $y \to \infty$ прямує до значення (25). Вздовж інших променів $0 < \theta < \pi/2$ тиск слабо зростає за радіусом, причому найшвидше вздовж горизонтальної осі. Це зростання є квазілінійним з приростом $y \approx 0{,}015$ на $\Delta y = 10$. Таким чином, у межах вихору тиск

може зрости на $0{,}1$. Причиною цього є додатковий член $\alpha B^2\Psi$ у формулі тиску (8), який з огляду на (2) для великих *y* є додатним, і цей член компенсує навіть динамічне падіння тиску через збільшення V^2.

З рис. 2 видно, що значення $P=1$ на вертикальній осі досягається на радіусі $y=4{,}638$ першої сфери, а вздовж інших променів – в околі точки $y\approx 12$.

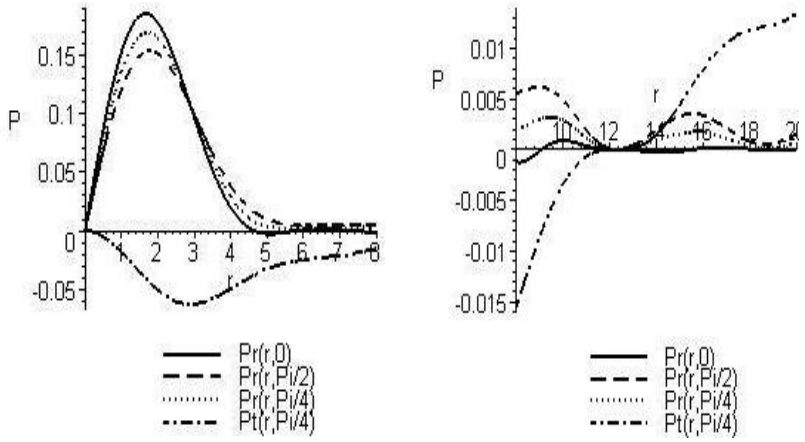
Градієнтне силове поле у вихорі. Силове поле вектора $G=gradP$ у сферичних координатах має компоненти:

$$G_r=\frac{\partial P}{\partial r}=C_0\frac{\partial P}{\partial y};\quad G_\theta=\frac{\partial P}{r\,\partial\theta}=\frac{C_0}{y}\frac{\partial P}{\partial\theta}. \tag{28}$$

Безпосереднім обчисленням похідних поля тиску (18) з урахуванням (16), (17) отримаємо:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial y}=2k_p\left[-4FF'\cos^2\theta+\left(yF\left(2\alpha-F\right)-y^2\left(\alpha-F\right)F'-ff'\right)\sin^2\theta\right];\\&\frac{1}{y}\frac{\partial P}{\partial\theta}=\frac{k_p}{y}\left[\left(4F^2-f^2\right)+y^2\left(2\alpha-F\right)F\right]\sin 2\theta.\end{aligned} \tag{29}$$

З властивостей (13)–(17) функцій F, f, u випливає, що компоненти (29) неперервні всюди, окрім, можливо точки $y=0$.



а) б)

Рис. 3 – **Зміна градієнтів тиску за радіусом: а) у центрі вихору; б) на периферії**

Тому оцінимо похідні F', f' та інші вирази, які можуть містити особливості в нулі порядку $O(y^{-1})$, $y \to 0$. Диференціюванням (13), (14) знаходимо

$$F'(y) = u'(y) = -\frac{1}{y}\left(3u(y) + \frac{\sin y}{y}\right). \tag{30}$$

За допомогою розкладення у ряди доданків у (30), з урахуванням (15), маємо:

$$3u(y) + \frac{\sin y}{y} = y^2 v(y) \approx O\left(y^2\right), \text{ де } \quad v(y) = \frac{1}{y^2}\left(3u + \frac{\sin y}{y}\right) \text{ або}$$

$$v(y) = -\frac{2}{3!5} + \frac{4}{5!7}y^2 - \frac{6}{7!9}y^4 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(2n+2)}{(2n+3)!(2n+5)}y^{2n} + \ldots \tag{31}$$

Тоді

$$F'(y) = u'(y) = -yv(y) \approx O(y), \quad y \to 0; \quad v(0) = -1/15. \tag{32}$$

Аналогічно обчислимо похідну *f'* за виразом (17), враховуючи (34):

$$f' = -u'(y) - yu(y) = y(v - u). \tag{33}$$

Введення неперервних в точці $y = 0$ функцій $u(y), v(y)$ формулами (15), (31) дозволяє виділити у явному вигляді степеневі особливості виразів (29) в околі центра вихору.

З огляду на вирази (32), (33), розглянемо окремо складові похідної $\frac{\partial P}{\partial y}$ на осях $\theta = 0$ і $\theta = \pi/2$. На вертикальній осі $\theta = 0$ з огляду на (29) маємо:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right) y(\alpha + u)v \approx A_1 y + O\left(y^3\right); \quad A_1 = -\frac{2\lambda^2}{15\alpha}\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right). \tag{34}$$

Аналогічно на горизонтальній осі $\theta = \pi/2$ з урахуванням (32) і (33) отримаємо:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{\pi/2} = \frac{\lambda^2}{2\alpha^2} y\left[y^2 uv + (u - v) f + \left(\alpha^2 - u^2\right)\right] \approx A_2 y + O\left(y^3\right);$$

$$A_2 = \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{5\alpha}\right). \tag{35}$$

У відповідності з (34) і (35) першу компоненту поля градієнтів (28) остаточно запишемо так:

$$G_r = \frac{C_0}{2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 y\left[4(\alpha+u)v\cos^2\theta + \left((\alpha+u-v)^2 + v^2\left(y^2-1\right)\right)\sin^2\theta\right] \approx$$
$$\approx A_r y + O\left(y^3\right); \qquad A_r = C_0\left(A_1\cos^2\theta + A_2\sin^2\theta\right). \tag{36}$$

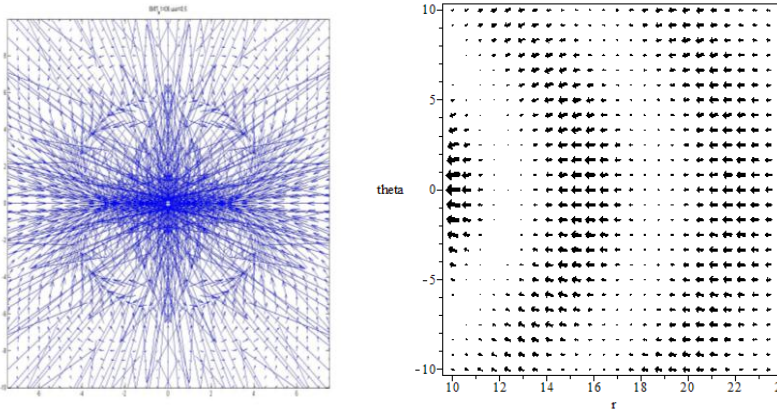
Порахуємо складові (36) у центрах $y = y^*$, та сідлах $y = y_2$, для яких $\theta = \pi/2$ і $\Phi'(y) = f(y) = 0$. Остаточно отримаємо

$$G_r\left(y^*\right) = \frac{2k_p}{y^{*3}}\Phi^2\left(y^*\right) > 0,$$

звідки випливає, що архімедова сила $-G_r(y^*) < 0$ – сила доцентрова і у центрах вона більша, ніж у сідлах (рис. 4, б), оскільки $\Phi^2(y^*) = \max\Phi^2$, а $\Phi^2(y_2) = \min\Phi^2$. Крім того, з того що

$$\Phi^2\left(y^*\right)/\, y^{*3} = O\left(y^*\right), \quad y^* \to \infty,$$

випливає, що величина сили Архімеда слабо зростає за радіусом у зовнішній частині вихору (рис. 4, б).



а) б)

Рис. 4 – **Градієнтне векторне поле сили Архімеда: а) в центрі вихору, б) на периферії**

Аналогічно перетворимо вираз для другої компоненти поля (29), виділивши члени порядку $O(y^2)$, а саме

$$4F^2 - f^2 = y^2 v\left(4\alpha + u - \frac{\sin y}{y}\right). \qquad (37)$$

Після підстановки цього результату в (29) маємо:

$$G_\theta = C_0\left(\frac{\lambda}{2\alpha}\right)^2 y\left[\left(4\alpha + u - \frac{\sin y}{y}\right)v + \left(\alpha^2 - u^2\right)\right]\sin 2\theta \approx A_\theta y + O\left(y^3\right);$$
$$A_\theta = C_0\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{3\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{15\alpha}\right)\sin 2\theta, \quad y \to 0. \qquad (38)$$

З формули (38) маємо, що у горизонтальній площині вихору $\theta = \pi/2$ майже скрізь, принаймні при $y > 1$, $G_r > 0$, тобто сила Архімеда $(-G_r)$ спрямована до центра у всій планетарній туманності. При цьому існують періодичні зони, у яких ця сила є близькою до нуля (рис. 4, б). Саме у цих зонах частинки зависають, утворюючи згущення сприятливі для формування планетозималей.

В околі центра $0 < y < 3$ утворюється глибока градієнтна яма, у якій величини градієнтів перевищують у 10^4 разів градієнти на відстанях $y \approx 50$. На усіх напрямах максимальні значення градієнтів досягаються в околі $y \approx 1{,}7$, а їх величини подано у табл. 2.

Але окіл вертикальної осі характерний тим, що градієнтні сили спрямовані від осі й тому швидко розтягують від неї пил, звільняючи вузький сектор для вільного проходження променів молодої зірки. Зрештою це поле спрямовує частинки до горизонтальної осі, а потім у деякому секторі затягує їх до центра – майбутньої зірки (рис. 4, б).

Таблиця 2 – **Максимальні значення градієнтів на променях** θ

Максимальні значення градієнтів на променях θ у околі центра				Градієнти у області 2-го вихрового кільця	
θ	y	$MaxG$		y	G
0	1,662083481	0,18575803		14,05479202	0,0020355
π/6	1,688886636	0,17888463		16,30225587	0,0030955
π/4	1,718417494	0,17132566		15,5462606	0,0035391
π/3	1,751532637	0,16297788		15,85435860	0,0034624
π/2	1,785905747	0,1537531		18,54971972	0,00069727

У табл. 2 також подано значення градієнтів в області 2-го вихрового кільця. Вони вже у 100–265 разів менші від градієнтів у центрі.

Меридіональна складова сили Архімеда – (G_θ) з (38) і (41) на осях $\theta = 0,\ \pi/2$ дорівнює нулю, а досягає максимального значення на конусі

$\theta = \pi/4$. Вздовж радіуса вона змінює знак з додатного на від'ємний в околі точки $y = 12$ (рис. 3).

Дослідимо також асимптотику градієнтного поля (34), (36) на нескінченності $y \to \infty$. При цьому врахуємо оцінки, що випливають з формул (14), (17):

$$\begin{aligned} &u(y) \cong O\left(y^{-2}\right), \quad y \to \infty, \quad \lim_{y\to\infty} u(y) = 0; \\ &F(y) = \alpha + u(y) \cong \alpha + O\left(y^{-2}\right), \quad y \to \infty; \\ &f(y) \cong 2\alpha + O\left(y^{-1}\right), \quad y \to \infty, \end{aligned} \tag{39}$$

та з (33):

$$y^2 v(y) \cong O\left(y^{-1}\right); \quad v(y) \cong O\left(y^{-3}\right); \quad \lim_{y\to\infty} v(y) = 0. \tag{40}$$

Після урахування оцінок (39), (40) та переходу до границі $y \to \infty$ за формулами (36), (38) маємо:

$$\begin{aligned} &(G_r)_\infty \cong \left(C_0\lambda^2/2\right) y \sin^2\theta + O\left(y^{-2}\right); \\ &(G_\theta)_\infty \cong \left(C_0\lambda^2/2\right) y \sin\theta\cos\theta + O\left(y^{-3}\right), \quad y \to \infty. \end{aligned} \tag{41}$$

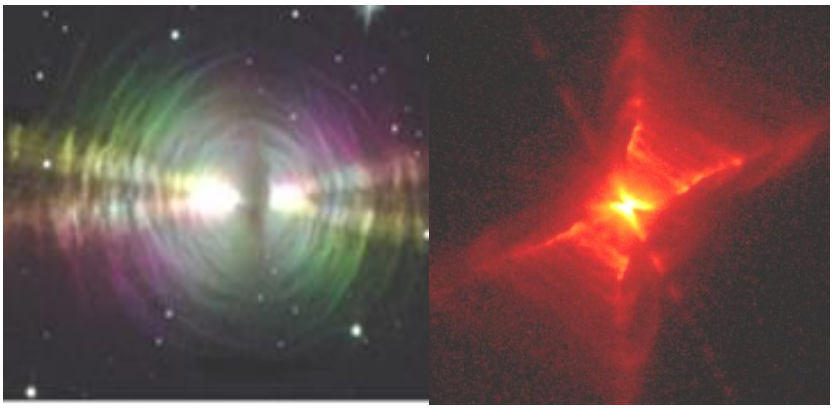
Якщо ввести проекції градієнта G на осі циліндричної системи координат (G_R, G_z), то з формул (41) можна отримати:

$$\begin{aligned} &G_z = (G_r)_\infty \cos\theta - (G_\theta)_\infty \sin\theta = 0; \\ &G_R = \left(C_0\lambda^2/2\right) y \sin\theta = \left(C_0\lambda^2/2\right) R. \end{aligned} \tag{42}$$

Наявність лінійного зростання радіальної складової (42) за циліндричним радіусом $R = y\sin\theta$ у площині $\theta = \pi/2$ пояснюється присутністю в інтегралі енергії (8) додатної функції $\alpha B^2 \Psi$, яка зростає при $y \to \infty$. Але це зростання має порядок $C_0\lambda^2/2$, що для нашого прикладу із $C_0 \cong 10^{-11}\ 1/m$ і при $0 < \lambda < 0{,}01927132$ не перевищує $1{,}857 \cdot 10^{-15}$, і через це досягає суттєвих значень лише при $y > 10^{10}$, тобто далеко за межами планетарної системи, яка має масштаб порядку $y \approx 10^2$ [5].

Висновки, застосування. Звернемо увагу на те, що за асимптотичною формулою (41) сила Архімеда $(-G_r)_\infty < 0$ у всій зовнішній частині вихору.

Це значить, що вихрове поле квазіперіодичного збурення простору (рис. 1 і рис. 6, а) стягує маси й частинки з величезного околу до центра – зірки. Цю фазу утворення зірки добре демонструє знімок планетарної системи Red Nebula (рис. 6, б), де пилові маси, стягнуті по чотирьом симетричним напрямам, як на рис. 4, починають світитися від стискання.



а) б)

Рис. 6 – **Туманність планетарної системи: а) Egg Nebula; б) Red Nebula**

Подібні сліди первинних процесів творення зірки видно на рис 7, б, де на карті Сонця зображено 4 пелюстки гір на сонячній корі.

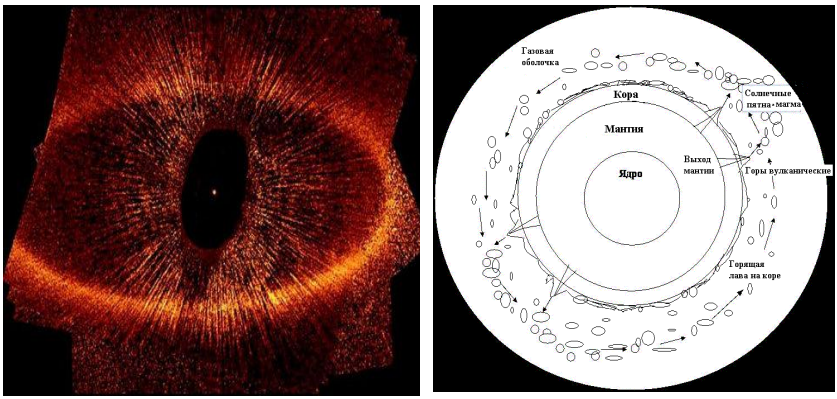
Наступний етап зображено на рис. 7, а: потужні градієнтні сили та зростаюча гравітація вже очистили окіл навколо центра зірки, але стягування мас пилу у значному околі ще продовжується. Під цим потоком частинок й тіл проглядається перше вихрове кільце, в якому формується перша планета. Якщо до цього додати, що зірка у процесі свого швидкого формування набирає значну масу і справляє ще й гравітаційну дію, то стають зрозумілими картини сфотографованих систем, що демонструють якраз ці процеси формування зірки під дією градієнтних та гравітаційних сил.

Якісно градієнтне поле сили Архімеда характеризується тим, що в околі вертикальної осі воно розтягує маси частинок від неї, а ці та інші частинки затягуються до центра у деякому секторі навколо екваторіальної площини вихору (рис. 4). Тому дуже скоро навколо вертикальної осі сформується відносно пустий від пилу простір, а екваторіальна площина заповниться пиловими обертальними масами. Останні внаслідок сукупної дії градієнтних і гравітаційних сил теж через деякий час звільнять простір між зіркою та першим вихровим кільцем (рис. 7, а). Але оскільки на значних відстанях $y \cong 10^2$ градієнтні сили є доцентровими, то вони стягують маси пилу з величезного околу до зірки, особливо в конусах, які не містять вихрових кілець. Тому частинки рухаються до зірки

«поверх» кілець, як на рис. 7, а, і лише у вузькому секторі екваторіальних кілець вони можуть бути затягнутими до кільця струменем вихрової течії. Навпаки, частинки «зависають» у зоні найменших градієнтів і завдяки силам в'язкості затягуються в обертальний рух кільця.

Оскільки у численних дослідженнях різноманітних моделей утворення зірок і планетозималей – зародків планет [10], градієнтні сили ще не бралися до розгляду, то їх урахування помітно змістить оцінки термінів формування зірок та планет у бік зменшення. До такого висновку приходять сучасні дослідники [9, 11, 12], які також проводять свій аналіз на основі гідродинамічних рівнянь.

Звернемо увагу на наявність у інтегралі енергії (8), окрім відомих членів, що виражають кінетичну та потенціальну енергії, доданка, який залежить від функції течії і який можна трактувати як додаткову потенціальну енергію вихору або «вихрову енергію».



а) б)

Рис. 7 – **Первинні процеси творення зірки:**
а) формування зірки в Nebula0002; б) будова Сонця

Нагадаємо, що для гвинтових течій ідеальної рідини інтеграл енергії у формі Бернуллі існує з єдиною константою для всієї області течії [4]. Вказаного додаткового члена у суто гвинтових та у потенціальних течіях немає.

У [5, 6] та в поданій роботі показано, що у негвинтових течіях циліндричних чи сферичних вихорів у інтегралі енергії (8) існує додатковий член, що лінійно чи квадратично залежить від функції течії Ψ. Ця додаткова «вихрова» енергія не може бути виміряною через швидкість чи роботу зовнішніх сил; вимірювання ж тиску в космосі є задачею проблематичною. Але у балансі енергій (8) вона буде проявлятися. Тому, якщо про неї не знати, то в енергетичному балансі буде дефект, який можна трактувати як «порушення закону Ньютона» у космосі або наявність там «темної енергії» [3]. Дійсно, якщо відкинути цей член у рівнянні енергії, то порушаться

рівності у рівняннях Ейлера, які побудовано на основі закону Ньютона. Оскільки космічні утворення (туманності, галактики, планетарні системи) здебільшого є вихровими структурами, то вказаний фактор є суттєвим для енергетичних, масових та інших оцінок об'єктів і процесів у Всесвіті.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Альфвен Х.*** Структура и эволюционная история Солнечной системы / Х. Альфвен, Г. Аррениус. – К. : Наук. думка, 1981. – 332 с.
2. ***Климишин І. А.*** Фрагменти космології / І. А. Климишин. – Івано-Франківськ : Гостинець, 2008. – 140 с.
3. ***Лойцянский Л. Г.*** Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М. : Дрофа, 2003. – 840 с.
4. ***Перехрест В. І.*** Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / В. І. Перехрест, Р. В. Іванов // Вісник ДНУ. Сер. Механіка. – 2002. – Вип. 6, т. 1. – С. 60–64.
5. ***Перехрест В. І.*** Новий клас розв'язків гідродинамічних рівнянь Ейлера для осесиметричних вихорових течій / В. І. Перехрест // Доповіді НАН України. – К., 2004. – № 3. – С. 64–71.
6. ***Перехрест В. І.*** Планетарний вихор та гіпотези Лапласа і Вайцзекера / В. І. Перехрест // Вісник ДНУ. Сер. Механіка. – 2009. – Вип. 13, т. 2. – С. 113–124.
7. ***Перехрест В. І.*** Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання / В. І. Перехрест, М. М. Осипчук // Вісник ДНУ. Сер. Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 110–118.
8. ***Струве О.*** Астрономия XX века / О. Струве, В. Зебергс. – М. : Мир, 1968. – 548 с.
9. ***Bodenheimer P.*** Multiple fragmentataion of protostars / P. Bodenheimer, A. Burkert, R. J. Klein, A. Boss // Protostars&Planets IV. – Arizona Press, 2000. – P. 675–701.
10. ***Boss. A. P.*** Edited Vince Maunings / A. P. Boss, S. S. Russel // Protostars&Planets IV. – Tucson : Arizona Press, 2000. – 378 p.
11. ***Boss. A. P.*** Rapid formation of outer giant planets by disk instabiliny / A. P. Boss // Astroph. Journal, 10 December 2003. – P. 577–581.
12. ***Mudryk I. R.*** RAPID: A fast, high resolution, flux-conservative algorithm desined for planet-disk interaction [Electronic resources] / I. R. Mudryk, N. W. Murray // The Journal of New Astronomy. – 2009. – [Cited 2008, 15 Dec.]. – Available from: http://arxiv.org/abs/0812.2938.
13. ***The Exoplanet Data Explorer*** [Electronic resources]. – Available from: http://exoplanets.org/table?datasets=explorer,kepler,other

В. И. Перехрест, канд. техн. наук, Н. Н. Осипчук

ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ И ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАНЕТАРНЫХ ВИХРЯХ

Аналитически и численно исследуются поля давления и градиентов давления в планетарных вихрях, которые являются математической моделью первичного состояния образования планетарных систем. Показано, что такие поля являются основным фактором образования из планетарной туманности массивной звезды и зародышей будущих планет при любой первичной форме планетарной туманности.

Ключевые слова: *планетарный вихрь, поле давления, градиент давления.*

V. I. Perehrest, PhD (Tech.), N. N. Osypchuk

PRESSURE FIELDS AND PRESSURE GRADIENT IN THE PLANETARY VORTICES

Pressure fields and pressure gradient, which are the mathematical model of primary state formation of planetary systems, are investigated in the planetary vortices analytically and numerically. It is shown that such fields are a major factor in the formation of a planetary nebula massive star and future planetary embryos at any primary form a planetary nebula.

Keywords: *planetary vortex, the pressure field, the pressure gradient.*

A new exact solution of Euler's hydrodynamic equations presented by us in the work [4] describes a difficult system of axisymmetrical toroidal vortexes, the central part (n) of which is in the closed impenetrable spheres, and the external ones (m) hang freely up in the space and are streamlined by unclosed lines of flow (Fig. 1) [6]. The centers (central circles) of toroidal vortexes lie in an equatorial plane and rotate in one direction together with their rings.

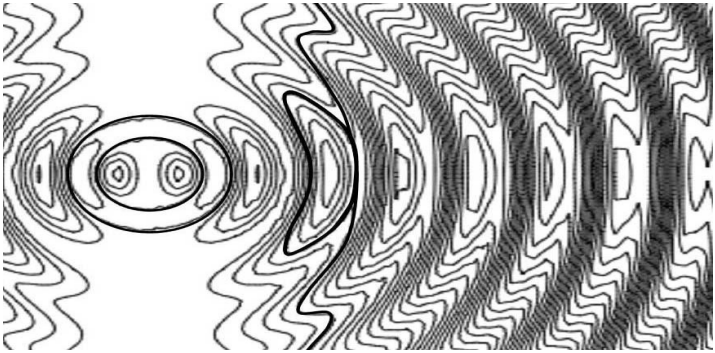


Fig. 1 – **Planetary vortex of structure** $(2,11)$ **,** $\alpha = -0,00655$

In accordance to obvious analogies and interesting properties this solution was named [4] the planetary structure vortex (*n, m*), moreover the varieties of structures are determined by one parameter α in the solution of the equations. We have researched geometrical and dynamics descriptions of the planetary vortex, such as: varieties of vortex structures and laws of their rotation; volumes, specific angular moments, and angular velocity of the vortical rings; the pressure fields and vectorial fields of pressure gradients in the vortex area [7]. Finally, the theoretical law of the planetary distances has been obtained in the primary vortex and in its final state of the planetary system with a central star, a theoretical analogue of Titius–Bode empiric law. In application to the Planetary system, all the basic theoretical descriptions show a high degree of correspondence to the real data of the system.

In particular, the gradient field of Archimedes force in the vortex explains two definite conditions of the planetary system development: 1) formation

of a massive star in the center of the system and 2) collection of all primary foggy masses to the equatorial plane of Laplace, and in this plane – to the centers of vortical rings – embryos of future planets.

In this work pressure fields and pressure gradients are investigated as in all area of a vortex and as in dependence on a few basic parameters of the problem. This reserch showed that a vicinity of the central vortex has a gradient ring where the gradient magnitude more their value on the vortex periphery at 10^4 times. Other features of the pressure gradient field also show that this field is one of several important factors of forming of star and planets.

REFERENCES

1. ***Alfven H.*** Structure and evolutionary history of the solar system / H. Alfven, G. Arrhenius. – K. : Naukova Dumka, 1981. – 332 p. (in Russian).
2. ***Klimishin I. A.*** Fragments of cosmology / I. A. Klimishin. – Ivano-Frankivsk : Gostynets, 2008. – 140 p. (in Ukrainian).
3. ***Loitsyansky L. G.*** Fluid and gas mechanics / L. G. Loitsyanskii. – M. : Drofa, 2003. – 840 p. (in Russian).
4. ***Perehrest V. I.*** A new solution of Euler's hydrodynamic equations for spherical vortex flows / V. I. Perhrest, R. V. Ivanov // Bulletin of DNU. Mechanics. – 2002. – Vol. 6, № 1. – P. 60–64 (in Ukrainian).
5. ***Perekhrest V. I.*** A new class of solutions of Euler's hydrodynamic equations for axisymmetric vortex flows / V. I. Perhrest // Reports NAN of Ukraine. – K., 2004. – № 3. – P. 64–71 (in Ukrainian).
6. ***Perehrest V. I.*** Planetary vortex and hypothesis of Laplace and Weizsacker / V. I. Perhrest // Bulletin of DNU. Mechanics. – 2009. – Vol. 13, № 2. – P. 113–124 (in Ukrainian).
7. ***Perehrest V. I.*** About structures of planetary vortices and regularity of their rotation/ V. I. Perhrest, N. N. Osypchuk // Bulletin of DNU. Mechanics. – 2010. – Vol. 14, № 1. – P. 110–118 (in Ukrainian).
8. ***Struve O.*** Astronomy of XX century / O. Struve, V. Zebergs. – M. : Mir, 1968. – 548 p. (in Russian).
9. ***Bodenheimer P.*** Multiple fragmentataion of protostars / P. Bodenheimer, A. Burkert, R. J. Klein, A. Boss // Protostars&Planets IV. – Arizona Press, 2000. – P. 675–701.
10. ***Boss. A. P.*** Edited Vince Maunings / A. P. Boss, S. S. Russel // Protostars&Planets IV. – Tucson : Arizona Press, 2000. – 378 p.
11. ***Boss. A. P.*** Rapid formation of outer giant planets by disk instabiliny / A. P. Boss // Astroph. Journal, 10 December 2003. – P. 577–581.
12. ***Mudryk I. R.*** RAPID: A fast, high resolution, flux-conservative algorithm desined for planet-disk interaction [Electronic resources] / I. R. Mudryk, N. W. Murray // The Journal of New Astronomy. – 2009. – [Cited 2008, 15 Dec.]. – Available from: http://arxiv.org/abs/0812.2938.
13. ***The Exoplanet Data Explorer*** [Electronic resources]. – Available from: http://exoplanets.org/table?datasets=explorer,kepler,other

Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара,
Придніпровська державна академія
будівництва та архітектури,
Дніпропетровськ, Україна

Надійшла до редколегії 03.05.2014