

УДК 539.1:534.1

*П. С. Ковальчук, канд. физ.-мат. наук,
И. В. Янчевский, канд. техн. наук*

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ НЕЗАМКНУТОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Представлено решение задачи об управлении осесимметричными колебаниями электроупругой сферической оболочки с заземленным краем. Постановка задачи заключается в определении профиля управляющего электрического сигнала, обеспечивающего движение некоторой точки вдоль образующей по наперед заданному закону. При моделировании динамических процессов привлекаются соотношения линейной теории тонких электроупругих оболочек, основанных на обобщенных гипотезах Кирхгофа–Лява. С использованием преобразования Лапласа задача сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра. Достоверность представленных результатов проверяется сопоставлением с конечноэлементными решениями.

Ключевые слова: электроупругость, незамкнутая сферическая оболочка, нестационарное электромеханическое нагружение, управление колебаниями, интегральное преобразование Лапласа.

Введение. В современных технических устройствах широкое распространение находят пьезокерамические элементы в качестве экономичных электромеханических преобразователей энергии. И среди всего разнообразия конфигураций серийно выпускаемых пьезоэлементов к достаточно распространенным относятся преобразователи в виде тонких сферических оболочек. Поэтому изучение закономерностей динамического их поведения при различных видах нагружения представляет очевидный практический интерес.

Некоторые результаты исследований установившихся и переходных процессов в тонкостенных пьезопреобразователях сферической формы при действии известного электрического и/или силового нагружения представлены в [2, 6, 10, 12, 13]. Вместе с тем, в ряде практически важных приложениях возникает необходимость определения профиля подводимого электрического воздействия для обеспечения заданного деформированного состояния преобразователя. Современные успехи в управлении деформациями электроупругих сферических оболочек за счет выбора профиля электрического нагружения можно найти в работах [1, 11, 14, 15]. В то же время, к единичным относятся публикации, в которых в качестве объекта исследований выступают электроупругие оболочки с различными конструктивными особенностями. Настоящая работа посвящена управлению осесимметричными колебаниями незамкнутой сферической оболочки, составленной из тонких электроупругого и упругого слоев. При этом сформулированное в работе условие управления обеспечивает движение некоторой точки вдоль образующей по наперед заданному закону.

Постановка задачи. Рассматривается сферическая оболочка, образованная внешним слоем из упругого материала постоянной толщины h_m и внутренним слоем толщиной h_p , изготовленным из электроупругого материала (индексами «m» и «p» здесь и далее обозначены характеристики этих слоев), при этом радиус поверхности соединения слоев равен R_1 . Оболочка является незамкнутой в нижнем полюсе, а размер кругового отверстия определяется сферическим углом раствора $\theta=\theta_0$, отсчитываемого от оси симметрии (рис. 1). На круговой области с углом $\theta=\theta_2$ в окрестности верхнего полюса действует механическая нагрузка интенсивностью p_0 . Электроупругий слой поляризован по толщине и имеет бесконечно тонкие электроды. Предполагается, что сплошной внутренний электрод заземлен, а внешний имеет выполненный в окружном направлении разрез при $\theta=\theta_1$ (рис. 1). Электроды нижней секции ($\theta>\theta_1$) закорочены.

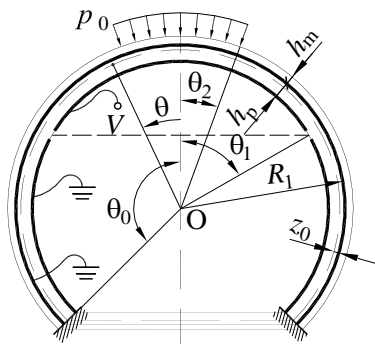


Рис. 1 – Схема нагружения оболочки

Считается, что оболочка жестко закреплена по краю и до момента приложения электромеханической нагрузки находится в состоянии покоя.

Целью работы является определение электрического потенциала $V(t)$, подводимого к внешнему токопроводящему покрытию верхней секции ($\theta<\theta_1$), при котором радиальные перемещения точки $\theta=\theta'$ происходят по заданному закону $f(t)$.

Уравнения движения. Будем полагать, что оболочка тонкая и для всего пакета в целом оправдано привлечение механических гипотез Кирхгофа–Лява, которые дополняются адекватными им гипотезами относительно распределения электрических полевых величин [4]. В результате рассматриваемая задача о деформации двухслойного преобразователя сводится к задаче о колебаниях поверхности приведения [5], уравнения движения которой по форме не отличаются от соответствующих уравнений движения однослойной электроупругой оболочки [7] с приведенными жесткостями на растяжение D_N и изгиб \bar{D} :

$$D_1 u_0 + D_2 w + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = q_0 + \left(1 + \frac{a_p}{R_0}\right) \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta};$$

$$D_3 u_0 + D_4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z - \left[2\bar{V} - \frac{a_p}{R_0} \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta\right)\right]. \quad (1)$$

В системе уравнений (1) t , θ – временная и меридиональная координаты; $u_0(\theta, t)$, $w(\theta, t)$ – перемещения точек поверхности приведения по касательной к меридиану оболочки и по внешней нормали; $q_0(\theta, t)$ и $q_z(\theta, t)$ – меридиональная и нормальная составляющие внешней нагрузки; $\bar{V} = V \cdot H(\theta_1 - \theta)$ – электрический потенциал на внешнем токопроводящем покрытии (рис. 1); H – единичная функция Хевисайда.

Также в системе (1) используются дифференциальные операторы

$$D_1 = -(1 + \delta) \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) \right];$$

$$D_2 = \delta \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (\operatorname{ctg}^2 \theta + \nu) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - (1 + \nu) \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$D_3 = -\delta \left[\frac{\partial^3}{\partial \theta^3} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \bar{\nu}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \bar{\nu}) \operatorname{ctg} \theta \right] + (1 + \nu) \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \right];$$

$$D_4 = \delta \left[\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - (1 + \operatorname{ctg}^2 \theta + \bar{\nu}) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (2 + \operatorname{ctg}^2 \theta - \bar{\nu}) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + 2(1 + \nu),$$

и приняты следующие обозначения: $a_p = z_0 - h_p / 2$ – смещение срединной поверхности пьезокерамического слоя от поверхности приведения с радиусом кривизны $R_0 = R_1 - z_0$; $z_0 = (c_{1p} h_p^2 - c_{1m} h_m^2) / 2D_N$ – расстояние между поверхностью приведения и поверхностью соединения слоев (рис. 1).

Расчетные выражения для постоянных коэффициентов таковы:

$$D_N = c_{1p} h_p + c_{1m} h_m; \quad \bar{D} = c_{1p} J_p + c_{1m} J_m + \Delta D; \quad \Delta D = (e_1^2 / \varepsilon_3) J_{p0}; \quad \delta = \bar{D} / D_N R_0^2;$$

$$J_p = (z_0^3 - (z_0 - h_p)^3) / 3; \quad J_m = ((z_0 + h_m)^3 - z_0^3) / 3; \quad J_{p0} = h_p^3 / 12;$$

$$\bar{\nu} = \nu + (1 - \nu) \Delta D / \bar{D}; \quad c_{1j} = 1 / s_{11}^j (1 - \nu_j^2); \quad e_1 = c_{1p} d_{31} (1 + \nu_p); \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^T (1 - 2d_{31} e_1 / \varepsilon_{33}^T);$$

s_{11}^j , ν_j – упругие податливости и коэффициенты Пуассона материалов

($j=m, p$); d_{31} , ε_{33}^T – пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезо-керамики.

При формулировке исходных соотношений и далее использованы безразмерные обозначения: перемещения u_0 , w и линейные геометрические параметры (R , h) отнесены к радиусу R_0 , время t – к $R_0\sqrt{\rho_h/D_N}$ ($\rho_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m$; ρ_j – плотности материалов), усилия q – к D_N/R_0 ; электрический потенциал V – к $-D_N/e_1$.

Для замыкания системы вынужденных колебаний преобразователя уравнения (1) необходимо дополнить однородными начальными условиями, граничными условиями

$$w|_{\theta=\theta_0}=0; \quad u_0|_{\theta=\theta_0}=0; \quad \frac{\partial w}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_0}=0, \quad (2)$$

соответствующими случаю жесткого защемления края, и условием управления, на основании которого определяется профиль электрического сигнала V . Принятая в настоящей работе математическая запись условия следующая:

$$w|_{\theta=\theta}=f(t), \quad (3)$$

где $f(t)$ – заданная функция.

Метод решения. Задача решается с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени. В пространстве изображений, с учетом симметрии по угловой координате, решение системы (1) ищем в виде разложения по собственным формам колебаний оболочки:

$$w^L = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^L(s) P_k(y); \quad u_0^L = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) P_k^1(y), \quad (4)$$

где $y = \cos\theta$; P_k , P_k^1 – полиномы Лежандра; c_k^L , b_k^L – неизвестные функции параметра преобразования s .

Для удовлетворения условий (2), изображения которых на основании (4) запишутся следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^L(s) P_k(y_0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) P_k^1(y_0) = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^L(s) P_k^1(y_0) = 0, \quad (5)$$

где $y_0 = \cos\theta_0$, вводится система дополнительных механических нагрузок q_0 и q_1 (рис. 2), равномерно распределенных на узкой полосе шириной $R_0\Delta\theta$ ($\Delta\theta \rightarrow 0$) в окрестности параллели $\theta = \theta_0 - \Theta$, близкой к месту защемления оболочки ($\Theta \rightarrow 0$).

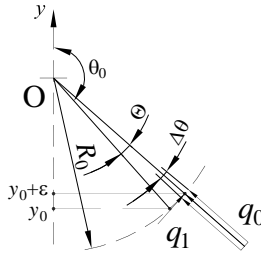


Рис. 2 – Дополнительные нагрузки

В результате этого, входящие в правую часть системы (1) трансформанты составляющих внешней механической нагрузки равны:

$$q_z^L(\theta, s) = -p_0^L(s) \cdot H(\theta_2 - \theta) - q_0^L(s) \cdot H(\Delta\theta - 2|\theta_0 - \Theta - \theta|);$$

$$q_\theta^L(\theta, s) = -q_1^L(s) \cdot H(\Delta\theta - 2|\theta_0 - \Theta - \theta|).$$
(6)

Переопределив выражения (6) через координату y и выполнив предельный переход к сосредоточенным радиальной Q_0 , тангенциальной N_0 и моментной M_0 нагрузкам на основании соотношений:

$$q_0 R_0 \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta \rightarrow 0} Q_0, \quad Q_0 R_0 \Theta \xrightarrow{\Theta \rightarrow 0} M_0 \quad \text{и} \quad q_1 R_0 \Delta\theta \xrightarrow{\Delta\theta \rightarrow 0} N_0,$$

функции q_z и q_θ могут быть представлены в виде рядов, аналогичных (4):

$$q_z^L(y, s) = \sum_{k=0}^{\infty} [p_0^L(s) \Delta_k^{(0)} + Q_0^L(s) \xi_k^{(8)} + M_0^L(s) \xi_k^{(9)}] P_k(y);$$

$$q_\theta^L(y, s) = \sum_{k=1}^{\infty} N_0^L(s) \xi_k^{(7)} P_k^1(y),$$
(7)

где

$$\xi_k^{(7)} = \frac{P_k^1(y_0)}{R_0 K} \frac{2k+1}{2(k^2+k)}; \quad \xi_k^{(8)} = \frac{1}{R_0 K} P_k(y_0) \frac{2k+1}{2}; \quad \xi_k^{(9)} = \frac{1}{R_0^2 K^2} \frac{P_k^1(y_0)}{\sqrt{1-y_0^2}} \frac{2k+1}{2};$$

$$\Delta_k^{(0)} = \frac{P_{k-1}(y_2) - P_{k+1}(y_2)}{2}; \quad y_2 = \cos\theta_2; \quad K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_0^{2n} \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}.$$

Электрический потенциал V также записываем рядом по полиномам Лежандра:

$$\bar{V}^L = V^L(s) \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(10)} P_k(y), \quad (8)$$

в котором $\xi_k^{(10)} = [P_{k-1}(y_1) - P_{k+1}(y_1)]/2$; $y_1 = \cos\theta_1$.

Очевидно, что при сплошном электроодировании следует положить $\theta_1 = \pi$, тогда, исходя из (8), получим $\xi_0^{(10)} = 1$ и $\xi_k^{(10)} = 0$ для $k \geq 1$.

После подстановки представлений (4), (7) и (8) в трансформированную по Лапласу систему уравнений (1), используя рекуррентные соотношения для сферических функций, получим:

при $k=0$

$$(s^2 + \xi_0^{(4)})c_0^L = p_0^L \Delta_0^{(0)} + Q_0^L \xi_0^{(8)} + V^L \xi_0^{(6)}; \quad (9a)$$

при $k \geq 1$

$$(s^2 + \xi_k^{(1)})b_k^L + \xi_k^{(2)}c_k^L = N_0^L \xi_k^{(7)} + \xi_k^{(5)}V^L; \quad (9b)$$

$$\xi_k^{(3)}b_k^L + (s^2 + \xi_k^{(4)})c_k^L = p_0^L \Delta_k^{(0)} + Q_0^L \xi_k^{(8)} + M_0^L \xi_k^{(9)} + \xi_k^{(6)}V^L,$$

где $\xi_k^{(1)} = (1 + \delta)[k^2 + k - 1 + \nu]$; $\xi_k^{(3)} = -[\delta(k^2 + k)(k^2 + k - 1 + \bar{\nu}) + (k^2 + k)(1 + \nu)]$;

$\xi_k^{(2)} = -[\delta(k^2 + k - 1 + \nu) + (1 + \nu)]$; $\xi_k^{(4)} = \delta(k^2 + k)(k^2 + k - 1 + \bar{\nu}) + 2(1 + \nu)$;

$\xi_k^{(5)} = \xi_k^{(10)}(1 + a_p/R_0)$; $\xi_k^{(6)} = -\xi_k^{(10)}(2 + (k^2 + k)a_p/R_0)$.

Из системы (9) для искомых трансформант будем иметь:

$$c_0^L(s) = \frac{D_0^c(s)}{s^2 + \xi_0^{(4)}}; \quad c_k^L(s) = \frac{D_k^c(s)}{D_k(s)}; \quad b_k^L(s) = \frac{D_k^b(s)}{D_k(s)} \quad (k \geq 1), \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$D_k(s) = s^4 + \lambda_k^{(1)}s^2 + \lambda_k^{(2)}; \quad D_0^c = p_0^L \Delta_0^{(0)} + Q_0^L \xi_0^{(8)} + V^L \xi_0^{(6)};$$

$$D_k^c(s) = (p_0^L \Delta_k^{(0)} + Q_0^L \xi_k^{(8)} + M_0^L \xi_k^{(9)}) (s^2 + \lambda_k^{(8)}) - N_0^L \xi_k^{(3)} \xi_k^{(7)} + V^L \xi_k^{(6)} (s^2 + \lambda_k^{(6)});$$

$$D_k^b(s) = -\xi_k^{(2)} (p_0^L \Delta_k^{(0)} + Q_0^L \xi_k^{(8)} + M_0^L \xi_k^{(9)}) + N_0^L \xi_k^{(7)} (s^2 + \lambda_k^{(7)}) + V^L \xi_k^{(5)} (s^2 + \lambda_k^{(5)}),$$

причем для коэффициентов справедливы равенства:

$$\lambda_k^{(1)} = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(4)}; \quad \lambda_k^{(2)} = \xi_k^{(1)} \xi_k^{(4)} - \xi_k^{(2)} \xi_k^{(3)}; \quad \lambda_k^{(7)} = \xi_k^{(4)}; \quad \lambda_k^{(8)} = \xi_k^{(1)};$$

$$\lambda_k^{(5)} = \xi_k^{(4)} - \xi_k^{(2)} \xi_k^{(6)} / \xi_k^{(5)}; \quad \lambda_k^{(6)} = \xi_k^{(1)} - \xi_k^{(3)} \xi_k^{(5)} / \xi_k^{(6)}.$$

Корни уравнения $D_k(s)=0$ являются чисто мнимыми, поэтому для удобства последующего обращения выражение для $D_k(s)$ представим в форме $D_k(s) = (s^2 + \alpha_k^{(1)2})(s^2 + \alpha_k^{(2)2})$, где $\alpha_k^{(j)}$ – модули упомянутых корней. В результате переход в пространство оригиналов может быть выполнен точно. С использованием теоремы о свертке и таблиц операционного исчисления [3] для коэффициентов разложений тангенциальных u_0 и радиальных w перемещений (4) получим:

$$c_0(t) = \int_0^t [\Delta_0^{(0)} p_0(\tau) + \xi_0^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_0^{(6)} V(\tau)] I^{(0)}(t-\tau) d\tau;$$

$$c_k(t) = \int_0^t [\Delta_k^{(0)} p_0(\tau) + \xi_k^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_k^{(9)} M_0(\tau)] I_k^{(8)}(t-\tau) d\tau -$$

$$- \xi_k^{(3)} \int_0^t \xi_k^{(7)} N_0(\tau) I_k^{(1)}(t-\tau) d\tau + \int_0^t \xi_k^{(6)} V(\tau) I_k^{(6)}(t-\tau) d\tau; \quad (11)$$

$$b_k(t) = -\xi_k^{(2)} \int_0^t [\Delta_k^{(0)} p_0(\tau) + \xi_k^{(8)} Q_0(\tau) + \xi_k^{(9)} M_0(\tau)] I_k^{(1)}(t-\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \xi_k^{(7)} N_0(\tau) I_k^{(7)}(t-\tau) d\tau + \int_0^t \xi_k^{(5)} V(\tau) I_k^{(5)}(t-\tau) d\tau.$$

Здесь подынтегральные функции I определяются формулами

$$I^{(0)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi_0^{(4)}}} \sin(\sqrt{\xi_0^{(4)}} t); \quad I_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\beta_k^{(r,j)}}{\alpha_k^{(j)}} \sin(\alpha_k^{(j)} t),$$

в которых

$$\beta_k^{(1,j)} = \frac{1}{\alpha_k^{(j)2} - \alpha_k^{(j)2}}; \quad \beta_k^{(r,j)} = \frac{\lambda_k^{(r)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(j)2} - \alpha_k^{(j)2}} \quad (j, \iota=1,2; \iota \neq j; r=\overline{5,8}).$$

Входящие в выражения (11) неизвестные функции Q_0 , M_0 , N_0 и V должны обеспечивать удовлетворение механическим граничным условиям

и условию управления. В результате подстановки (11) в оригиналы выражений (5) и равенство (3) с учетом разложений (4) получим систему интегральных уравнений Вольтерра с ядрами типа «свертка» относительно указанных неизвестных (для сокращения изложения материала в настоящей работе система не приводится). Ее решение выполняется численно, для чего на основании метода квадратур строится конечномерный аналог в виде системы линейных алгебраических уравнений, которую можно представить в матричном виде следующим образом:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{13} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \\ N_0 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{15}p_0 \\ M_{25}p_0 \\ M_{35}p_0 \\ F + M_{45}p_0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Здесь блоки M_{ij} являются нижними треугольными матрицами, а в вектор-столбцы входят коэффициенты кусочно-постоянной аппроксимации известных (p_0 и f) и искомых функций. При решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (12) эффективным приемом является привлечение метода последовательных приближений и метода регуляризации А. Н. Тихонова.

Найденные значения функций Q_0 , M_0 , N_0 и V позволяют вычислять компоненты перемещений и другие, представляющие интерес, характеристики переходного процесса. Таким образом, рассматриваемая задача об управлении деформированным состоянием оболочки сведена к решению СЛАУ (12) с последующим вычислением коэффициентов (11) рядов (4).

Отметим, расчетные соотношения существенно упрощаются для замкнутой оболочки, нагруженной равномерно распределенным по всей поверхности давлением интенсивностью p_0 ($\theta_2=\pi$), и сплошных электродов на электроупругом слое ($\theta_1=\pi$). В этом случае уравнение пульсирующих колебаний $w=w(t)$ на основании (1) принимает вид:

$$\xi_0^{(4)} w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \Delta_0^{(0)} p_0 + \xi_0^{(6)} V, \quad (13)$$

из которого с учетом условия (3) несложно записать выражение для управляющего электрического сигнала V .

Числовые результаты. Расчеты проводились для сферической оболочки, составленной из пьезокерамического слоя марки PZT-5 с относительной толщиной $h_p=0,04$ и слоя из титанового сплава ВТ-6 толщиной $h_m=0,02$ (физические свойства указанных материалов можно найти, например, в статье [9]). В рядах (4) удерживалось 200 членов; шаг дискретизации временного

интервала Δt при замене интегралов (11) конечными суммами для составления системы (12) принят равным 0,125; параметр регуляризации для реализации метода Тихонова вычислялся на основании принципа невязки [8].

При решении задачи (13) в статической постановке (когда пренебрегается инерционная составляющая) значение перемещения w электрически нагруженной биморфной оболочки при $V=1$ составит $\overline{w}_V = \xi_0^{(6)} / \xi_0^{(4)}$. При импульсном нагружении такой оболочки единичным потенциалом $V=H(t)$ решение дифференциального уравнения (13) несложно получить аналитическим методом вариации постоянных – $w(t) = w_V(t) = \overline{w}_V \left[1 - \cos\left(\sqrt{\xi_0^{(4)}} t\right) \right]$. График функции $w_V(t)$ изображен кривой 0 на рис. 3, а. Отметим, что представленные в настоящей работе радиальные перемещения отнесены к \overline{w}_V , а используемая на рис. 3, 4 величина $T = 2\pi / \sqrt{\xi_0^{(4)}}$ – период пульсирующих колебаний одномодовой оболочки. При наличии отверстия $\theta_0 = 7\pi/8$ (рис. 1) возникают высшие формы колебаний (кривая 1, рис. 3, а), которые становятся более ощутимыми с увеличением размера отверстия (кривая 2 получена для $\theta_0 = 3\pi/4$). Снизить нежелательное влияние указанной конструктивной особенности на колебания в экваториальной плоскости и обеспечить движение точки $y=0$ по закону $f = w_V(t)$ (3) можно за счет подведения вычисленного из системы (12) электрического напряжения V . Результаты для $\theta_0 = 7\pi/8$ и $\theta_0 = 3\pi/4$ показаны соответствующими кривыми 1 и 2 на рис. 3, б.

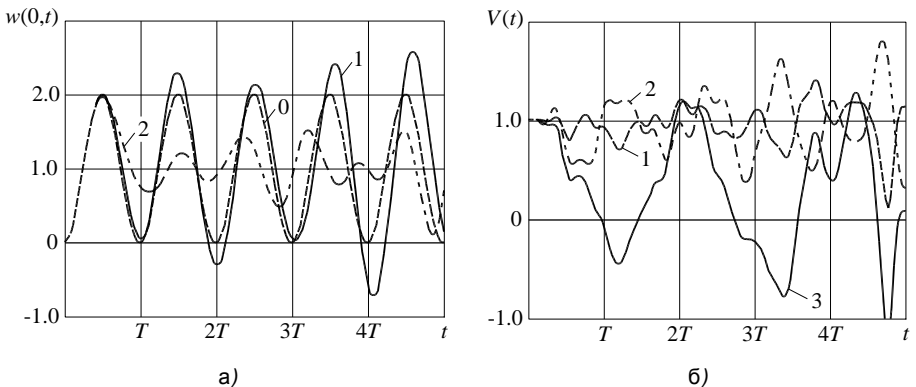


Рис. 3 – Числовые результаты при $\theta_0 = 7\pi/8$ и $\theta_0 = 6\pi/8$

Обеспечение принятого закона движения $f = w_V(t)$ в радиальном направлении для околуполлюсной точки ($y=0,999$) полусферической оболочки

($\theta_0=\pi/2$) со сплошными электродами ($\theta_1=\theta_0$, рис. 1) требует относительно больших энергетических затрат на формирование управляющего электрического воздействия (рис. 4, кривая 1). Проведенные числовые эксперименты показали, что одним из эффективных приёмов для снижения максимальных значений управления $V(t)$ в этом случае является секционирование токопроводящего покрытия (кривая 2 на рис. 4 получена для полусферической оболочки с $\theta_1=\pi/4$).

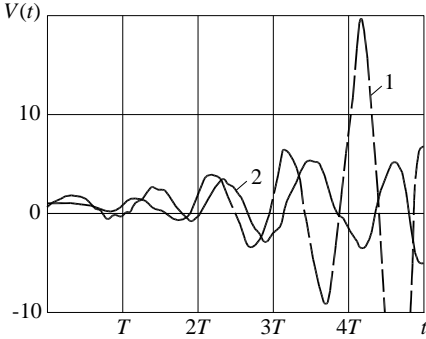


Рис. 4 – Управляющий сигнал для полусферической оболочки

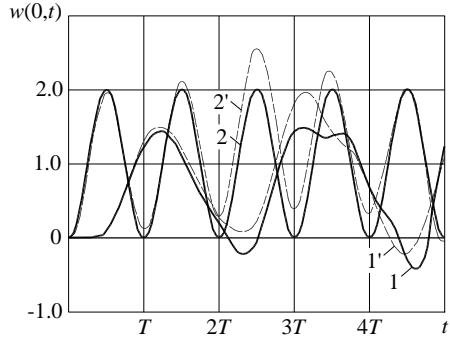


Рис. 5 – Сравнение с МКЭ

И если представленные выше результаты (рис. 3 и 4) получены в предположении отсутствия силового воздействия ($p_0=0$), то рис. 5 иллюстрирует изменение во времени радиального перемещения w в плоскости наибольшей параллели поверхности приведения ($y=0$) незамкнутой оболочки с $\theta_0=7\pi/8$ при действии механической нагрузки единичного ступенчатого профиля ($p_0=H(t)$), распределенной на области с $\theta_2=\pi/4$ (см. рис. 1). На рис. 5 кривая 1 построена при короткозамкнутых сплошных электродах (управление отсутствует – $V=0$). Подведение к внешнему токопроводящему покрытию вычисленного из СЛАУ (12) и изображенного на рис. 3, б кривой 3 потенциала V позволяет перестроить колебательный процесс и обеспечить движение исследуемой точки ($y=0$) практически по заданному закону $f=w_V(t)$ (рис. 5, кривая 2).

Отметим, что на рис. 5 пунктирными кривыми, обозначенными соответствующими цифрами со штрихом, показаны результаты решения рассматриваемой задачи методом конечных элементов, выполненного с помощью программного комплекса. Как следует из рис. 5, получено хорошее качественное совпадение численно-аналитических (кривые 1 и 2) и конечноэлементных (кривые 1' и 2') решений, а разработанная методика позволяет эффективно определять профиль управляющего воздействия ($w(\theta',t)\approx f(t)$). В целом,

качество управления зависит от ряда факторов, в частности, от геометрических параметров оболочки, условий механического ее закрепления, свойств материалов, образующих биморфную структуру, угловых размеров секционированных электродов, корректности постановки задачи и проч.

Выводы. В настоящей работе изложен численно-аналитический метод решения задачи об управлении нестационарными осесимметричными колебаниями пьезокерамического преобразователя в виде незамкнутой сферической оболочки. Управление осуществляется за счет электрического потенциала, профиль которого определяется из системы интегральных уравнений Вольтерра. Рассмотренное в работе условие управления может как обеспечить движение в радиальном направлении некоторой точки вдоль образующей по заданному закону, так и минимизировать уровень механически обусловленных колебаний оболочки. Метод решения задачи основан на применении разложения искомых функций по присоединенным функциям Лежандра, интегрального преобразования Лапласа и введении дополнительных неизвестных нагрузок для удовлетворения механических граничных условий. Приводятся числовые результаты, иллюстрирующие эффективность предложенного механизма управления, а также выполнена оценка достоверности полученных результатов путем их сопоставления с конечно-элементными решениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Бабаев А.** Излучение нестационарных акустических волн заданного профиля тонкостенным электроупругим сферическим излучателем / А. Бабаев // Зб. наук. пр. ДЕТУТ. Сер. Транспортні системи і технології. – 2009. – Вип. 14. – С. 117–131.
2. **Борисейко В. А.** Осесимметричные колебания тонкой пьезокерамической сферической оболочки / В. А. Борисейко, А. Ф. Улитко // Прикл. механика. – 1974. – Т. X, вып. 10. – С. 3–10.
3. **Диткин В. А.** Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М.: Высш. шк., 1965. – 466 с.
4. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя: Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
5. **Рудницкий С. И.** Колебания дискового биморфного преобразователя типа металл-пьезокерамика / С. И. Рудницкий, В. М. Шарاپов, Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 10. – С. 64 – 72.
6. **Савин В. Г.** Преобразование электрических импульсов в акустические экранированной сферической пьезокерамической оболочкой / В. Г. Савин, И. О. Моргуn // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 133–142.
7. **Савин В. Г.** Уравнения колебаний пьезокерамических сферических и цилиндрических оболочек / В. Г. Савин, И. О. Моргуn // Інформаційні системи, механіка та керування: наук.-техн. зб. – 2009. – Вип. 5. – С. 85–96.
8. **Тихонов А. Н.** Численные методы решения некорректных задач / [А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола]. – М.: Наука, 1990. – 229 с.
9. **Янчевский И. В.** Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении / И. В. Янчевский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць / Діпропетр. нац. ун-т. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 16. – С. 303–313.
10. **Bian Z.-G.** Vibration of a functionally graded piezoelectric spherical shell filled with fluid / Z.-G. Bian, Ch.-B. Liu, W.-Q. Chen // IEEE. – 2009. – Iss. 12. – P. 87–97.

11. **Birman V.** Axisymmetric dynamics of composite spherical shells with active piezoelectric/composite stiffeners / V. Birman, S. Griffin, G. Knowles // *Acta Mechanica*. – 2000. – Vol. 141, N 1–2. – P. 71–83.

12. **Hu J.** Axisymmetric Vibrations of a Piezoelectric Spherical Shell Submerged in a Compressible Viscous Fluid Medium / J. Hu, Zh. Qiu, Ts.-Ch. Su // *J. Vib. Acoust.* – 2010. – Vol. 132, Iss. 6. – P. 102–112.

13. **Li H.** Spherical-symmetric steady-state response of fluid-filled laminate piezoelectric spherical shell under external excitation / H. Li, Z. Liu, Q. Lin // *Acta Mechanica*. – 2001. – Vol. 150, N. 1–2. – P. 53–66.

14. **Paul J.** Synthesis of Optimal, Single-Frequency, Passive Control Laws with Application to Reducing the Acoustic Radiation from a Submerged Spherical Shell / J. Paul, Jr. Titterton // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1999. – Vol. 105, N 4. – P. 2261–2268.

15. **Scandrett C.** Scattering and active acoustic control from a submerged spherical shell / C. Scandrett // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2002. – Vol. 111, Iss. 2. – P. 893–907.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН України,
Київ, Україна*

Поступила в редколлегию 05.10.2011

*П. С. Ковальчук, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Янчевський, канд. техн. наук*

КЕРУВАННЯ КОЛИВАННЯМИ НЕЗАМКНЕНОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ ЕЛЕКТРОПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ

Представлено розв'язання задачі з керування осесиметричними коливаннями електропружної сферичної оболонки з защемленим краєм. Постановка задачі полягає в визначенні профілю керуючого електричного сигналу, що забезпечує рух деякої точки вздовж твірної за наперед заданим законом. При моделюванні динамічних процесів залучаються співвідношення лінійної теорії тонких електропружних оболонок, заснованих на узагальнених гіпотезах Кірхгофа–Лява. Із застосуванням перетворення Лапласа задача зводиться до системи інтегральних рівнянь Вольєрра. Вірогідність результатів перевірялася зіставленням зі скінченно-елементними розв'язками.

Ключові слова: електропружність, незамкнена сферична оболонка, нестационарне електромеханічне навантаження, керування коливаннями, інтегральне перетворення Лапласа.

*P. S. Koval'chuk, Associate Professor,
I. V. Yanchevskiy, Associate Professor*

VIBRATION CONTROL OF NON-CLOSED SPHERICAL SHELL MADE OF ELECTROELASTIC MATERIAL

Solution of axisymmetric vibration control problem for electroelastic spherical shell with fixed edge is presented. Statement of the problem consists in definition of controlling electric signal which provides movement of some point along moving line due set law in time. Relations of linear theory of thin electroelastic shells based on generalized Kirchhoff–Love hypotheses are involved at modelling dynamic processes. Using integral Laplace transform the problem is reduced to system of integral Volterra equations. Reliability of presented results is checked by comparison with finite element solutions.

Keywords: electroelasticity, non-closed spherical shell, non-stationary electromechanical loading, vibration control, integral Laplace transform.