УДК 539.3

О. В. Піголь, Є. А. Сторожук, д-р фіз.-мат. наук

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТАНУ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ

Дана постановка, наведені основні нелінійні рівняння і описана методика чисельного розв'язання пружно-пластичних задач теорії тонких некругових циліндричних оболонок з криволінійним отвором при дії статичного навантаження. Система розв'язувальних рівнянь отримана з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і методу скінченних елементів. Геометричні гіпотези Кірхгофа – Лява реалізовані методом множників Лагранжа.

Ключові слова: *циліндрична оболонка, некруговий поперечний переріз, криволінійний отвір, пластичні деформації, метод скінченних елементів.*

Вступ. Тонкі циліндричні оболонки кругового і некругового перерізу знаходять широке застосування в різноманітних галузях техніки як конструктивні елементи машин та приладів. В більшості випадків ці елементи по конструктивним або технологічним міркуванням мають отвори різної форми. При значних рівнях діючих навантажень біля вказаних концентраторів виникають зони підвищених напружень, а властивості їх матеріалу характеризуються нелінійною діаграмою деформування.

Основні теоретичні результати по проблемі концентрації напружень в циліндричних оболонках з отворами при дії статичних навантажень отримані для випадку кругового поперечного перерізу на основі розв'язання лінійно-пружних задач і викладені в узагальнюючих монографіях та оглядових статтях [7, 8, 10, 11].

Результати розв'язання крайових задач з врахуванням нелінійних факторів (пластичних деформацій і скінченних прогинів) одержані лише для кругових циліндричних оболонок, послаблених еліптичним [12], одним [5] або двома [2] круговими отворами.

В більшості публікацій, присвячених некруговим циліндричним оболонкам, розглядаються оболонки без концентраторів напружень (отворів, вирізів тощо). За допомогою аналітичних, чисельних і експериментальних методів досліджено напружено-деформований стан (НДС) [1], стійкість [3, 4] і коливання [9, 15] овальних та еліптичних циліндричних оболонок при дії різного виду навантажень.

Дослідження концентрації напружень в некругових циліндричних оболонках з отворами виконані в незначній кількості робіт і лише в лінійно-пружній постановці. Так, в [6] вивчено НДС еліптичної циліндричної оболонки з прямокутним вирізом при дії нерівномірно розподіленого вздовж напрямної тиску. Вплив еліптичності поперечного перерізу на НДС в області кругового отвору на бічній поверхні циліндричної оболонки, навантаженої осьовими розтягувальними зусиллями, досліджено в [13].

З огляду праць по даній проблемі випливає, що теоретичні роботи про пружно-пластичний стан некругових циліндричних оболонок, послаблених криволінійними отворами, в науковій літературі на даний час відсутні.

Тому нижче дано постановку пружно-пластичних задач статики для некругових циліндричних оболонок з криволінійним отвором, наведено основні нелінійні рівняння і викладено методику чисельного розв’язання задач даного класу.

Постановка задачі. Основні співвідношення. Тонку циліндричну оболонку некругового поперечного перерізу і товщини h, яка послаблена криволінійним отвором, віднесемо до ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, де α_1, α_2 і γ – довжини твірної, дуги напрямної і нормалі до серединної поверхні оболонки. Вважаємо, що оболонка виготовлена з однорідного ізотропного матеріалу і знаходиться під дією поверхневих $\{p_\alpha\} = \{p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, p_\gamma\}^T$ та крайових $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ сил. Геометрію серединної поверхні оболонки задамо в глобальній декартовій системі координат (X, Y, Z), вісь OX якої паралельна твірній, а вісь OZ проходить через центр отвору. Площину поперечного перерізу оболонки віднесемо до системи координат (Y, Z), а його рівняння запишемо в параметричній формі:

$$Y = Y(t); \quad Z = Z(t) \quad (a \le t \le b).$$

За допомогою виразу для довжини дуги напрямної

$$\alpha_2(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dY(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ(s)}{ds}\right)^2}\, ds$$

будуємо табличну функцію

$$(\alpha_2)_i = \alpha_2(t_i) \quad (i = 1,2,\ldots,N),$$

яка використовується при розбитті серединної поверхні оболонки на скінченні елементи (СЕ).

Кривину напрямної обчислюємо за формулою

$$k = \frac{\left|\frac{dY}{dt}\frac{d^2Z}{dt^2} - \frac{dZ}{dt}\frac{d^2Y}{dt^2}\right|}{\left[\left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Геометричні співвідношення представимо у векторній формі згідно теорії непологих оболонок, в якій мають місце гіпотези Кірхгофа – Лява [7]:

$$\varepsilon_{11}=\vec{e}_1\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\alpha_1}\ ;\ \varepsilon_{12}=\vec{e}_2\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\alpha_1}+\vec{e}_1\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\alpha_2}\ ;$$

$$\mu_{11}=\vec{e}_1\cdot\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\alpha_1}\ ;\ 2\mu_{12}=\vec{e}_2\cdot\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\alpha_1}+\vec{e}_1\cdot\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial\alpha_2}\ \ (1\to 2),$$

де $\vec{u}=u\vec{e}_1+v\vec{e}_2+w\vec{n}=u_1\vec{i}_1+u_2\vec{i}_2+u_3\vec{i}_3$ – вектор переміщень точок серединної поверхні оболонки; $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1,\alpha_2,\gamma)$; $\vec{i}_1,\vec{i}_2,\vec{i}_3$ – орти глобальної декартової системи координат (X,Y,Z); $\vec{\varphi}=\varphi_{\alpha_1}\vec{e}_1+\varphi_{\alpha_2}\vec{e}_2=\varphi_1\vec{i}_1+\varphi_2\vec{i}_2+\varphi_3\vec{i}_3$ – вектор кутів повороту нормалі, які визначаються згідно гіпотез Кірхгофа – Лява за формулами

$$\varphi_{\alpha_1}=-\vec{n}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial\alpha_1}\quad(1\to 2)\ .$$

Вважаючи, що навантаження просте, фізичні співвідношення запишемо на основі теорії малих пружно-пластичних деформацій у вигляді [8]:

$$\sigma_{11}=\sigma_{11}^0+\sigma_{11}^P\ ;\ \sigma_{12}=\sigma_{12}^0+\sigma_{12}^P\ ;$$

$$\sigma_{11}^0=\frac{2G}{1-\nu}(e_{11}+\nu e_{22})\ ;\ \sigma_{12}^0=Ge_{12}\ ;$$

$$\sigma_{11}^P=2G\left[\left(\frac{1-\omega_i}{1-\nu_i}-\frac{1}{1-\nu}\right)e_{11}+\left(\frac{(1-\omega_i)\nu_i}{1-\nu_i}-\frac{\nu}{1-\nu}\right)e_{22}\right];\ \sigma_{12}^P=-G\omega_i e_{12};$$

$$e_{11}=\varepsilon_{11}+\gamma\mu_{11}\,;\ e_{12}=\varepsilon_{12}+2\gamma\mu_{12}\ \ (1\leftrightarrow 2).$$

Тут G,ν – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; ω_i,ν_i – функція пластичності і змінний коефіцієнт поперечної деформації; величини з індексом ”0” зверху відповідають лінійній теорії оболонок, а з індексом ”P” враховують пластичні деформації матеріалу у відповідних виразах.

Методика чисельного розв’язання фізично нелінійних задач для некругових циліндричних оболонок з отворами. Систему розв’язувальних рівнянь отримаємо з принципу можливих переміщень за допомогою методу додаткових напружень і методу скінченних елементів (МСЕ). Приймаючи, що у варіаційному рівнянні принципу можливих переміщень нелінійні члени, які враховують деформації пластичності матеріалу, відомі з попереднього наближення і не варіюються та реалізуючи гіпотези Кірхгофа – Лява методом множників Лагранжа, приходимо до такого змішаного функціоналу [7]:

$$\Pi^{LN} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(T_{11}^{0}\varepsilon_{11} + T_{22}^{0}\varepsilon_{22} + T_{12}^{0}\varepsilon_{12} + M_{11}^{0}\mu_{11} + M_{22}^{0}\mu_{22} +$$

$$+ 2M_{12}^{0}\mu_{12})d\Sigma + \iint\limits_{\Sigma}(T_{11}^{P}\varepsilon_{11} + T_{22}^{P}\varepsilon_{22} + T_{12}^{P}\varepsilon_{12} + M_{11}^{P}\mu_{11} + \qquad (1)$$

$$+ M_{22}^{P}\mu_{22} + 2M_{12}^{P}\mu_{12})d\Sigma + \iint\limits_{\Sigma}(T_{1\gamma}\varepsilon_{1\gamma} + T_{2\gamma}\varepsilon_{2\gamma})d\Sigma - A,$$

де $T_{ij}, M_{ij}\,(i,\, j = 1{,}2)$ – внутрішні зусилля і моменти; A – робота зовнішніх поверхневих $\{p_\alpha\}$ і крайових $\{m_k\}$ сил; $T_{1\gamma}, T_{2\gamma}$ – множники Лагранжа; Σ – область серединної поверхні оболонки; $\varepsilon_{1\gamma}, \varepsilon_{2\gamma}$ – вирази виду

$$\varepsilon_{1\gamma} = \vec{\varphi}\cdot\vec{e}_1 + \frac{\partial\vec{u}}{\partial\alpha_1}\cdot\vec{n} \quad (1 \to 2)\,.$$

В змішаному функціоналі (1) немає похідних вище першого порядку, розв'язувальними є сім функцій ($u, v, w, \varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, T_{1\gamma}, T_{2\gamma}$), які можна незалежно варіювати, а множники Лагранжа мають зміст перерізуючих зусиль.

Лінійна задача розв'язується за допомогою варіанту МСЕ, розробленого для розрахунку тонких оболонок складної геометрії, послаблених отворами. Запропонована модифікація МСЕ має особливість, яка полягає в тому, що для компонент деформації оболонки використовуються співвідношення у векторній формі, а геометричні гіпотези Кірхгофа – Лява реалізуються методом множників Лагранжа. В цьому випадку в межах кожного СЕ апроксимуються проекції векторів переміщень $\vec{u}$ і кутів повороту $\vec{\varphi}$ на осі глобальної декартової системи координат (X, Y, Z) і множники Лагранжа:

$$u_k = \sum_{i=1}^{I} u_k^{(i)} L_i(\xi_1, \xi_2);$$

$$\phi_k = \sum_{i=1}^{I} \phi_k^{(i)} L_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$T_{m\gamma} = \sum_{i=1}^{I} T_{m\gamma}^{(i)} L_i(\xi_1, \xi_2) \quad (m = 1, 2).$$

Тут i – локальний номер вузла СЕ; $L_i(\xi_1, \xi_2)$ – функції форми локальних координат ξ_1, ξ_2.

Відмітимо, що вузлові значення проекцій векторів переміщень і кутів повороту на осі системи координат (X, Y, Z) виражаються через компоненти цих векторів в системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$.

Побудований таким чином криволінійний СЕ оболонки задовольняє умовам неперервності векторів переміщень і кутів повороту та точно описує поступальну частину переміщення СЕ як жорсткого цілого.

З умов стаціонарності дискретного аналогу функціоналу (1) отримаємо систему розв'язувальних рівнянь для тонкої некругової циліндричної оболонки з криволінійним отвором при деформуванні за межею пружності, яка в матричній формі має вигляд

$$[K]\{q\} = \{P\} - \{\Phi\},$$

де $[K]$ – матриця жорсткості лінійно-пружної оболонки; $\{q\}$ – вектор вузлових ступенів свободи; $\{P\}$ – вектор навантажень; $\{\Phi\}$ – вектор нелінійностей, які враховують пластичні деформації матеріалу.

Апробація методики. Ефективність запропонованої методики перевірялася шляхом розв'язання тестових задач і порівняння отриманих при цьому результатів з відомими даними інших авторів.

Розглянемо деформування кругової циліндричної оболонки радіуса R з еліптичним отвором, яка знаходиться під дією осьових зусиль $p = const$ (рис. 1). Дослідження проведено для таких значень геометричних і механічних параметрів:

$$\kappa = \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} = 1{,}667\,;\; 2r_0 = a + b\,;\; b = 2a\,;\; E = 70\,ГПа\,;\; \nu = 0{,}4\,,$$

де a, b – півосі еліпса; E – модуль Юнга матеріалу оболонки.

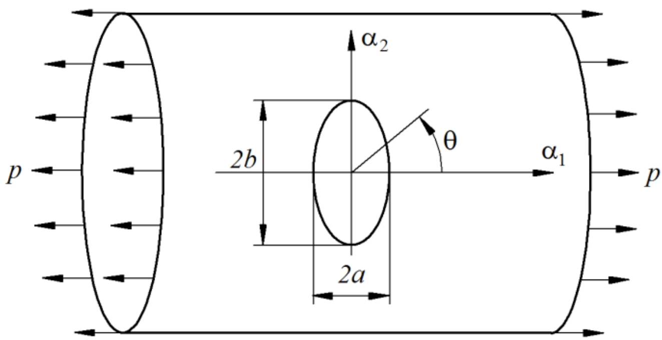

Рис. 1 – **Циліндр з еліптичним отвором під дією осьових зусиль**

На контурі отвору прийняті умови вільного краю, а на значній віддалі від контуру отвору – умови безмоментного напруженого стану.

На рис. 2 дано розподіл коефіцієнта концентрації мембранних напружень $k_\tau = \sigma_\tau h/p$ уздовж контуру отвору (τ – дотична до контуру отвору). Суцільна крива відповідає результатам, одержаним з використанням розробленого варіанту МСЕ, штрихова – результатам аналітичного розв'язку [10], а точки – експериментальним даним, отриманим в NASA [14]. Як випливає з наведених даних, запропонована модифікація МСЕ дає можливість отримати достатньо точний розв'язок крайової задачі для циліндричних оболонок з криволінійним отвором.

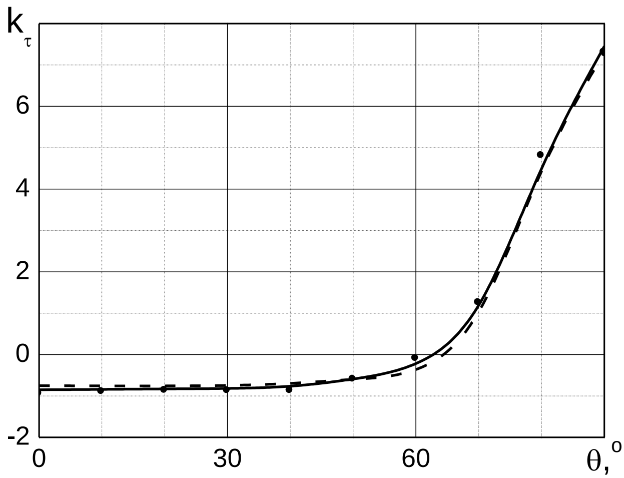

Рис. 2 – **Коефіцієнт концентрації мембранних напружень на контурі отвору**

Висновки. Таким чином, в даній статті дано постановку, наведено основні рівняння і описано методику чисельного розв'язання пружнопластичних задач теорії тонких некругових циліндричних оболонок з криволінійним отвором при дії статичного навантаження. Запропонований в роботі варіант МСЕ має такі переваги перед класичним МСЕ.

1. Реалізація геометричних гіпотез Кірхгофа – Лява за допомогою множників Лагранжа дозволила побудувати для тонких оболонок функціонал, який не містить похідних вище першого порядку, що спростило процедуру дискретизації основних рівнянь.

2. Використання для компонент деформації оболонки співвідношень, записаних у векторній формі, повністю виключає негативний вплив жорстких переміщень на збіжність результатів, що значно підвищує точність розв'язування задач теорії оболонок.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Григоренко Я. М.*** Анализ напряженно-деформированного состояния некруговых цилиндрических оболочек при изменении их толщины и сохранении веса / Я. М. Григоренко, Л. И. Захарийченко // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 6. – С. 39–47.
2. ***Гузь А.Н***. Упругопластическое состояние гибких цилиндрических оболочек с двумя круговыми отверстиями / А. Н. Гузь, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикладная механика. – 2004. – **40**, № 10. – С. 107–112.
3. ***Железнов Л. П.*** Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – **43,** № 4. – С. 155–160.
4. ***Коноплев Ю. Г.*** Теоретико-экспериментальный метод в задаче устойчивости цилиндрической оболочки эллиптического сечения / Ю. Г. Коноплев, А. А. Саченков // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. – Казань: Изд-во КГУ, 1984. – Вып. 17, ч. 1. – С. 135–142.
5. ***Кравчук А. П.*** Распределение напряжений в гибких цилиндрических оболочках с круговым отверстием за пределом упругости / А. П. Кравчук, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 12. – С. 45–49.
6. ***Кузнецов Ю. М.*** НДС некруговой цилиндрической оболочки с вырезом под воздействием неравномерно распределенного вдоль направляющей давления // Исследования по теории пластин и оболочек: тр. семинара КФТИ КФ АН СССР. – Казань: Изд-во КГУ, 1992. – Вып. 24. – С. 35–39.
7. ***Максимюк В. А.*** Вариационно-разностные методы в линейных и нелинейных задачах деформирования оболочек из металлических и композитных материалов (обзор) / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 6. – С. 3–80.
8. ***Максимюк В. А.*** Решение нелинейных задач статики тонких оболочек сеточными методами / В. А. Максимюк, Е. А. Сторожук, И. С. Чернышенко // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 1. – С. 41–70.
9. ***Мейш В. Ф.*** Вынужденные колебания поперечно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения при нестационарных нагрузках / В. Ф. Мейш, Н. П. Кепенач // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць / Дніпропетровський національний університет. – Д. : Ліра, 2013. – Вип. 21. – С.157–166.
10. Методы расчета оболочек: в 5-ти т.; Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов [и др.]. – К. : Наук. думка,1980. – 636 с.
11. Механика композитов: в 12-ти т.; Т. 7. Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – К. :А.С.К., 1998. – 387 с.
12. ***Чернышенко И. С.*** Неупругое деформирование гибких цилиндрических оболочек с эллиптическим отверстием / И. С. Чернышенко, Е. А. Сторожук, Ф. Д. Кадыров // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 5. – С. 46–54.
13. ***Oterkus E.*** Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout / E. Oterkus, E. Madenci, M. Nemeth // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2007. – Vol. **2**, № 4. – P. 695–727.
14. ***Tennyson R. S.*** Analysis of the stress distribution around unreinforced cutouts in circular cylindrical shells under axial compression / R. S. Tennyson, D. K. Roberts, D. Zimcik // NRC, NASA, Ann.Progr. Rept. – UTJAS, 1968. – P. 118–129.
15. ***Yamada G.*** Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile / G. Yamada, T. Irie, Y. Tagawa // J. Sound and Vibr. – 1984. – **95**, № 1. – P. 117–126.

О. В. Пиголь, Е. А. Сторожук, д-р физ.-мат. наук

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Дана постановка, приведены основные нелинейные уравнения и описана методика численного решения упругопластических задач теории тонких некруговых цилиндрических оболочек с криволинейным отверстием при действии статического нагружения. Система разрешающих уравнений получена из принципа возможных перемещений с помощью метода дополнительных напряжений и метода конечных элементов. Геометрические гипотезы Кирхгофа – Лява реализованы методом множителей Лагранжа.

Ключевые слова: *цилиндрическая оболочка, некруговое поперечное сечение, криволинейное отверстие, пластические деформации, метод конечных элементов.*

O. V. Pigol, E. A. Storozhuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

RESEARCH METHODOLOGY OF ELASTOPLASTIC STATE OF NON-CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH THE CURVILINEAR HOLE

The formulation, the main nonlinear equations and describes of the method of numerical solution of elastoplastic problems of the theory of thin non-circular cylindrical shells with curvilinear hole under static loading are presented. The system governing equations is derived from the principle of virtual displacements using the additional stresses and the finite element method. Geometric Kirchhoff – Love hypothesis are implemented with application of Lagrange's multipliers method.

Keywords: *cylindrical shell, a non-circular cross-section, curvilinear hole, plastic deformation, finite element method.*

The main theoretical results of the stress concentration problem in cylindrical shells with holes under the static loads action were obtained for the circular cross-section case based on solving linear elastic problems and summarizing expound in monographs and review articles [1–4]. The results of solving boundary value problems in view of nonlinear factors (plastic deformation and finite deflections) were obtained only for circular cylindrical shells with elliptical cross-section weakened by one or two circular holes. Commonly in publications about non-circular cylindrical shells shells without stress concentrators (holes, cut-outs) are considered. Researches of stress concentration in non-circular cylindrical shells with holes were carried in insignificant quantities and only in linear-elastic formulation.

Therefore, in this paper, the problems of deformation characteristics for non-circular cylindrical shells with a curvilinear hole, the basic nonlinear equations and the numerical solution method of such type of problems are formulated.

A thin isotropic cylindrical shell non-circular cross-section and thickness h, which weakened the curvilinear hole and stand under the action of surface and boundary forces is considered. The shell is put into an orthogonal coordinate system $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$, where α_1, α_2 and γ – the lengths of the generatrix, the arc guide and the normal to the middle surface of the shell correspondingly.

Geometric equations are presented in a vector form according to the theory of shallow shells, in which Kirchhoff-Love hypothesis are appropriated [7].

Supposing the case of simple loading , physical equations is written basing on the theory of small elastoplastic deformations [3].

The system is solved using the equations derived from the principle of possible displacements using the additional stresses and finite element method (FEM). Assuming that in the variational equations of possible movement principle nonlinear members, that take into account deformation of plasticity of the material, known from previous approximation aren't varied and implementing Kirchhoff – Love hypothesis using Lagrange multipliers, mixed functional could be derived. [7]:

$$\begin{gathered}\Pi^{LN} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}(T_{11}^{0}\varepsilon_{11} + T_{22}^{0}\varepsilon_{22} + T_{12}^{0}\varepsilon_{12} + M_{11}^{0}\mu_{11} + M_{22}^{0}\mu_{22} + \\ + 2M_{12}^{0}\mu_{12})d\Sigma + \iint\limits_{\Sigma}(T_{11}^{P}\varepsilon_{11} + T_{22}^{P}\varepsilon_{22} + T_{12}^{P}\varepsilon_{12} + M_{11}^{P}\mu_{11} + \\ + M_{22}^{P}\mu_{22} + 2M_{12}^{P}\mu_{12})d\Sigma + \iint\limits_{\Sigma}(T_{1\gamma}\varepsilon_{1\gamma} + T_{2\gamma}\varepsilon_{2\gamma})d\Sigma - A,\end{gathered} \tag{1}$$

where $T_{ij}, M_{ij}\ (i, j = 1{,}2)$ – internal forces and moments (superscript "0" corresponds to the linear theory of shells, "P" – applied for the plastic deformation of the material in the relevant expressions); $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}\ (i, j = 1{,}2)$ – components of deformation of the shell; A – the work of external forces; $T_{1\gamma}, T_{2\gamma}$ – Lagrange multipliers; Σ – the area of the middle surface of the shell; $\varepsilon_{1\gamma}, \varepsilon_{2\gamma}$ – expressions of the form: $\varepsilon_{1\gamma} = \vec{\varphi} \cdot \vec{e}_1 + \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial \alpha_1} \cdot \vec{n} \quad (1 \to 2)$; $\vec{u}, \vec{\varphi}$ – vectors of displacements of points of the middle surface of the shell and the rotation angles of the normal correspondingly.

The linear problem is solved with applying a variant of the FEM, that was designed to calculate the strength of thin shells of complex geometry, weakened by holes.

The effectiveness of the proposed method was verified on test problems and compared with the results from other researchers obtained with the known data. As an example, the deformation test of the circular cylindrical shell weakened by an elliptical hole and standing under the influence of axial forces is considered.

REFERENCES

1. ***Grigorenko Ya. M.*** Analysis of the stress-strain state of non-circular cylindrical shells subjected to thickness vibration and weight retention / Ya. M. Grigorenko, L. I. Zakhariichenko // Appl. mechanics. – 1999. – **35**, № 6. – P. 39–47 (in Russian).
2. ***Guz A. N.*** Elastoplastic state of flexible cylindrical shells with two circular holes / A. N. Guz, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Appl. mechanics. – 2004. – **40**, № 10. – P. 107–112 (in Russian).
3. ***Zheleznov L. P.*** Nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells under axial compression and internal pressure / L. P. Zheleznov, V. V. Kabanov // Appl. mechanics and techn. physics. – 2002. – **43**, № 4. – P. 155–160 (in Russian).
4. ***Konoplyev Yu. G.*** Theoretical and experimental method in the problem of stability of a cylindrical shell elliptical cross-section / Yu. G. Konoplev, A. A. Sachenkov // Studies in the theory of plates and shells: proceedings of the Workshop KPhTI of Kazan Branch of the USSR Academy of Sciences. – Kazan: Publishing House of KSU, 1984. – Vol. **17**, Part 1. – P. 135–142 (in Russian).
5. ***Kravchuk A. I.*** Stress distribution in flexible cylindrical shells with a circular hole beyond the elastic limit / A. I. Kravchuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Appl. mechanics. – 1988. – **24**, № 12. – P. 45–49 (in Russian).
6. ***Kuznetsov Yu. M.*** SSS non-circular cylindrical shell with a cut under the influence of non-uniformly distributed along the rail pressure / Yu. M. Kuznetsov // Studies in the theory of plates and shells: proceedings of the Workshop KPhTI of Kazan Branch of the USSR Academy of Sciences. – Kazan: Publishing House of KSU, 1992. – Vol. **24**. – P. 35–39 (in Russian).
7. ***Maksimyuk V. A.*** Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Appl. mechanics.– 2012. – **48**, № 6. – P. 3–80 (in Russian).
8. ***Maksimyuk V. A.*** Solution of nonlinear static problems for thin shells using mesh-based methods to / V. A. Maksimyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // Appl. mechanics. – **45**, № 1. – P. 41–70 (in Russian).
9. ***Meish V. F.*** Forced oscillations of transverse stiffened cylindrical shells with elliptical cross-section under non-stationary loads / V.F. Meish, N.P. Kepenach // Problems of computational mechanics and strength of structures: collection of scientific articles. – D. : Lyra, 2013. – Vol. 21. – P.157–166 (in Ukrainian).
10. Methods of calculation of shells: In 5 v.; Vol. 1. Theory of thin shells weakened by holes / A. N. Guz, I. S. Chernyshenko, V. N. Chekhov, [et al.]. – K. : Nauk. Dumka, 1980. – 636 p. (in Russian).
11. Mechanics of composite materials: In 12 v.; Vol. 7. Stress concentration / A. N. Guz, A. S. Kosmodamianskii, V. P. Shevchenko, [et al.]. – K. : A.S.K., 1998. – 387 p. (in Russian).
12. ***Chernyshenko I.S.*** Inelastic deformation of flexible cylindrical shells with an elliptic hole / I. S. Chernyshenko, E. A. Storozhuk, F. D. Kadyrov // Appl. mechanics. – 2007. – **43**, № 5. – P. 46–54 (in Russian).
13. ***Oterkus E.*** Stress analysis of composite cylindrical shells with an elliptical cutout / E. Oterkus, E. Madenci, M. Nemeth // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2007. – Vol. **2**, № 4. – P. 695–727.
14. ***Tennyson R. S.*** Analysis of the stress distribution around unreinforced cutouts in circular cylindrical shells under axial compression / R. S. Tennyson, D. K. Roberts, D. Zimcik // NRC, NASA, Ann. Progr. Rept. – UTJAS, 1968. – P. 118–129.
15. ***Yamada G.*** Free vibration of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile / G. Yamada, T. Irie, Y. Tagawa // J. Sound and Vibr. – 1984. – **95**, № 1. – P. 117–126.

Інститут механіки
ім. С. П. Тимошенка НАН України,
Київ, Україна

Надійшла до редколегії 02.07.2014