

УДК 539.3

В. Г. Попов, д-р фіз.-мат. наук, О. В. Литвин, канд. фіз.-мат. наук

НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ТРИЛАНКОВИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ ХВИЛЬОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розв'язана задача визначення напруженого стану в околі тунельного жорсткого включення, що в перерізі представляє собою триланкову ламану лінію. Це включення міститься у необмеженому пружному просторі, в якому поширюються плоскі гармонічні хвилі поздовжнього зсуву. Задача зведена до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання вказаної системи застосований числовий метод, який враховує справжню асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.

Ключові слова: жорстке включення, гармонічні хвилі, сингулярні інтегральні рівняння, нерухомі особливості.

Вступ. Проблему визначення двовимірного динамічного напруженого стану в тілах з тонкими дефектами у вигляді відрізка прямої або дуги гладкої кривої на сьогоднішній час можна вважати вирішеною. Але, як відомо, реальні дефекти можуть бути більш складної конфігурації: кусково-гладкі, такі, що перетинаються або розгалужуються. Задач з визначення напруженого стану в тілах з подібними дефектами розв'язано значно менше, що пов'язано з математичними труднощами при їх розв'язанні методом інтегральних рівнянь. Зокрема, вони полягають в зведенні останніх до сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Найбільш дослідженими є задачі рівноваги тіл з тріщинами, серед яких, у першу чергу, слід зазначити [1, 19]. У вказаних роботах вдалось здобути точні розв'язки і точно визначити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) методом Вінера – Хопфа. Авторами [6, 18, 20] вивчався напружений стан навколо розгалужених, ламаних і крайових тріщин числовими методами. Методом граничних інтегральних рівнянь проведено дослідження для тіл з включеннями у вигляді ламаної або розгалужених включень у [3, 7]. Об'єднує ці роботи те, що при побудові числових розв'язків не враховується справжня асимптотика розв'язків, яка внаслідок наявності нерухомих особливостей стає відмінною від кореневої. Практично відсутні розв'язання аналогічних динамічних задач навіть для випадку гармонічних коливань. Наприклад, у [8, 9] досліджувалась взаємодія плоских гармонічних хвиль з двома тріщинами, що виходять з однієї точки, і з тріщиною у вигляді триланкової ламаної. Для розв'язання отриманих при цьому систем сингулярних інтегро-диферен-

ціальних рівнянь з нерухомими особливостями був запропонований числовий метод, що враховує справжні особливості розв'язків і ґрунтується на застосуванні для сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул. Саме цей метод застосовується при розв'язанні задачі про взаємодію хвиль поздовжнього зсуву з включенням, що в перерізі є триланковою ламаною у поданій статті.

Постановка задачі. Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антипоскої деформації і містить абсолютно жорстке тунельне включення, яке в перерізі xOy є триланковою ламаною. Ланки включення у площині xOy займають відрізки $2d_k$ і утворюють з віссю Ox кути α_k (рис. 1). В тілі поширюються гармонічні хвилі поздовжнього зсуву, що викликають наступні переміщення вздовж осі Oz

$$W_k^0(x; y) = Ae^{i\kappa_2(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)}; \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}; \quad k = 1; 2; 3, \quad (1)$$

де G, ρ – модуль зсуву та густина середовища; ω – частота коливань; θ_0 – кут між напрямком поширення хвилі та віссю Ox . Залежність від часу визначається множителем $e^{-i\omega t}$, який тут і надалі відкинутий.

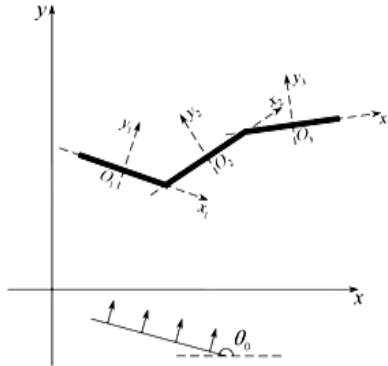


Рис. 1 – Розташування включення у координатній площині

Нехай $W(x, y)$ – єдина відмінна від 0 за антипоскої деформації z – компонента вектора переміщень розсіяного хвильового поля. В системі координат xOy вона задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0. \quad (2)$$

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною його ланкою пов'язується система координат $x_k O_k y_k$, $k = 1; 2; 3$ так, що вісь $O_k x_k$ спрямована вздовж відповідної ланки включення, а центр O_k

співпадає з серединою цієї ланки. Тоді центри мають координати $x_{0k} = d_k \cos \alpha_k$; $y_{0k} = d_k \sin \alpha_k$; $k = 1; 2; 3$, а зв'язок між системами координат виражається формулами

$$\begin{cases} x = a_k + x_k \cos \beta_k - y_k \sin \beta_k; & \beta_1 = \pi - \alpha_1; \beta_2 = \alpha_2; \beta_3 = 2\pi - \alpha_3; \\ y = b_k + x_k \cos \beta_k + y_k \sin \beta_k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k = (a_l - a_k) \cos \beta_k + (b_l - b_k) \sin \beta_k + x_l \cos \beta_{kl} + y_l \sin \beta_{kl}; \\ y_k = -(a_l - a_k) \sin \beta_k + (b_l - b_k) \cos \beta_k - x_l \sin \beta_{kl} + y_l \cos \beta_{kl}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\beta_{kl} = \beta_k - \beta_l; \quad k, l = 1; 2; 3.$$

Граничні умови з боку зовнішнього середовища на включенні з огляду на його малу товщину h , записуються відносно серединної площини. Припускається, що між включенням і пружним середовищем здійснено повне зчеплення, тому

$$W_k^1(x_k, 0) = c - W_k^0(x_k, 0); \quad W_k^0(x_k, 0) = A e^{ik_2 z_{0k}}; \quad (4)$$

$$z_{0k} = a_k \cos \theta_0 + b_k \sin \theta_0 + x_k \cos(\beta_k - \theta_0) - y_k \sin(\beta_k - \theta_0); \quad k = 1; 2; 3.$$

Також на включенні є розрив дотичних напружень, для стрибків яких введено позначення

$$\tau_{zy_k}(x_l, +0) - \tau_{zy_k}(x_l, -0) = \chi_{1k}(x_k); \quad -d_k < x_k < d_k; \quad k = 1; 2; 3, \quad (5)$$

де $\chi_{1k}(x_k)$ – невідомий стрибок дотичних напружень на k -й ланці включення.

До рівностей (4) входить c – невідоме переміщення включення під дією падаючої хвилі. Воно визначається з рівняння руху включення, яке у випадку гармонічних коливань має вигляд

$$-\omega^2 c \sum_{k=1}^3 m_k = \sum_{k=1}^3 \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta, \quad (6)$$

m_k – маса кожної ланки включення ($k = 1; 2; 3$).

Розв'язання задачі. Для розв'язання задачі для кожної ланки включення з номером l у системі координат $x_l O_l y_l$, пов'язаної з нею, будується розривний розв'язок рівняння (2) з стрибком (5) [10, 11]

$$W_{1l}^1(x_l, y_l) = \int_{-d_l}^{d_l} \frac{\chi_{1l}(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta; \quad (7)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_0 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right); \quad l = 1; 2; 3.$$

Після цього переміщення розсіяного хвильового поля у системі координат xOy подаються у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^3 W_l^g(x, y), \quad (8)$$

де $W_l^g(x, y)$ отримуються з (7) внаслідок перетворення координат за першими формулами (3) при $k = l$.

Щоб скористатись формулами (8) необхідно визначити невідомі стрибки напружень на ланках включення. Для визначення вказаних стрибків слід скористатися умовами (4). Для цього вони попередньо замінюються двома еквівалентними їм рівностями

$$\frac{\partial W_k^1(x_k, 0)}{\partial x_k} = - \frac{\partial W_k^0(x_k, 0)}{\partial x_k};$$

$$W_k^1(-d_k, 0) = c - W_k^0(-d_k, 0); \quad k = 1; 2; 3. \quad (9)$$

Перша рівність (9) є результатом диференціювання першої рівності (4), а друга – умова еквівалентності продиференційованої і вихідної рівностей. Після здійснення у (8) перетворення координат за останніми формулами (3) і підстановки у (9) отримана наступна система сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{E}{\tau - \xi} + Q(\tau, \xi) + R(\tau, \xi) \right) \Phi(\tau) = F(\xi); \quad -1 < \xi < 1;$$

$$\int_{-1}^1 (\ln|\tau - 1| + D(\tau)) \Phi(\tau) = F_0; \quad (10)$$

$$Q(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & q_{12}(\tau, \xi) & 0 \\ q_{21}(\tau, \xi) & 0 & q_{23}(\tau, \xi) \\ 0 & q_{32}(\tau, \xi) & 0 \end{pmatrix}; \quad F(\xi) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \\ f_3(\xi) \end{pmatrix}; \quad F_0 = \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \end{pmatrix};$$

$$R(\tau, \xi) = \{R_{lk}(\tau, \xi)\}; \quad D(\tau) = \left\{ D_{lk}(\tau) + \frac{\pi}{l_0} \right\}.$$

В системі (10) введені позначення

$$\begin{aligned}
\varphi_k(\tau) &= \frac{\chi_{1k}(d_k \tau)}{G}; \quad \eta = d_k \tau; \quad x_k = d_k \xi; \quad \gamma_k = \frac{d_k}{d}; \quad \varepsilon_k = \frac{a_k}{d}; \quad \delta_k = \frac{b_k}{d}; \\
d &= \max(d_1; d_2; d_3); \quad q_{kl}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_k(\gamma_l(1+z_{kl}\xi) - z_{kl}\gamma_k(\tau - z_{kl})\cos\beta_{lk})}{s_{kl}(\tau, \xi)}; \\
f_k(\xi) &= -2\pi i A_0 \kappa_0 \cos(\beta_k - \theta_0) e^{i\kappa_0 r_{0k}(\xi)}; \quad f_{k0} = c_0 - A_0 e^{i\kappa_0 r_{0k}(-1)}; \\
r_{0k}(\xi) &= \varepsilon_k \cos\theta_0 + \delta_k \sin\theta_0 + \gamma_k \xi \cos(\beta_k - \theta_0); \quad l_0 = \bar{\rho} \varepsilon \kappa_0^2 \sum_{k=1}^3 \gamma_k; \\
z_{kl} &= \text{sign}(l-k); \quad k, l = 1, 2, 3; \quad l \neq k; \\
s_{kl}(\tau, \xi) &= \gamma_l^2 (\tau + z_{kl})^2 + 2z_{kl}\gamma_l\gamma_2 (\tau + z_{kl})(1 - z_{kl}\xi)\cos\beta_{lk} + \\
&+ \gamma_k^2 (1 - z_{kl}\xi)^2. \tag{11}
\end{aligned}$$

Матриці $R(\tau, \xi)$ і $D(\tau)$ складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли. До системи (10) необхідно додати рівність (6) для визначення невідомої амплітуди

$$c_0 = -\frac{1}{2l_0} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) d\tau; \quad c_0 = \frac{c}{d}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho}; \quad \varepsilon = \frac{h}{d}, \tag{12}$$

де ρ_1, h – густина і товщина матеріалу включення.

Наближене розв'язання системи інтегральних рівнянь. Наявність у сингулярній складовій інтегральних рівнянь (10) нерухомих особливостей при $\tau = -1$; $\xi = 1$ та $\tau = 1$; $\xi = -1$ впливає на поведінку її розв'язків в околі точок $\tau = \pm 1$. Їх асимптотика в околі цих точок визначається так само, як і в [5, 9]. В результаті знайдемо, що невідомі функції належить шукати у вигляді

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\tau) &= (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\delta_1} \psi_1(\tau); \quad \varphi_2(\tau) = (1+\tau)^{-\delta_1} (1-\tau)^{-\delta_2} \psi_2(\tau); \\
\varphi_3(\tau) &= (1+\tau)^{-\delta_2} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \psi_3(\tau), \tag{13}
\end{aligned}$$

де степеневі показники визначаються рівностями

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\pi - \alpha_{kl}}{2\pi - \alpha_{kl}}, & 0 < \alpha_{kl} \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\alpha_{kl} - \pi}{2\alpha_{kl}}, & \frac{\pi}{2} < \alpha_{kl} < \pi \end{cases}; \quad \alpha_{kl} = |\alpha_l - \alpha_k|; \quad k = 1, 2; \quad l = 2, 3.$$

Тепер, якщо розглянути функції

$$\Psi_k(\tau) = \Psi_{0k}(\tau) + \frac{\Psi_k(1)}{2}(1+\tau) + \frac{\Psi_k(-1)}{2}(1-\tau), \quad (14)$$

то можна бачити, що $\Psi_{0k}(\pm 1) = 0$ і має місце подання

$$\Psi_{0k}(\tau) = (1-\tau)^2 g_k(\tau); \quad k = 1; 2; 3, \quad (15)$$

де $g_k(\tau)$ – нові невідомі функції, що задовольняють умови Гьольдера при $\tau \in (-1; 1)$.

Підстановка (14), (15) у (13) призводить до наступного подання невідомих функцій

$$\begin{aligned} \varphi_k(\tau) = & (1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k} g_k(\tau) + (1+\tau)^{\lambda_k} (1-\tau)^{\sigma_k-1} \frac{\Psi_k(1)}{2} + \\ & + (1+\tau)^{\lambda_k-1} (1-\tau)^{\sigma_k} \frac{\Psi_k(-1)}{2}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma_1 = \lambda_2 = 1 - \delta_1; \quad \sigma_2 = \lambda_3 = 1 - \delta_2; \quad \sigma_3 = \lambda_1 = 1/2.$$

Далі наближений метод розв'язання ґрунтується на апроксимації функцій $g_k(\tau)$ інтерполяційним многочленом $n-1$ степеня

$$g_k(\tau) \approx g_{k,n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{Q_{nk}(\tau)}{(\tau - \tau_{mk})(Q_{nk}'(\tau_{mk}))}; \quad g_{mk} = g_k(\tau_{mk}); \quad (17)$$

$Q_{n1}(\tau) = P_n^{1-\delta_1, 1/2}(\tau)$, $Q_{n2}(\tau) = P_n^{1-\delta_2, 1-\delta_1}(\tau)$, $Q_{n3}(\tau) = P_n^{1/2, 1-\delta_2}(\tau)$ – многочлени Якобі; τ_{mk} – корені цих многочленів.

Тоді для інтегралів з ядром Коші справедливі наступні квадратурні формули [1, 6]

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - \xi_{jk}} d\tau = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}} + \frac{\Psi_k(-1)}{2} b_{jk}^- + \frac{\Psi_k(1)}{2} b_{jk}^+, \quad (18)$$

де ξ_{jk} – корені функцій Якобі другого роду $J_n^{1-\delta_1, 1/2}(\xi)$, $J_n^{1-\delta_2, 1-\delta_1}(\xi)$, $J_n^{1/2, 1-\delta_2}(\xi)$, $j = 1; \dots; n+1$, відповідно; A_{mk} – коефіцієнти відповідної квадратурної формули Гаусса – Якобі [5].

При отриманні формул (18) інтеграли

$$b_{jk}^- = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k-1}}{\tau - \xi_{jk}} d\tau; \quad b_{jk}^+ = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{\sigma_k-1} (1+\tau)^{\lambda_k}}{\tau - \xi_{jk}} d\tau$$

знаходились методом, викладеним в [16], що ґрунтується на їх перетворенні до зортки Мелліна. Далі застосування теореми про зортку дає можливість подати ці інтеграли у вигляді суми лишків у полюсах. Наслідком цих дій є наступні формули

$$b_{jk}^- = \begin{cases} B_k^+ \left(\frac{1 - \xi_{jk}}{2} \right), & 0 \leq \xi_{jk} < 1 \\ B_k^- \left(\frac{1 + \xi_{jk}}{2} \right), & -1 < \xi_{jk} < 0 \end{cases}; \quad b_{jk}^+ = \begin{cases} C_k^+ \left(\frac{1 - \xi_{jk}}{2} \right), & 0 \leq \xi_{jk} < 1, \\ C_k^- \left(\frac{1 + \xi_{jk}}{2} \right), & -1 < \xi_{jk} < 0, \end{cases} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_1^+(y; \delta) \\ C_1^+(y; \delta) \end{bmatrix} &= \mp 2^{\frac{1}{2} - \delta} \Gamma\left(\frac{2 \mp 1}{2}\right) \operatorname{ctg}(\pi \delta) \times \\ &\times \left(y^{\frac{1 \pm 1}{2} - \delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\pm \frac{1}{2} + k\right) y^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + k + \delta\right) y^k}{\Gamma\left(\frac{1 \pm 1}{2} k + \delta\right)} \right); \\ B_1^+(y, \delta_1) &= -C_3^-(y, \delta_2); \quad C_1^+(y, \delta_1) = -B_3^-(y, \delta_2); \\ \begin{bmatrix} B_1^-(y; \delta) \\ C_1^-(y; \delta) \end{bmatrix} &= \pm 2^{\frac{1}{2} - \delta} \Gamma\left(\frac{3 \pm 1}{2} - \delta\right) \cos(\pi \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + k + \delta\right)}{\Gamma\left(\frac{2 \pm 1}{2} + k\right)} y^k; \\ B_1^-(y, \delta_1) &= -C_3^+(y, \delta_2); \quad C_1^-(y, \delta_1) = -B_3^+(y, \delta_2); \\ C_2^\pm(y, \delta) &= \mp 2^{1 - \delta_1 - \delta_2} \Gamma\left(\frac{3 \pm 1}{2} - \delta^\pm\right) \times \\ &\times \left(y^{\frac{1 \mp 1}{2} - \delta^\mp} \operatorname{ctg}(\pi \delta^\mp) \sin(\pi \delta^\pm) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \delta^\pm) y^k}{d^\pm k!} \mp \right. \\ &\left. \mp \frac{\sin \pi(\delta_1 + \delta_2)}{\sin(\pi \delta^\mp)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + \delta_1 + \delta_2) y^k}{\Gamma\left(\frac{1 \pm 1}{2} + \delta^\mp + k\right) (1 - k - \delta_1 - \delta_2)} \right); \\ y &= \frac{1 \pm \xi_{jk}}{2}; \quad \delta^+ = \delta_1; \quad \delta^- = \delta_2; \quad d^+ = 1 - k - \delta; \quad d^- = 1; \\ B_2^+(y, \delta^\pm) &= -C_2^-(y, \delta^\mp); \quad B_2^-(y, \delta^\pm) = -C_2^+(y, \delta^\mp). \end{aligned}$$

Квадратурні формули (18) дозволили наближений розв'язок (10) здійснити методом механічних квадратур з використанням коренів функцій Якобі в якості точок колокації. Але для цього необхідні квадратурні формули для інтегралів з нерухомими особливостями:

$$E_{kl}^j = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) \varphi_l(\tau) d\tau; \quad l \neq k = 1; 2; 3, \quad j = 1; \dots; n+1. \quad (20)$$

Нехай $0 < r_1 < 1$ деяке додатне число. У випадку $1 - z_{kl}\xi_{jk} > r_1$ ($z_{kl} = \text{sign}(l - k)$) інтеграли (20) не є сингулярними і можуть бути обчислені за допомогою квадратурних формул Гаусса – Якобі з відповідною ваговою функцією [5]. Якщо ж $1 - z_{kl}\xi_{jk} \rightarrow 0$, слід скористатися рівностями (16) і замінити $g_k(\tau)$ інтерполяційними многочленами (17). Внаслідок цього інтеграли (20) набувають вигляду

$$E_{kl}^j = \sum_{m=1}^n \frac{g_{m1} H_m^{kl}}{s_{kl}(\tau_{ml}, \xi_{jk})} + \frac{\psi_l(1)}{2} s_{jkl}^+ + \frac{\psi_l(-1)}{2} s_{jkl}^-; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_m^{kl} &= -A_{ml} (z_{kl} \gamma_k (1 - z_{kl} \xi_{jk}) \cos \beta_{kl} + \gamma_l (\tau_{ml} + z_{kl})); \\ &\quad 1 - z_{kl} \xi_{jk} > r_1 > 0; \\ H_m^{kl} &= -A_{ml} (z_{kl} \gamma_k (1 - z_{kl} \xi_{jk}) \cos \beta_{kl} + \gamma_l (\tau_{ml} + z_{kl})) - \\ &\quad - \frac{\gamma_l \gamma_k (1 - z_{kl} \xi_{jk})}{(Q_{nl}(\tau_{ml}))'} B_{kl}^{(1)}(y, \delta) + \frac{\gamma_l^2 (\tau_{ml} + z_{kl})}{(Q_{nl}(\tau_{ml}))'} B_{kl}^{(2)}(y, \delta); \\ &\quad 1 - z_{kl} \xi_{jk} < r_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Інтеграли $B_{kl}^{(p)}(y, \delta)$, $p = 1; 2$, що входять в (22), за допомогою методу, який ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Мелліна [14], подано збіжними степеневими рядами:

$$\begin{aligned} B_{kl}^{(p)}(y, \delta) &= \frac{(-1)^p z_{kl} 2^{3-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2} - \delta\right) (-1)^n}{\gamma_l n! \sin(\pi \delta)} \left[y^{1-\delta} \sum_{j=0}^{\infty} z_{j1} y^j \cos \beta_{kl} (j - \delta + p) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\pi \delta) \sum_{j=0}^{\infty} z_{j2} y^j \cos(\beta_{kl} (j + p - 1)) \right]; \quad B_{12}^{(p)}(y, \delta_1) = B_{32}^{(p)}(y, \delta_2); \\ z_{j1} &= \frac{\Gamma(n + j + 2 - \delta) \Gamma(j - n - 1/2) (-1)^j}{\Gamma(j + 2 - \delta) j!}; \\ z_{j2} &= \frac{\Gamma(n + j + 1) \Gamma(j - n - 3/2 + \delta) (-1)^j}{\Gamma(j + \delta) j!}; \end{aligned}$$

$$B_{kl}^{(p)}(y, \delta^\pm) = \frac{(-1)^p z_{kl} 2^{2-\delta^+ - \delta^-} \Gamma(2+n-\delta^\mp) (-1)^n}{\gamma_l n! \sin(\pi \delta^\pm)} \times$$

$$\times \left[y^{1-\delta^\pm} \sin(\pi \delta^\mp) \sum_{j=0}^{\infty} z_{j1} y^j \cos(\beta_{kl}(j-\delta^\pm+p)) + \right.$$

$$\left. + \sin(\pi(\delta^+ + \delta^-)) \sum_{j=0}^{\infty} z_{j2} y^j \cos(\beta_{kl}(j+p-1)) \right];$$

$$z_{j1} = \frac{\Gamma(n+j+2-\delta^\pm) \Gamma(j-n-\delta^\mp) (-1)^j}{\Gamma(j+2-\delta^\pm) (j-n-1+\delta^\mp) j!};$$

$$z_{j2} = \frac{\Gamma(n+j+1) \Gamma(j-n-1+\delta^+ + \delta^-) (-1)^j}{\Gamma(j+\delta^\pm) (j-n-2+\delta^+ + \delta^-) j!};$$

$$B_{21}^{(p)}(y, \delta^\pm) = (-1)^n B_{23}^{(p)}(y, \delta^\mp); \quad y = \frac{1-z_{kl} \xi_{jk}}{2\gamma_{kl}}; \quad \delta^+ = \delta_1; \quad \delta^- = \delta_2.$$

Аналогічно обчислюються інтеграли

$$s_{jkl}^\pm = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) \left[\frac{(1-\tau)^{\sigma_l-1} (1+\tau)^{\lambda_l}}{(1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l-1}} \right] d\tau.$$

Для них мають місце формули

$$s_{jkl}^\pm = c_{lk}^\pm \left(\frac{1-z_{kl} \xi_{jk}}{2\gamma_{kl}}, \delta \right), \quad 0 < 1-z_{kl} \xi_{jk} < r_1. \quad (23)$$

Функції $c_{lk}^\pm(y, \delta)$ подаються рядами

$$c_{lk}^\pm(y, \delta) = 2^{\frac{1}{2}-\delta} \Gamma\left(\frac{2\pm 1}{2}\right) \left[\frac{y^{\frac{1\mp 1}{2}-\delta}}{\sin \pi \delta} \sum_{p=0}^{\infty} B_{1p}^\pm y^p \cos(\beta_{kl}(1+p-\delta)) \mp \right.$$

$$\left. \mp \operatorname{ctg} \pi \delta \sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}^\pm y^p \cos(\beta_{kl}(p+1)) \right]; \quad -c_{12}^\pm(y, \delta_1) = c_{32}^\mp(y, \delta_2);$$

$$B_{1p}^{\pm} = \frac{(-1)^p \Gamma\left(p \mp \frac{1}{2}\right)}{p!}; \quad B_{2p}^{\pm} = \frac{(-1)^p \Gamma\left(\delta + p - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\delta + p \pm 1)};$$

$$c_{lk}^{\pm}(y, \delta^{\pm}) = \frac{2^{1-\delta^+ - \delta^-} \Gamma\left(\frac{3 \mp 1}{2} - \delta^-\right)}{\gamma_2 \sin(\pi \delta^+)} \times$$

$$\times \left[y^{\frac{1 \pm 1}{2} - \delta^+} \sin \pi \delta^- \sum_{p=0}^{\infty} B_{1p}^{\pm} y^p \cos\left(\beta_{kl} \left(\frac{3 \pm 1}{2} + p - \delta^+\right)\right) \mp \right.$$

$$\left. \mp \sin(\pi(\delta^+ + \delta^-)) \sum_{p=0}^{\infty} B_{2p}^{\pm} y^p \cos(\beta_{kl}(p+1)) \right];$$

$$c_{21}^{\pm}(y, \delta^{\pm}) = -c_{23}^{\mp}(y, \delta^{\mp}); \quad B_{1p}^+ = \frac{(-1)^p \Gamma(\delta + p)}{p!}; \quad B_{1p}^- = \frac{B_{1p}^+}{(p + \delta^- - 1)};$$

$$B_{2p}^{\pm} = \frac{\Gamma(\delta^+ + \delta^- + p)(-1)^p}{(1 - p - \delta^+ - \delta^-) \Gamma\left(\delta^+ + p + \frac{1 \mp 1}{2}\right)}; \quad \delta^+ = \delta_1; \quad \delta^- = \delta_2.$$

Для інтегралів з логарифмічною функцією невідомі функції $g_1(\tau)$, $g_2(\tau)$ наближаються інтерполяційними многочленами (17), які попередньо перетворюються за тотожністю Дарбу – Кристофеля [16]. Після цього, як в [6, 10], отримані формули

$$\int_{-1}^1 \varphi_l(\tau) \ln|\tau \pm 1| d\tau = \sum_{m=1}^n A_{ml} g_{ml} \theta_{ml} + \frac{\Psi_l(1)}{2} E_l^+ + \frac{\Psi_l(-1)}{2} E_l^-, \quad (24)$$

де

$$\theta_{ml} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{u_{sl}}{\sigma_s^2} Q_{sl}(\tau_{ml}); \quad u_{sl} = \int_{-1}^1 (1-\tau)^{\sigma_l} (1+\tau)^{\lambda_l} Q_{sl}(\tau) \ln|\tau \pm 1| d\tau.$$

Останні інтеграли обчислюються методами для обчислення інтегралів з ортогональними многочленами [14] і дорівнюють

$$u_{0l}(\delta) = \frac{2^{\frac{5}{2}-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma(2-\delta)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}-\delta\right)} \left[\ln 2 + \Psi(2-\delta) - \Psi\left(\frac{7}{2}-\delta\right) \right]; \quad u_{01}(\delta_1) = u_{03}(\delta_2);$$

$$u_{s1}(\delta) = -\frac{2^{5/2-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2} + s\right) \Gamma(2 - \delta)}{s \Gamma\left(\frac{7}{2} - \delta + s\right)}; \quad u_{s3}(\delta_2) = (-1)^s u_{s1}(\delta_1);$$

$$u_{02}(\delta^\pm) = \frac{2^{3-\delta^+ - \delta^-} \Gamma(2 - \delta^-) \Gamma(2 - \delta^+)}{\Gamma(4 - \delta^+ - \delta^-)} \left[\ln 2 + \Psi(2 - \delta^\pm) - \Psi(4 - \delta^+ - \delta^-) \right];$$

$$u_{s1}(\delta^\pm) = -\frac{2^{3-\delta^+ - \delta^-} \Gamma(2 + s - \delta^\mp) \Gamma(2 - \delta^\pm)}{s \Gamma(4 - \delta^+ - \delta^- + s)}; \quad u_{s2}(\delta^+) = (-1)^s u_{s2}(\delta^-);$$

$$\delta^+ = \delta_1; \delta^- = \delta_2.$$

В цих формулах $\Psi(x)$ – логарифмічна похідна Γ -функції. Аналогічно знаходяться наступні інтеграли

$$E_l^+ = \int_{-1}^1 \ln|\tau \pm 1| (1 - \tau)^{\sigma_l - 1} (1 + \tau)^{\lambda_l} d\tau; \quad E_l^- = \int_{-1}^1 \ln|\tau \pm 1| (1 - \tau)^{\sigma_l} (1 + \tau)^{\lambda_l - 1} d\tau;$$

$$E_l^\pm(\delta) = \frac{2^{\frac{3}{2}-\delta} \Gamma\left(\frac{2 \pm 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3 \mp 1}{2} - \delta\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} - \delta\right)} \left[\ln 2 + \Psi\left(\frac{3 \mp 1}{2} - \delta\right) - \Psi\left(\frac{5}{2} - \delta\right) \right];$$

$$E_1^\pm(\delta_1) = E_3^\mp(\delta_2); \quad E_2^\pm(\delta^\pm) = \frac{2^{2-\delta^+ - \delta^-} \Gamma\left(\frac{3 \mp 1}{2} - \delta^-\right) \Gamma\left(\frac{3 \pm 1}{2} - \delta^+\right)}{\Gamma(3 - \delta^+ - \delta^-)} \times$$

$$\times \left[\ln 2 + \Psi\left(\frac{3 \pm 1}{2} - \delta^+\right) - \Psi(3 - \delta^+ - \delta^-) \right]; \quad E_2^\pm(\delta^+) = E_2^\mp(\delta^-); \quad (25)$$

$$\delta^+ = \delta_1; \delta^- = \delta_2.$$

Знайдені формули для сингулярних інтегралів (18), (21), (24) та квадратурні формули Гаусса – Якобі для інтегралів з регулярними ядрами дозволили замінити (10) системою лінійних алгебричних рівнянь. В результаті розв'язання цієї системи були знайдені $g_{mk} = g(\tau_{mk})$, $\psi_k(\pm 1)$ ($k = 1; 2; 3$), c_0 . Після цього наближений розв'язок системи (10) визначається формулами (12), (16).

Однією з важливих характеристик напруженого стану навколо включення є КІН. Він визначається з відомого асимптотичного подання [20] напружень в околі кінців включення. З урахуванням (11), (16), після об-

числення границь знаходимо прості формули для безпосереднього визначення КІН

$$K_1 = G\sqrt{d_1} \frac{\Psi_1(-1)}{2^{\delta_1}}, \quad K_2 = G\sqrt{d_3} \frac{\Psi_3(1)}{2^{\delta_2}}. \quad (26)$$

Результати числового аналізу. На основі отриманих формул побудовані графіки залежності КІН та амплітуди коливань включення від безрозмірного хвильового числа κ_0 . По перше, здійснено дослідження практичної збіжності запропонованого методу числового розв'язання інтегральних рівнянь. Розглядалось включення з ланками однакової довжини d і симетричні відносно осі Oy (рис. 2).

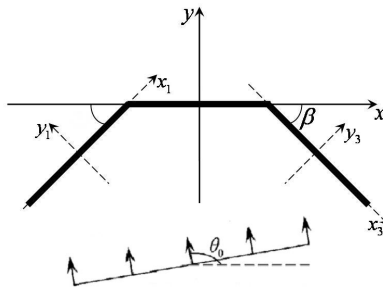


Рис. 2 – Схема включень з ланками однакової довжини

Внаслідок симетрії має місце $K_1 = K_2 = K$. Результати наведені на рис. 3 у вигляді графіків залежності КІН від κ_0 , де кожна крива відповідає вказаному числу вузлів інтерполяції. Розрахунки проведені при $\theta_0 = 270^\circ$ і $\beta = 45^\circ$.

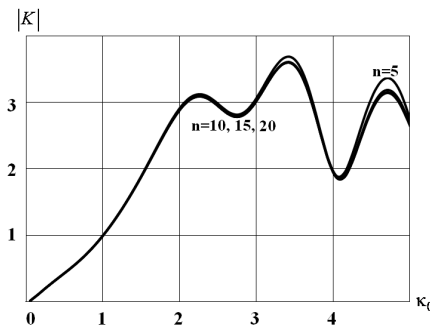


Рис. 3 – Числове дослідження практичної збіжності

Можна бачити, що для отримання значень КІН з похибкою, що не перевищує 0,1%, достатньо обирати до 20 вузлів інтерполяції в (17). А для хвиль з малою частотою $\kappa_0 \leq 3$ досить і 5 вузлів.

Для дослідження впливу на значення КІН форми включення розглядалось включення виду як показано на рис.4. Довжини ланок відносяться так само, як і у попередньому випадку. Здійснено числове дослідження впливу значення кута β на залежність КІН від частоти.

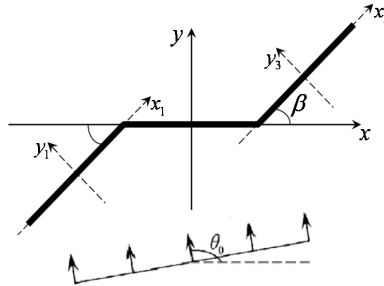


Рис. 4 – Схема розташування включень

За такого розташування ланок включення побудовані графіки залежності КІН та амплітуди від κ_0 при $\theta_0 = 270^0$ (рис. 5, а, б, рис. 6).

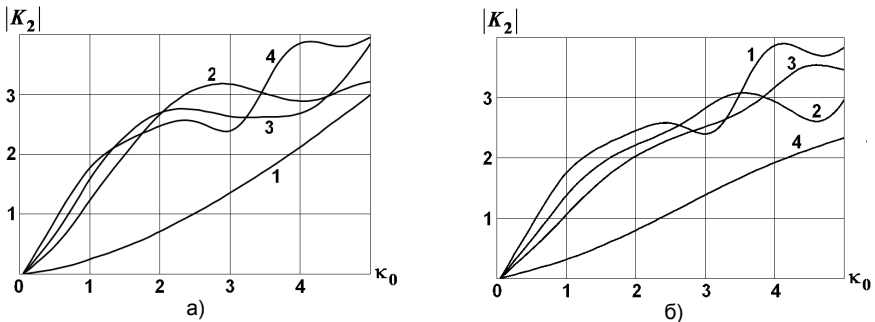


Рис. 5 – Вплив кута β на значення КІН

Аналіз графіків на рис. 5, а (лінії 1 – 4 відповідають значенням $\beta = 5^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$), та рис. 5, б (лінії 1 – 4 відповідають значенням $\beta = 95^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 175^\circ$) вказує на те, що у випадку, коли ланки включення розташовані практично на одній прямій, значення КІН зростають монотонно. З ростом кута між ланками включення і віссю Ox залежність КІН від κ_0 ускладнюється, при цьому існують частоти, за яких КІН набувають максимальних значень. На рис. 6 наведені графіки залежності

амплітуди від κ_0 при зміні кута β (лінії 1 – 5 відповідають значенням $\beta = 5^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 175^\circ$) при поширенні падаючої хвилі під кутом $\theta_0 = 90^\circ$. Як видно, найбільшого значення амплітуда набуває, коли ланки включення розташовані майже на одній прямій. Зі зростанням кута між ланками включення та віссю Ox значення амплітуди зменшуються і мають залежність від κ_0 , відмінну від монотонної.

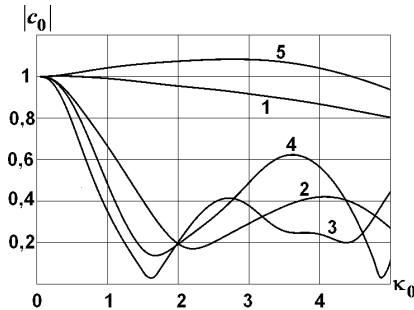


Рис. 6 - Залежність амплітуди від кута β

Висновки. Здійснено числове розв'язування задачі про визначення напружено-деформівного стану в околі триланкового тонкого жорсткого включення при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву. Це розв'язання ґрунтувалось на наближеному методі побудови розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухожими особливостями. Врахування реальної особливості розв'язків і застосування до сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул забезпечило швидко збіжність і стабільні числові результати в досить широкому частотному діапазоні. Отримані в результаті наближені формули для обчислення КІН і амплітуди коливань включення дали можливість дослідити вплив на їх значення частоти коливань і конфігурації включення і встановити ряд якісних ефектів. Зокрема показана наявність частот, за яких значення КІН і амплітуда коливання включення сягають максимуму.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Андреев А. В.** Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. №1. С.126–146.
2. **Афян Б. А.** Об интегральных уравнениях с неподвижными особенностями в теории ветвящихся трещин // Докл. АН Арм. ССР. 1984. Т.79. №4. С.60–65.
3. **Васильев К. В., Пастернак Я. Н., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М.** Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанцюговим пружним включенням // Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер.: А Природн. наук. 2010. №2. С. 55–63.
4. **Дудучава Р. В.** Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их

приложения к задачам механики // Труды Тбилисского математического института АН СССР. 1979. Т. 60. С.31–35.

5. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. Москва: Наука, 1967. 500 с.

6. **Литвин О. В., Попов В. Г.** Взаємодія гармонічної хвилі поздовжнього зсуву з V-подібним включенням // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2017. Т. 60. № 1. С. 1–11.

7. **Осип П. Н., Саврук М. П.** Определение напряжений в бесконечной пластине с ломанной или ветвящейся трещиной // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1983. Т. 2. С. 142–147.

8. **Пастернак Я. Н., Сулим Г. Т.** Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з тонкими гілчастими пружними включеннями // Вісн. ТНТУ. 2011. Т. 16. № 4. С. 23–31.

9. **Попов В. Г.** Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву // Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер.: фіз.-мат. наук. 2013. Вип. 3. С. 205–208.

10. **Попов В. Г.** Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву // Матем. методи та фіз.-мех. поля. 2015. Т. 50. № 1. С. 112–120.

11. **Попов В. Г.** Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН Механика твердого тела. 1992. № 3. – С. 139–146.

12. **Попов В. Г.** Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динамические системы. 1993. Вып. 12. С. 14–23.

13. **Попов В. Г.** Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости. 1986. С. 121–127.

14. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.

15. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами // К.: Наукова думка, 1981. 323 с.

16. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

17. **Сулим Г. Т.** Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. 716 с.

18. **Isida M., Noguchi H.** Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings // International Journal of Fracture. 1992. Vol. 54. No 4. P. 293–316.

19. **Vitek V.** Plain stress intensity factors for branched cracks // International Journal of Fracture 1977. Vol. 13. No 4. P. 481–501.

20. **Xiangqiao Yan.** Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements // Mechanics Research Communication. 2006. Vol. 32. Iss. 4. P. 375–384.

УДК 539.3

В. Г. Попов, д-р физ.-мат. наук, О. В. Литвин, канд. физ.-мат. наук

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ТРЕХЗВЕННЫМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Решена задача определения напряженного состояния в окрестности туннельного жесткого включения, которое в сечении представляет трехзвенную

ломаную линию. Это включение находится в неограниченном упругом пространстве, в котором распространяются плоские гармонические волны продольного сдвига. Задача сведена к решению системы сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями. Для приближенного решения указанной системы применен численный метод, учитывающий действительную асимптотику неизвестных функций и использующий специальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов.

Ключевые слова: жесткое включение, гармонические волны, сингулярные интегральные уравнения, неподвижные особенности.

UDC 539.3

V.G. Popov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), O. V. Litvin, PhD (Phys.-Math.)

THE STRESS STATE IN ELASTIC BODY WITH RIGID INCLUSION OF THE SHAPE OF THREE SEGMENTS BROKEN LINE UNDER HARMONIC WAVE ACTION

The problem about the determination of stress state in the vicinity of the tunnel rigid inclusion of the shape of three segments broken line was solved. The plane harmonic waves of the longitudinal shift are propagating in the unlimited medium with this inclusion. The problem is reduced to solving a system of singular integral equations with fixed singularities. For the approximate solution of this system a numerical method is applied. It takes into account the true asymptotics of unknown functions and uses special quadrature formulas for singular integrals.

Keywords: rigid inclusion, harmonic waves, singular integral equations, fixed singularities.

There is a thin absolutely rigid inclusion that in a cross-section represents three segments broken line in an infinite elastic medium (matrix) that is in the conditions of antiplane strain. The plane harmonic waves of the longitudinal shift are propagating in the medium with this inclusion. Under the conditions of the antiplane strain the only one different from zero z - component of displacement vector $W(x, y)$ satisfies the Helmholtz equation

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0; \quad \kappa_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}.$$

The inclusions are fully couple with the matrix and so thin that the boundary conditions on them are formulated concerning the middle plane of the inclusions. The tangential stresses are discontinuous on the inclusion. For the jumps of tangential stresses the follow definitions are presented

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k); \quad -d_k < x_k < d_k; \quad k = 1; 2; 3,$$

where $\chi_{1k}(x_k)$ – the unknown jumps of tangential stresses on the k – th segment of inclusion.

The method of the solution is based on the use of the discontinuous solution of the Helmholtz equation. After the satisfaction of the conditions on the

inclusion the system of integral equations relatively unknown jumps is obtained:

$$\int_{-1}^1 \left(-\frac{E}{\tau - \xi} + Q(\tau, \xi) + R(\tau, \xi) \right) \Phi(\tau) = F(\xi); \quad -1 < \xi < 1;$$

$$\int_{-1}^1 (\ln|\tau - 1| + D(\tau)) \Phi(\tau) = F_0;$$

$$Q(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & q_{12}(\tau, \xi) & 0 \\ q_{21}(\tau, \xi) & 0 & q_{23}(\tau, \xi) \\ 0 & q_{32}(\tau, \xi) & 0 \end{pmatrix}; \quad F(\xi) = \begin{pmatrix} f_1(\xi) \\ f_2(\xi) \\ f_3(\xi) \end{pmatrix}; \quad F_0 = \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ f_{30} \end{pmatrix};$$

$$R(\tau, \xi) = \{R_{lk}(\tau, \xi)\}; \quad D(\tau) = \left\{ D_{lk}(\tau) + \frac{\pi}{l_0} \right\}; \quad l_0 = \bar{\rho} \varepsilon \kappa_0^2 \sum_{k=1}^3 \gamma_k;$$

$$f_k(\xi) = -2\pi i A_0 \kappa_0 \cos(\beta_k - \theta_0) e^{i\kappa_0 r_{0k}(\xi)}; \quad f_{k0} = c_0 - A_0 e^{i\kappa_0 r_{0k}(-1)};$$

$$r_{0k}(\xi) = \varepsilon_k \cos \theta_0 + \delta_k \sin \theta_0 + \gamma_k \xi \cos(\beta_k - \theta_0);$$

$$c_0 = -\frac{1}{2l_0} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \int_{-1}^1 \varphi_k(\tau) d\tau; \quad \varphi_k(\tau) = \frac{\chi_k(\eta)}{G};$$

$$c_0 = \frac{c}{d}; \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho}; \quad \varepsilon = \frac{h}{d}; \quad q_{kl}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_l (\gamma_k \xi_l - \gamma_l \tau_k \cos \beta_{lk})}{s_{kl}(\tau, \xi)};$$

$$s_{kl}(\tau, \xi) = \gamma_l^2 \tau_k^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 \tau_k \xi_l \cos \beta_{lk} + \gamma_k^2 \xi_l^2; \quad k, l = 1, 2, 3; \quad l \neq k.$$

The unknown functions are searched as:

$$\varphi_1(\tau) = (1 + \tau)^{-\frac{1}{2}} (1 - \tau)^{-\delta_1} \psi_1(\tau); \quad \varphi_2(\tau) = (1 + \tau)^{-\delta_1} (1 - \tau)^{-\delta_2} \psi_2(\tau);$$

$$\varphi_3(\tau) = (1 + \tau)^{-\delta_2} (1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \psi_3(\tau).$$

Approximate method of solution is based on the interpolation of functions $g_k(\tau)$ by approximation polynomial of degree $n - 1$

$$g_k(\tau) \approx g_{k,n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{Q_{nk}(\tau)}{(\tau - \tau_{mk})(Q_{nk}(\tau_{mk}))'}; \quad g_{mk} = g_k(\tau_{mk});$$

$Q_{n1}(\tau) = P_n^{1-\delta_1, \frac{1}{2}}(\tau)$; $Q_{n2}(\tau) = P_n^{1-\delta_2, 1-\delta_1}(\tau)$; $Q_{n3}(\tau) = P_n^{2, 1-\delta_2}(\tau)$ – Jacobi polynomials, τ_{mk} – roots of these polynomials ($k = 1, 2, 3$).

One of the main results is a numerical method for solving the obtained system, which takes into account the singularity of the solution and is based on the use of the special quadrature formulas for singular integrals.

The resulting calculation formulas of generalized stress intensity factor (SIF), which values are expressed in approximate solution of the system of integral equations are obtained. The influence on the value of SIF from the angle formed by the sides of the inclusion and the frequency of the incident wave is researched.

REFERENCES

1. **Andreev A. V.** A direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels // Izv. RAS. Mechanics of a solid. 2005. No 1. P. 126–146. (in Russian).
2. **Afyan B. A.** On integral equations with fixed singularities in the theory of branching cracks // Dokl. AN Arm. SSR. 1984. Vol.79, No 4. P. 60–65. (in Russian).
3. **Vasilyev K. V., Pasternak N. J., Sulim G. T., Pasternak R. M.** The longitudinal shear of the infinite body with thin elastic double inclusion // Visn. Don. nat. Univ. Ser.: A: Naturally. Science. 2010. No 2. P. 55–63. (in Ukrainian).
4. **Duduchava R. V.** The Integral convolution equations with discontinuous pre-symbols, singular integral equations with fixed singularities, and their applications to problems of mechanics // Proceedings of the Tbilisi Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences. 1979. Vol. 60. P. 31–35. (in Russian).
5. **Krylov V. I.** The approximate calculation of integrals. Moscow: Nauka, 1967. 500 p. (in Russian).
6. **Litvin O. V., Popov V. G.** Interaction the harmonic wave of the longitudinal shift with V-similar inclusion // Mat. methods and physical and fur. field. 2017. Vol.60. No 1. P. 1–11. (in Ukrainian).
7. **Osiv P. N., Savruk M. P.** The Determination of stresses in an infinite plate with a broken or branched crack // J. Prikl. Mekh. And techn. Fiz. 1983. Vol. 2. P. 142–147. (in Russian).
8. **Pasternak Y. N., Sulim G. T.** Plane problems of elasticity of anisotropic bodies with thin elastic branching inclusions // Bulletin TNTU. 2011. Vol. 16. No 4. P. 2–31. (in Ukrainian).
9. **Popov V. G.** Stress state near two cracks emanating from one point during harmonic oscillation of the longitudinal shear / V.G. Popov // Bulletin of Kiev Shevchenko nat. Univ. Ser: Phys.-math. Sciences. 2013. Vol. 3. P. 205–208. (in Ukrainian).
10. **Popov V. G.** The crack in the form of a three-unit broken under the action of wave of longitudinal shear // Math. methods and physical and mech. fields. 2015. Vol. 50. No1. P. 112–120. (in Ukrainian).
11. **Popov V. G.** Investigation of the fields of stresses and displacements in the case of diffraction of elastic shear waves on a thin rigid exfoliated inclusion // Izv. RAS Mechanics of Solid State. 1992. No 3. P. 139–146. (in Russian).
12. **Popov V. G.** The comparison of the displacement and stress fields at the diffraction of elastic shear waves on various defects: a crack and a thin rigid inclusion // Dynamic systems. 1993. No. 12. P. 14–23. (in Russian).

13. **Popov V. G.** Diffraction of elastic shear waves on the inclusion of a complex shape located in an unlimited elastic medium. // *Hydroaeromechanics and the theory of elasticity*. 1986. P. 121–127. (in Russian).
14. **Popov G. Ya.** Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements. Moscow: Nauka, 1982. 342 p. (in Russian).
15. **Savruk M. P.** Two-dimensional elasticity problems for bodies with cracks. Kiev: Naukova Dumka, 1981. 323 p. (in Russian).
16. **Sege G.** Orthogonal polynomials. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 500 p. (in Russian).
17. **Sulim H. T.** Fundamentals of the mathematical theory of equilibrium thermostatic deformable solids with thin inclusion. Lviv, 2007. 716 p. (in Ukrainian).
18. **Isida M., Noguchi H.** Stress intensity factors at tips of branched cracks under various loadings// *International Journal of Fracture*. 1992. Vol. 54. No 4. P. 293–316.
19. **Vitek V.** Plain stress intensity factors for branched cracks// *International Journal of Fracture*. 1977. Vol. 13. No 4. P. 481–501.
20. **Xiangqiao Yan.** Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements // *Mechanics Research Communication*. 2006. Vol. 32. Iss. 4. P.375–384.

*Національний університет
«Одеська морська академія»,
Одеса, Україна*

Надійшла до редколегії 29.09.2018