

УДК 539.3

А. И. Михальчук, В. И. Кузьменко, д-р физ.-мат. наук

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ АДГЕЗИОННОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассматривается методология численного исследования адгезионного способа движения по поверхности. Используется формулировка контактной задачи в виде вариационного неравенства. Изложены особенности алгоритма решения и выполнено исследование практической сходимости.

Ключевые слова: адгезионное движение, контактная задача, вариационный метод, метод конечных элементов.

Введение. Адгезионный способ движения основан на возможности частичного сцепления тела с поверхностью. В отличие от колесного и шагающего способов движения адгезионное перемещение не связано с действием прижимающей силы, например, силы тяжести. Поэтому с помощью механизма адгезионного движения возможно перемещение по вертикальной поверхности или в положении "спиной вниз".

Формулировка задачи об адгезионном контакте должна учитывать возможность отставания, разрушения и восстановления адгезии, а также некоторые другие эффекты. Условия контактного взаимодействия, описывающие такие эффекты, имеют сложный вид, в частности, содержат неравенства. Вследствие этого задача является существенно нелинейной даже в случае линейно-упругого тела. Кроме того, постановка задачи имеет реальный смысл лишь для тел конечных размеров. Поэтому попытки использования аналитических методов для решения задач такого класса представляются малоперспективными.

Предлагаемая методология численного решения основана на переходе к обобщенной формулировке задачи в виде вариационного неравенства. Впервые вариационный подход был применен А. Синьорини к задаче об определении напряженно-деформированного состояния линейно-деформируемого тела в жесткой гладкой оболочке. В дальнейшем теория вариационных неравенств интенсивно развилась в работах Г. Дюво, Ж.-Л. Лионса [3], Р. Гловински, Ж.-Л. Лионса и Р. Тремольера [2], И. Главачека, Я. Гаслингера, И. Нечаса и Я. Ловишека [0] и других. Фундаментальное исследование задачи Синьорини было выполнено Г. Фикерой [7]. Как эффективный метод решения контактных задач теория вариационных неравенств получила развитие в работах А. С. Кравчука [4].

Основное внимание в работе уделено вычислительным аспектам реализации алгоритма: выполнена оценка фактической погрешности приближенных решений, обоснован рациональный выбор параметров вычислений,

дана оценка необходимых ресурсов. Приведенный пример демонстрирует эффективность предложенных алгоритмов компьютерного исследования сложных контактных задач адгезионного движения.

Постановка задачи. Адгезионный способ движения тела по поверхности представляет собой повторяющуюся последовательность шагов, каждый из которых осуществляется в три этапа [5]. Процесс деформирования будем считать квазистатическим, а возникающие перемещения и деформации – малыми на каждом шаге. Полагаем, что энергия деформации, освобождающаяся при разгрузке тела, полностью аккумулируется в нем и волновых процессов не возникает.

Пусть упругое тело занимает в исходном состоянии область Ω ограниченную гладкой поверхностью Γ с внешней нормалью $\vec{v}(x)$. Обозначим через $x = (x_1, x_2, x_3)$ декартовы координаты точки тела.

Под $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ будем понимать соответственно компоненты вектора перемещений, тензоров деформации и напряжений в точке $x \in \Omega$. Тело находится под действием объемных сил $\vec{Q}(x)$. Боковые стороны и верхнее основание свободны от нагрузки.

На первом этапе адгезионного движения поверхность Γ представляем как объединение четырех непересекающихся частей: $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_a \cup \Gamma_c$; на втором и третьем – трех: $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_a \cup \Gamma_c$. Адгезионное сцепление с контактной поверхностью может происходить на участках Γ_a . Незакрепленные части могут отставать от поверхности и определяют область Γ_c возможного контакта. На задней поверхности Γ_u заданы перемещения:

$$\vec{u}(x) = \vec{g}(x), \forall x \in \Gamma_u. \quad (1)$$

Поверхность Γ_σ свободна от нагрузок:

$$\sigma_{ij}(x)v_j(x) = 0, \forall x \in \Gamma_\sigma. \quad (2)$$

Механическое взаимодействие упругого тела и жесткого основания на участке Γ_c задаются условиями неполного контакта

$$\vec{\sigma}_\tau(x) = 0, \sigma_\nu(x) \leq 0, \forall x \in \Gamma_c, u_\nu(x) \leq 0, u_\nu(x)\sigma_\nu(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma_c, \quad (3)$$

где $u_\nu = u_i v_i$; $\sigma_\nu = \sigma_{ij} v_j v_i$; $(\vec{\sigma}_\tau)_i = \sigma_{ij} v_j - \sigma_\nu v_i$.

При формулировке условий контактного взаимодействия на Γ_a учитывается, что механизм сцепления может обеспечивать адгезию только до определенного предела. При достижении пороговых значений напряжений происходит деформирование адгезионного слоя, в частности, может происходить отрыв тела от поверхности перемещения. Обозначим через σ_m и

τ_m максимально допустимые значения нормальных и касательных напряжений в области адгезии.

Условия нормального взаимодействия сформулируем в виде:

$$|\sigma_v(x)| \leq \sigma_m, \quad (\sigma_m > 0), \quad (4)$$

причем

$$u_v(x) = 0, \quad \text{если } |\sigma_v(x)| < \sigma_m; \quad (5)$$

$$u_v(x) > 0, \quad \text{если } \sigma_v(x) = -\sigma_m; \quad (6)$$

$$u_v(x) < 0, \quad \text{если } \sigma_v(x) = \sigma_m. \quad (7)$$

Условия касательного взаимодействия запишем в виде:

$$|\bar{\sigma}_\tau(x)| \leq \tau_m \quad (\tau_m > 0), \quad (8)$$

причем

$$|\bar{u}_\tau(x)| = 0, \quad \text{если } |\bar{\sigma}_\tau(x)| < \tau_m; \quad (9)$$

$$|\bar{u}_\tau(x)| > 0, \quad \text{если } |\bar{\sigma}_\tau(x)| = \tau_m; \quad (10)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_\tau(x)}{|\bar{\sigma}_\tau(x)|} = -\frac{\bar{u}_\tau(x)}{|\bar{u}_\tau(x)|}. \quad (11)$$

Таким образом, задача состоит в определении функций $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$ и $\sigma_{ij}(x)$, удовлетворяющих в области Ω соотношениям Коши, уравнениям равновесия, граничным условиям (1) – (11) и соотношениям обобщенного закона Гука для однородного изотропного тела

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

где λ и μ – постоянные Ламе; W – удельная потенциальная энергия деформации.

Вариационная формулировка задачи. Введем пространство С. Л. Соболева $[W_2^1(\Omega)]^3$ вектор-функций перемещений, определенных в области Ω и интегрируемых с квадратом в Ω вместе с первыми частными производными. Выделим множество $V \in W_2^1(\Omega)$ перемещений, удовлетворяющих кинематическим условиям.

Пусть $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ – компоненты действительного вектора перемещений и действительных тензоров деформаций и напряжений. Элементы $u_i^*(x)$ назовем компонентами вектора возможных перемещений, под

$\varepsilon_{ij}^*(x)$ будем понимать компоненты соответствующего тензора деформаций.

Вариационная формулировка задачи имеет вид [6] :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i (u_i^* - u_i) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_a} \sigma_m (|u_v^*| - |u_v|) d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \tau_m (|\bar{u}_\tau^*| - |\bar{u}_\tau|) d\Gamma \geq 0, \quad \forall u_i^* \in V.$$

Эквивалентная ей экстремальная формулировка вариационной задачи представлена в виде [6]:

$$J(u_i) = \inf_{u_i^* \in V} \left(\int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}^*) d\Omega - \int_{\Omega} Q_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma_a} \sigma_m |u_v^*| d\Gamma + \int_{\Gamma_a} \tau_m |\bar{u}_\tau^*| d\Gamma \right). \quad (12)$$

Показано, что решение вариационного неравенства является обобщенным решением задачи в дифференциальной постановке.

Численное решение задачи. Численное решение задачи основано на приближенной замене вариационной задачи некоторой конечномерной задачей. Для дискретизации применяется метод конечных элементов. Исходная вариационная задача (12) приближенно заменяется конечномерной задачей поиска минимума функции многих переменных с дополнительными условиями в виде неравенств. Отметим, что в функционале (12) в интегралах по Γ_a присутствуют множители $|u_v^*|$ и $|\bar{u}_\tau^*|$ и, следовательно, функционал недифференцируем. Регуляризация задачи выполнена путем замены функций $|u_v^*|$ и $|\bar{u}_\tau^*|$ близкими, но дифференцируемыми функциями $\omega_{\varepsilon_1}(|u_v^*|)$ и $\omega_{\varepsilon_1}(|\bar{u}_\tau^*|)$, имеющими вид:

$$\omega_{\varepsilon_1}(|u_v^*|) = \begin{cases} |u_v^*| - \frac{\varepsilon_1}{2}, & |u_v^*| > \varepsilon_1; \\ \frac{u_v^* u_v^*}{2\varepsilon_1}, & |u_v^*| \leq \varepsilon_1; \end{cases} \quad \omega_{\varepsilon_1}(|\bar{u}_\tau^*|) = \begin{cases} |\bar{u}_\tau^*| - \frac{\varepsilon_1}{2}, & |\bar{u}_\tau^*| > \varepsilon_1; \\ \frac{\bar{u}_\tau^* \bar{u}_\tau^*}{2\varepsilon_1}, & |\bar{u}_\tau^*| \leq \varepsilon_1. \end{cases}$$

Полученная в результате дискретизации задача известна как задача нелинейного программирования. Подчеркнем, что она не может быть сведена к решению системы алгебраических уравнений. Отметим характерные особенности задачи.

1. Количество переменных очень велико.

2. Переменные задачи нелинейного программирования слабо связаны между собой.

Для учета этих особенностей эффективен метод последовательной верхней релаксации. Этот метод модифицирован для учета ограничений в виде неравенств. Итерационный процесс строится так, чтобы минимизируемая функция уменьшалась, а значения узловых перемещений не выходили за пределы допустимого множества. Условия на участке границы Γ_u удовлетворяются сразу, и соответствующие узловые перемещения исключаются из числа неизвестных.

В системе Borland Delphi 7.0 разработана программная среда, предназначенная для анализа напряженно-деформированного состояния тела в процессе адгезионного движения. Она позволяет моделировать процесс движения тела по гладкой горизонтальной поверхности в нормальном положении и в положении "спиной вниз"; по вертикальной поверхности – по направлению вверх и вниз; по горизонтальной поверхности – с препятствием.

Ядро программной среды составляют следующие процедуры.

1. CreateDxDy – построение конечноэлементной сетки. Сетка в общем случае является неравномерной. Она строится таким образом, чтобы граница области адгезионного сцепления всегда совпадала с узлом конечноэлементной сетки.

2. SetBeginMove – формирование начальных перемещений в узлах сетки.

3. CalcMove – определение перемещений в узлах сетки. В этой процедуре выполняется минимизация функции многих переменных методом последовательной верхней релаксации. Метод модифицирован для учета ограничений в виде линейных неравенств.

4. CalcStressTensor – определение компонент тензора напряжений в серединах узлов сетки с помощью соотношений Коши и соотношений закона Гука.

5. CalcStressTensorInNode – определение компонент тензора напряжений в узлах сетки путем усреднения по найденным значениям в центрах конечных элементов, окружающих данный узел. Для нахождения напряжений на границе области использовалась квадратичная экстраполяция по трем узлам из глубины области.

6. CalcStrainEnergy – определение потенциальной энергии деформации тела.

Программная среда дополнена процедурами визуализации полученных результатов.

Исследование практической сходимости алгоритма. Теоретическое доказательство сходимости предполагает возможность бесконечного увеличения количества конечных элементов и выполнения бесконечного числа шагов итерационного процесса. Практически приходится ограничиться конечным числом элементов и конечным количеством итераций. В связи с этим возникает проблема оценки фактической погрешности численного решения задачи.

На погрешность численного решения влияет выбор следующих параметров:

- а) количество конечных элементов;
- б) параметр релаксации ω ;
- в) параметр ε , используемый для прерывания итерационного процесса в методе последовательной верхней релаксации.
- г) параметр ε_1 , используемый при замене недифференцируемых функций $|u_v^*|$ и $|\bar{u}_\tau^*|$ дифференцируемыми функциями $\omega_{\varepsilon_1}(|u_v^*|)$ и $\omega_{\varepsilon_1}(|\bar{u}_\tau^*|)$.

Исследуем влияние перечисленных параметров на точность приближенного решения. Будем рассматривать задачу адгезионного движения прямоугольной полосы конечных размеров в условиях плоской деформации (рис. 1). Обозначим длину тела через l , смещение торца тела в начале каждого шага движения – через u_0 . Расчеты выполним для коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$. В качестве пороговых значений нормальных и касательных напряжений в области адгезии возьмем соответственно безразмерные величины $\sigma_m = (3l)/(\mu u_0)$ и $\tau_m = (2l)/(\mu u_0)$. Длины областей адгезии на каждом этапе примем равными $l/4$.

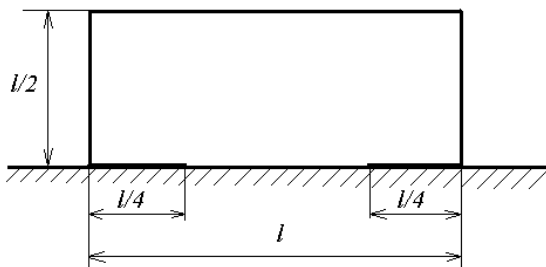


Рис. 1

При выполнении конечноэлементной аппроксимации использовалась сетка $m \times n$ элементов.

Исследуем зависимость полной энергии системы Π от числа конечных элементов при выполнении первого этапа адгезионного движения. Вычисления будем проводить при фиксированных значениях параметра релаксации $\omega = 1,96$ и параметра $\varepsilon = 10^{-5}$. В табл. 1 представлены значения полной энергии системы при различных m и n . Также в таблице приведены сведения о времени выполнения алгоритма и количестве сделанных итераций. Расчеты выполнялись на персональном компьютере с процессором Intel Core 2 Duo 3 GHz.

Приведенные результаты свидетельствуют о достаточно быстрой сходимости конечноэлементной аппроксимации. Сравнивая данные, полученные для разбиений 64×32 и 80×40 , видим, что значения Π отличаются не более чем на 0,08% , а время счета – уменьшается в 2,5 раза. Очевидно, что можно ограничиться и более крупной сеткой, а именно 52×26 : по сравнению

с разбиением 80×40 различия в значениях Π составляет $\approx 0,3\%$. При этом затраты машинного времени уменьшаются более чем в 5 раз.

Таблица 1

№ п/п	Разбиение на КЭ				Время, с	$\frac{2\Pi}{\mu\omega_0^2}$
	m	n	$m*n$	Количество итераций		
1	12	6	72	116	0,07	0,2590
2	20	10	200	282	0,11	0,2475
3	28	14	392	316	0,16	0,2425
4	36	18	648	498	0,33	0,2398
5	52	26	1352	676	1,04	0,2388
6	60	30	1800	940	1,76	0,2384
7	68	34	2312	1301	3,19	0,2382
8	80	40	3200	1829	6,09	0,2381

Изучим влияние параметра релаксации ω на точность численного решения. С этой целью сопоставим значения энергии системы при различных значениях ω . Результаты сопоставления для разбиения 52×26 при $\varepsilon = 10^{-5}$ представлены в табл. 2.

Таблица 2

№ п/п	ω	Количество итераций	Время, с	$\frac{2\Pi}{\mu\omega_0^2}$
1	1,70	5964	8,52	0,2391
2	1,74	5286	7,58	0,2390
3	1,78	4575	6,59	0,2390
4	1,82	3829	5,50	0,2390
5	1,86	3047	4,39	0,2389
6	1,90	2293	3,29	0,2388
7	1,92	1836	2,63	0,2388
8	1,94	1333	1,93	0,2388
9	1,96	676	1,04	0,2388
10	1,98	682	1,04	0,2388

Из табл. 2 видно, что рационально выбирать параметр релаксации равным 1,96.

Проведем анализ влияния параметра ε на погрешность получаемого решения. В табл. 3 приведены данные, полученные для параметра релаксации $\omega = 1,96$ при разбиении 52×26 конечных элементов.

Как видно из табл. 3, в качестве значения параметра ε целесообразно использовать величину порядка 10^{-5} . Дальнейшее его уменьшение не оказывает влияния на значение энергии системы. В ходе вычислительных экспериментов осуществлен рациональный выбор вычислительных параметров, обеспечивающих требуемую точность численного решения.

Таблица 3

№ п/п	ε	Количество итераций	Время, с	$\frac{2\Pi}{\mu_0^2}$
1	$1 \cdot 10^{-3}$	135	0,17	0,24117
2	$1 \cdot 10^{-4}$	200	0,27	0,23879
3	$5 \cdot 10^{-5}$	221	0,27	0,23878
4	$1 \cdot 10^{-5}$	276	0,44	0,23877
5	$5 \cdot 10^{-6}$	334	0,49	0,23877
6	$1 \cdot 10^{-6}$	654	0,93	0,23877

На рис. 2 показан пример деформирования тела при его движении по поверхности с препятствием. Видно, что незакрепленные участки тела отстают от поверхности перемещения. Исследование напряжений позволяет сделать вывод, что контактные напряжения не превышают пороговых значений и наиболее интенсивны на границах областей сцепления (рис. 3).

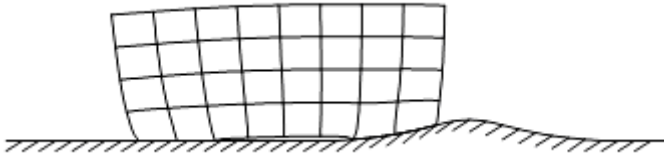


Рис. 2

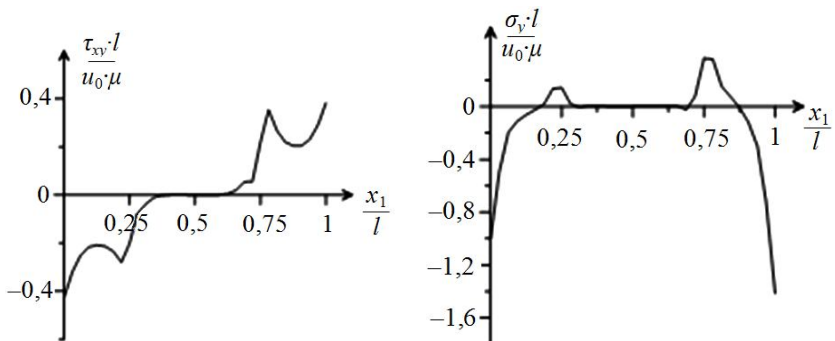


Рис. 3

Выводы. В работе рассмотрена методология численного решения задачи адгезионного движения. Изложен вычислительный алгоритм решения задачи с учетом ограничения контактных напряжений. Выполнено обоснование его практической сходимости, приведен пример численного решения рассматриваемой задачи. Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение динамических процессов при адгезионном способе движения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Главачек И.** Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. – М.: Мир, 1986. – 270 с.
2. **Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
3. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М., Наука, 1980. – 384 с.
4. **Кравчук А. С.** Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. / А. С. Кравчук – М., 1997. – 338 с.
5. **Кузьменко В. И.** Исследование напряженного состояния тела в контактных задачах адгезионного движения / В. И. Кузьменко, А. И. Михальчук. // Вісник Дніпропетровського університету: Механіка. Вип. 8, т. 2. – Дніпропетровськ, 2004. – С. 129 – 136.
6. **Кузьменко В. И.** Модель адгезионного движения с ограничением контактных напряжений / В. И. Кузьменко, А. И. Михальчук. // Математичні проблеми технічної механіки 2006: матеріали конф. – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ 2006. С. 116 – 117.
7. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости / Г. Фикера. – М.: Мир, 1972. – 160 с.

*Днепропетровский национальный университет
им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, Украина*

Поступила в редколлегию 06.03.2011

Г. Й. Михальчук, В. І. Кузьменко, д-р фіз.-мат. наук

КОМП'ЮТЕРНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ АДГЕЗІЙНОГО РУХУ

Розглядається методологія числового дослідження адгезійного способу руху по поверхні. Використовується формулювання контактної задачі у вигляді варіаційної нерівності. Викладено особливості алгоритму розв'язання й виконане дослідження практичної збіжності.

Ключові слова: Адгезійний рух, контактна задача, варіаційний метод, метод скінченних елементів.

A. I. Mikhalchuk, V. I. Kuzmenko, Professor

COMPUTER ANALYSIS OF ADHESIVE MOTION PROCESSES

The methodology of the numerical investigation of the adhesive motion methods on the surface are considered. We state of the contact problem as a variational inequality, discuss main features of the solution algorithm and its practical convergence.

Keywords: adhesive motion, contact problem, variational method, finite element method.