

УДК 539.3

Х. І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук

ЕФЕКТ ТЕРМІЧНОЇ РЕКТИФІКАЦІЇ В БІМАТЕРІАЛІ З МІЖФАЗНОЮ ЩІЛИНОЮ ЗМІННОЇ ВИСОТИ, ЗАПОВНЕНОЮ ІДЕАЛЬНИМ ГАЗОМ

Вивчено явище термічної ректифікації в біматеріалі з заповненою ідеальним газом між фазною щілиною змінної висоти. Вплив газу на теплообмін між берегами щілини змодельовано термоопором, пропорційним розкриттю щілини. Для визначення тиску газу використано рівняння Клапейрона – Менделєєва. Відповідну задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілини та стрибка температури між її берегами. На основі її розв'язку проаналізовано залежності розподілу термоопору щілини та показника термічної ректифікації від густини теплового потоку, коефіцієнта теплопровідності газу та його маси.

Ключові слова: ефект термічної ректифікації, щілина змінної висоти, термоопір, тиск, ідеальний газ.

Вступ. Передача тепла через з'єднані елементи суттєво залежить від термомеханічних параметрів тіл, прикладеного навантаження, геометричних характеристик поверхонь та властивостей заповнювача зазорів між ними. У [9] досліджено передачу тепла між спряженими поверхнями тіл за наявності середовища в інтерфейсних зазорах. Встановлено, що для матеріалів з різними термомеханічними властивостями спостерігається явище термічної ректифікації, яке полягає у залежності контактного термоопору від напрямку теплового потоку. Для контакту двох тіл з шорсткими поверхнями явище термічної ректифікації експериментально було досліджено у [6], в якій вивчено вплив газу на теплообмін між тілами. Теоретичні дослідження термічної ректифікації стосуються контакту пружних тіл з поверхневими виїмками, заповненими теплопровідним середовищем, та текстурованих тіл за наявності міжконтактного газу [5, 7], вплив якого враховано контактним термоопором, що пропорційний висоті зазору і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності газу. Споріднені проблеми виникають також при дослідженні термонапруженого стану тіл з теплопроникними тріщинами [1 – 4, 8]. У [1] вивчено температурне поле в однорідному тілі з круговою тріщиною з наперед заданим термоопором. Термонапружений стан біматеріального тіла з міжфазною розкритою тріщиною досліджено у [8], за умови, що її термоопір незмінюється під час навантаження. У [2, 3] вивчено термопружну поведінку біматеріалів з міжфазними заповненими тріщинами, термоопір яких пропорційний розкриттю тріщин і зміню-

ється під дією силового і теплового навантаження. В цих працях було виявлено ефект термічної ректифікації, який проявляється у зміні розкриття тріщини та ефективного між фазного термоопору біматеріалу з періодичною системою між фазних тріщин при зміні напрямку теплового потоку на протилежний. При цьому було враховано лише теплопровідність заповнювача і знехтувало його механічним впливом.

Дана стаття присвячена дослідженню явища термічної ректифікації в біматеріалі з міжфазною щілиною змінної висоти, заповненої теплопровідним газом, з врахуванням його тиску на береги щілини.

Постановка задачі та методика розв’язування. Розглядаємо біматеріал, складений з двох півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких характеризуються різними термомеханічними сталими: коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). На межі з’єднання півплощин розташована між фазна щілина (рис. 1) завдовжки $2a$ з початковою висотою $h_0(x)$, яка значно менша від довжини щілини ($h_0(x)/a \approx 1, |x| \leq a$). Порожнину щілини заповнена ідеальним теплопровідним газом, який чинить тиск на її береги. На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний тепловий потік q , а також лінійно розподілені по координаті y напруження S_1 і S_2 , які усувають глобальне видовження і викривлення півплощин під дією розтягувального навантаження і теплового потоку.

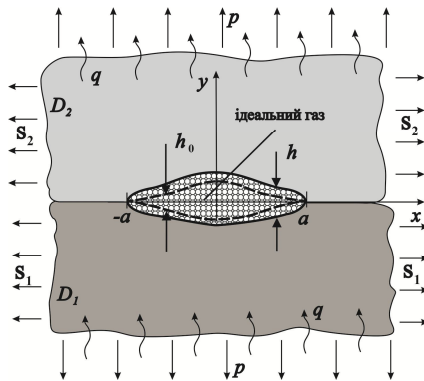


Рис. 1 – Схема біматеріалу з між фазною щілиною, заповненою ідеальним газом

Тиск газу у порожнині тріщини визначається з рівняння Клапейрона – Менделєєва

$$P_g V_g = m_g R T_g / \mu_g, \quad (1)$$

де m_g – маса газу, μ_g – молярна маса газу; T_g – абсолютна температура газу; $R = 8.3145 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$ – універсальна газова стала,

$$V_g = l \int_{-a}^a h(x) dx - \text{об'єм газу, що припадає на одиницю довжини тріщини}$$

l ($l = 1 \text{ м}$) в перпендикулярному до площини рис. 1 напрямку, $h(x)$ – розкриття щілини, яке змінюється при зміні прикладеного навантаження.

Вплив газу на передачу тепла між берегами щілини враховуємо умовою неідеального теплового контакту з термоопором $R(x)$:

$$T^- - T^+ = q_y^+ R(x),$$

де термоопір щілини $R(x)$ пропорційний її розкриттю $h(x)$ і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності газу λ_g ($R(x) = h(x)/\lambda_g$).

На ділянках з'єднання півплощин поза тріщиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту.

Гранично-контактні умови сформульованої задачі на міжфазній лінії мають вигляд:

- на ділянках контакту півплощин

$$T^+ = T^-, q_y^+ = q_y^-, \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^-, u^+ = u^-, v^+ = v^-, \quad (2)$$

- на ділянці тріщини

$$T^- - T^+ = q_y^+ \frac{h(x)}{\lambda_g}, q_y^+ = q_y^-, \sigma_y^+ = \sigma_y^-, \sigma_y^- = P_g, \tau_{xy}^+ = 0, \tau_{xy}^- = 0, \quad (3)$$

де T – температура; q_y – компонента вектора теплового потоку; u, v – компоненти вектора переміщень; σ_y, τ_{xy} – компоненти тензора напружень; індексами «+», «-» – позначено граничні значення величин у верхній і нижній півплощині відповідно.

Використовуючи викладену у [8] методику, температурне поле і напружено-деформований стан в біматеріалі подано через розкриття щілини $h(x)$ та стрибок температури між її берегами $\gamma(x)$, для визначення яких отримано систему нелінійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР):

$$\int_{-a}^a \frac{h'(t)}{t-x} dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x) = -\frac{1}{2G^*} \left(p + \frac{m_g RT_g}{\mu_g l \int_{-a}^a h(x) dx} \right) + \int_{-a}^a \frac{h'_0(t)}{t-x} dt, \quad |x| < a, \quad (4)$$

$$\lambda_f \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt = q, \quad |x| < a, \quad (5)$$

де $\lambda = 2\lambda_1\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$, $G^* = G_1(1 - \kappa_2)/(1 - \kappa_1\kappa_2)$, $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$, $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$, $\eta_1 = \alpha_1(1 + \nu_1)/\lambda_1$, $\eta_2 = \alpha_2(1 + \nu_2)/\lambda_2$ – термічні дистортивності (ТД) матеріалів півплощин D_1 і D_2 .

На кінцях тріщини функції $\gamma(x)$ та $h(x)$ задовольняють умови

$$h(\pm a) = 0, \quad \gamma(\pm a) = 0. \quad (6)$$

Для розв'язування системи СІДР (4), (5) адаптовано аналітично-числову ітераційну процедуру розв'язування задачі термопружності для біматеріалу з між фазною заповненою теплопровідною речовиною тріщиною без врахування тиску газу [2].

Нижче проведено числовий аналіз впливу силових і теплових чинників на міжфазний термоопір.

Числові результати. Для числових розрахунків вводимо в розгляд безрозмірні величини: розкриття тріщини $\bar{h} = h/a$, стрибок температури $\bar{\gamma} = \gamma\lambda\eta^-$, коефіцієнт теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g = \lambda_g/\lambda$, масу газу

$$\bar{m}_g = \frac{m_g RT_g}{G^* \mu_g a^2 l}, \quad \text{тиск газу } \bar{P}_g = P_g/G^*, \quad \text{розтягувальні зусилля } \bar{p} = p/G^*,$$

тепловий потік $\bar{q} = qa\eta^-$. Вважаємо, що початкова висота щілини задана функцією $\bar{h}_0(\bar{x}) = 0.001 \left(1 - (\bar{x})^2\right)^{3/2}$, термічні ТД компонентів біматеріалу різні ($\eta_1 \neq \eta_2$, $\eta^- \neq 0$), а інтенсивність розтягувальних зусиль фіксована ($\bar{p} = 0,01$).

Зауважимо, що безрозмірний тепловий потік \bar{q} може набувати додатних значень ($\bar{q} > 0$), якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, та від'ємних ($\bar{q} < 0$), якщо до матеріалу з меншою ТД.

Виявлено ефект напрямленості теплового потоку (термічної ректифікації), який полягає у тому, що термоопір щілини залежить від теплового потоку і змінюється при зміні його напрямку.

Кількісною характеристикою ефекту напрямленості є параметр $\delta = \left| R_{\max}^+ - R_{\max}^- \right| / \left| R_{\max}^+ \right| \cdot 100\%$, який визначає відносну різницю максимальних значень термоопору тріщини R_{\max}^+ за теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, і термоопору тріщини R_{\max}^- за теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншою ТД.

Для фіксованого коефіцієнта теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g = 0,01$ на рис. 2 проілюстровано розподіл термоопору щілини $\bar{R}(\bar{x})$ за різної маси газу \bar{m}_g та двох напрямів теплового потоку \bar{q} . Бачимо, що термоопір тріщини більший за потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД і зростає зі збільшенням маси газу для двох напрямів потоку.

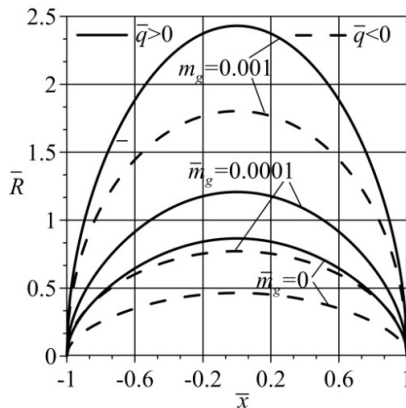


Рис. 2 – Розподіл термоопору щілини $\bar{R}(\bar{x})$

для різних значень маси газу \bar{m}_g та протилежних напрямів теплового потоку \bar{q}

На рис. 3 зображено залежність параметра термічної ректифікації δ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для $\bar{\lambda}_g = 0,01$ і різних значень маси газу \bar{m}_g . Параметр термічної ректифікації зростає з ростом густини теплового потоку і спадає з ростом маси газу. Залежність параметра δ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ є нелінійною. Найбільших значень параметр δ приймає за відсутності газу ($\bar{m}_g = 0$) і поступово зменшується зі збільшенням маси газу.

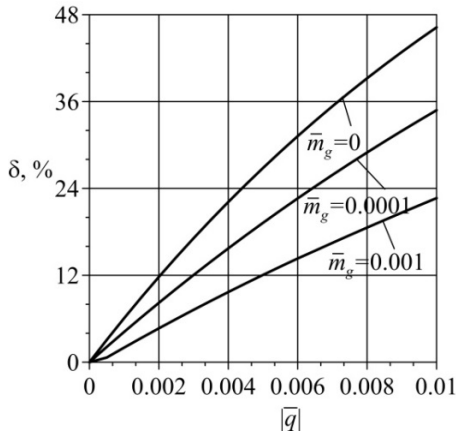


Рис. 3 – Залежність параметра термічної ректифікації δ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень маси газу \bar{m}_g

На рис. 4 проілюстровано вплив теплопровідності газу на термоопір щілини $\bar{R}(\bar{x})$ для заданої маси газу $\bar{m}_g = 0,0001$ та двох напрямів теплового потоку. Бачимо, що зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності газу міжфазний термоопір спадає для обох напрямів теплового потоку. При цьому різниця між значеннями термоопору для протилежних напрямів теплового потоку зменшується.

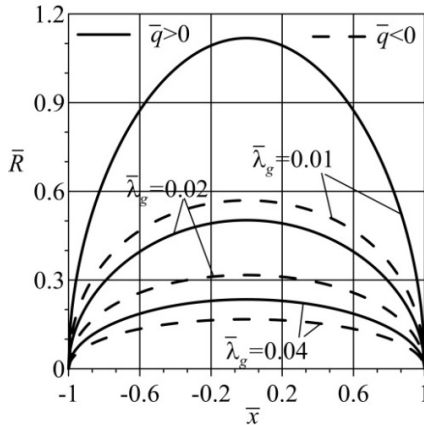


Рис. 4 – Розподіл термоопору щілини $\bar{R}(\bar{x})$ для різних значень коефіцієнта теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g$ та протилежних напрямів теплового потоку \bar{q}

На рис. 5 показано зміну параметра термічної ректифікації δ для різних значень коефіцієнта теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g$ та фіксованої маси газу ($\bar{m}_g = 0.0001$). Бачимо, що параметр термічної ректифікації зменшується зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності газу.

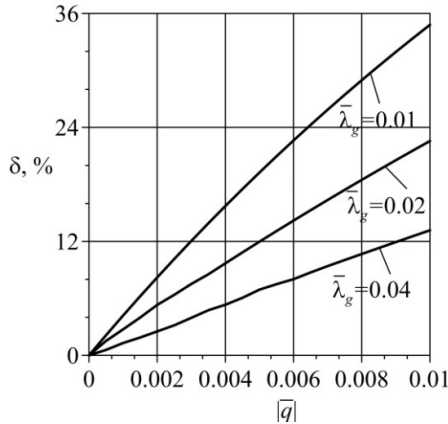


Рис. 5 – Залежність параметра термічної ректифікації δ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних коефіцієнтів теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g$

Висновки. Досліджено ефект термічної ректифікації для біматеріального тіла з між фазною щілиною змінної висоти, порожнина якої заповнена ідеальним теплопровідним газом. Термоопір і тиск газу залежать від розкриття щілини, яке змінюється під дією нормальних до міжфазної лінії розтягувальних зусиль і теплового потоку. Відповідна задача термопружності зведена до нелінійної системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь відносно розкриття щілини і стрибка температури між її берегами. На основі аналітично-числового розв'язку системи проаналізовано вплив маси газу та коефіцієнта теплопровідності газу на розподіл термоопору щілини та параметр термічної ректифікації. Виявлено, що термоопір щілини зростає зі збільшенням маси газу та зменшенням його коефіцієнта теплопровідності. Параметр термічної ректифікації зростає з ростом густини теплового потоку і спадає зі збільшенням маси газу і коефіцієнта його теплопровідності.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной // Тепловые напряжения в элементах конструкций. 1970. № 9. С. 78–88.
2. *Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. Львів: Растр-7, 2017. 68 с.

3. **Мартыняк Р. М., Гончар Х. И.** Термоупругое деформирование биматериала с межфазным дефектом, заполненным теплопроводной средой // Теорет. и прикл. механика. 2005. Вып. 41. С. 58–62..
4. **Середницька Х. І., Мартиняк Р. М.** Ефективні міжфазні параметри біматеріалу з періодичною системою міжфазних теплопровідних тріщин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2016. Вип. 23. С. 161–168.
5. **Чумак К. А.** Эффект направленности теплового потока у разі заповненого теплопроникним середовищем зазору на межі двох тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. 2013. Вип. 17. С. 219–225.
6. **Bahrami M., Yovanovich M. M., and Culham J. R.** Thermal joint resistances of conforming rough surfaces with gas-filled gaps // J Thermophys. Heat Transf. 2004; Vol.18. P. 318–325.
7. **Chumak K., Martynyak R.** Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // Int. J. Heat Mass Transf. 2012. Vol.55. No 21–22. P. 5603–5608.
8. **Kuo A.-Y.** Interface crack between two dissimilar half-spaces subjected to a uniform heat flow at infinity – open crack // ASME J. Appl. Mech. 1990. Vol.57. No 2. P. 359–364.
9. **Madhusudana C. V.** Thermal contact conduction and rectification at low joint pressures // Int. Comm. Heat Mass Transf. 1993. Vol 20. No 1. P. 123–132.

УДК 539.3

Х. І. Середницька, канд. фіз.-мат. наук

ЭФФЕКТ ТЕРМИЧЕСКОЙ РЕКТИФИКАЦИИ В БИМАТЕРИАЛЕ С МЕЖФАЗНОЙ ЩЕЛЬЮ ПЕРЕМЕННОЙ ВЫСОТЫ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ

Изучено явление термической ректификации в биматериале с межфазной щелью переменной высоты, заполненной идеальным газом. Влияние газа на теплообмен между берегами щели смоделировано термосопротивлением, пропорциональным раскрытию трещины. Для определения давления идеального газа использовано уравнение Клапейрона – Менделеева. Соответствующая задача термоупругости сведена к нелинейной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений относительно раскрытия щели и скачка температуры между ее берегами. На основании ее решения проанализированы зависимости распределения термосопротивления щели и показателя термической ректификации от плотности теплового потока, коэффициента теплопроводности газа и его массы.

Ключевые слова: эффект термической ректификации, щель переменной высоты, термосопротивление, давление, идеальный газ.

UDC 539.3

Kh. I. Srednytska, PhD (Phys.-Math.)

EFFECT OF THERMAL RECTIFICATION IN BIMATERIAL WITH AN INTERFACE CRACK OF VARIABLE HEIGHT FILLED WITH IDEAL GAS

The phenomenon of thermal rectification in a bimaterial with an interface crack of variable height filled with gas is studied. The effect of gas on the transfer of heat

between the crack edges is modeled by the thermal resistance which proportional to crack opening. To determine the pressure of an ideal gas, the Clapeyron-Mendeileev equation is used. The corresponding thermo-elasticity problem is reduced to a nonlinear system of singular integro-differential equations for a crack opening and a temperature jump between the crack edges. On the basis of its solution, the dependences of the distribution of the thermal resistance of the crack and the thermal rectification indicator on the density of the heat flow, the thermal conductivity of the gas and its mass are analyzed.

Keywords: thermal rectification effect, crack of variable height, thermal resistance, pressure, ideal gas

The transfer of heat through connected elements essentially depends on the thermomechanical parameters of the bodies, the applied loads, the geometric characteristics of the surfaces and the properties of the filler gap between them. In the works [9], heat transfer between conjugate surfaces of bodies was studied in the presence of a medium in the interface gap. It is shown that the heat transfer is not ideal due to the contact surface of the bodies, but through the medium which is filled interface gaps. It is established, that for materials with different thermomechanical properties there is a phenomenon of thermal rectification, which consists in the dependence of the contact thermal resistance on the direction of the heat flow. For the contact of two bodies with rough surfaces, the phenomenon of thermal rectification was experimentally investigated in [6], in which the effect of gas on the heat exchange between bodies was studied. Theoretical studies of thermal rectification concern the contact of elastic bodies with surface grooves filled with thermal conductive medium and textured bodies in the presence of inter-contact gas [5, 7]. The effect of the gas on heat exchange between surface gaps is taken into account by contact resistance which is directly proportional to the gap height and inversely proportional to the filler thermal conductivity. Similar problems arise also in the study of the thermo-stressed state of bodies with heat-permeable cracks [1 – 4, 8]. In the paper [1] the temperature field in a homogeneous body with a circular crack with a pre-determined thermo-resistance is studied. The thermo-stressed state of a bimaterial body with an interface open crack was investigated [8], provided that its thermal resistance does not change during loading. In the works [2, 3] studied the thermo-elastic behavior of bimaterial with interface filled cracks provided that the thermal resistance is proportional to the crack opening and change under the action of mechanical and heat loads. In these works, the effect of thermal rectification was discovered. The crack opening changes when the direction of the heat flow is changed to the opposite. In this case, only the thermal conductivity of the filler was taken into account and neglected by its mechanical influence.

In this paper, we investigate the effect of thermal rectification in a bimaterial with an interfacial crack of variable height, filled with a thermo-conductive gas, taking into account its pressure on the crack edges. The corresponding thermoelasticity problem is reduced to a nonlinear system of singular integro-differential equations for the opening crack and the jump of temperature between the edges. For its solution, the analytical-numerical

procedure for solving the thermo-elasticity problem for a bimaterial with an interface crack filled thermal conduction medium [2], was adapted. The influence of the density of the heat flow, the mass of the gas and the coefficient of its thermal conductivity on the distribution of the thermal resistance of the crack and the parameter of thermal rectification are analyzed. It was found that the thermal resistance of the crack increases with increasing mass of gas and decreasing the coefficient of thermal conductivity of the filler. The parameter of thermal rectification increases with the increasing the density of the heat flow and decreases with increasing the mass of gas and the coefficient of thermal conductivity of the gas.

REFERENCES

1. **Kit G. S., Poberezhniy O. V.** Thermo elastic state of an infinite body with a heat-conducting circular crack // *Therma Istress in the Elements of Construction*. 1970. No 9. P. 78–88. (in Russian).
2. **Martynyak R. M., Serednytska Kh. I.** Contact problems of thermoelasticity for interface cracks in bimaterials. Lviv: Rastr-7, 2017. 168 p. (in Ukrainian).
3. **Martynyak R. M., Honchar Kh. I.** Modelling of thermoelastic behavior of bimaterial with a heat conductive interface crack // *Applied Problems of Mechanics and Mathematics*. 2005. Vol. 3. P. 83–88. (in Russian).
4. **Serednytska Kh. I.** The effective interfacial parameters of a bimaterial with a periodic set of heat-conducting interfacial cracks // *Physical-mathematical modeling and information technologies*. 2016. Vol. 23. P. 161–168. (in Ukrainian).
5. **Chumak K. A.** The effect of the direction of the heat flow in the case of a gap filled with thermal conductive medium at the boundary of two bodies // *Physical-mathematical modeling and information technologies*. 2013. Vol. 17. P. 219–225. (in Ukrainian).
6. **Bahrami M., Yovanovich M. M., and Culham J. R.** Thermal joint resistances of conforming rough surfaces with gas-filled gaps // *J Thermophys. Heat Transf.* 2004; Vol.18. P. 318–325.
7. **Chumak K., Martynyak R.** Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2012. Vol.55. No 21–22. P. 5603–5608
8. **Kuo A.-Y.** Interface crack between two dissimilar half-spaces subjected to a uniform heat flow at infinity – open crack // *ASME J. Appl. Mech.* 1990. Vol.57. No 2. P. 359–364.
9. **Madhusudana C. V.** Thermal contact conduction and rectification at low joint pressures // *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 1993. Vol 20. No 1. P. 123–132.

*Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна*

Надійшла до редколегії 30.09.2018