

УДК 539.3

*В. М. Быстров, канд. физ.-мат. наук,  
В. А. Декрет, д-р физ.-мат. наук,  
В. С. Зеленский, канд. физ.-мат. наук*

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СЖАТИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКОЙ

С использованием основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости в рамках модели кусочно-однородной среды получено численное решение задачи устойчивости слоистого композитного материала при сжатии поверхностной нагрузкой. Рассмотрен случай граничных условий на боковых сторонах многослойного композитного образца, которые соответствуют условиям симметрии. Исследована зависимость форм потери устойчивости и критических нагрузок от размера расчетной области, связанного с количеством слоев, включенных в представительный элемент композитного материала.

*Ключевые слова:* слоистый композитный материал, многослойный представительный элемент, продольное сжатие, критическая нагрузка, форма потери устойчивости, трехмерная линеаризованная теория устойчивости, смятие торцов.

**Введение.** Одним из возможных механизмов разрушения однонаправленных композитных материалов (КМ) при сжатии является потеря устойчивости армирующих слоев и волокон (microbuckling). При сжатии однонаправленных КМ поверхностной нагрузкой вдоль направления армирования указанный механизм разрушения может иметь характер приповерхностной потери устойчивости с формами потери устойчивости, затухающими при удалении от поверхности. Такой механизм соответствует разрушению материала в виде смятия торцов образцов и элементов конструкций из КМ [5]. Для слоистых композитных материалов это явление связано с потерей устойчивости армирующих слоев. Впервые выпучивание краевой поверхности (edge buckling) образца из слоистого материала при сжатии вдоль слоев ортогонально к поверхности исследовано в [7] на основе инкрементальной теории деформаций [6]. В [13] аналогичное явление поверхностного выпучивания (surface buckling) армированной слоями среды при ортогональном расположении слоев к поверхности рассмотрено в рамках теории многослойных конструкций [1]. В [4] представлена, основанная на трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [3, 8], континуальная теория разрушения при смятии торцов. Показано, что для однонаправленных КМ (армирующие волокна или слои направ-

лены перпендикулярно к торцу) на первоначальном этапе разрушения КМ при сжатии поверхностной нагрузкой вдоль направления армирования единственно возможным механизмом разрушения является приповерхностная потеря устойчивости в структуре материала, которая предшествует внутренней потере устойчивости. В [9] приведены результаты численного исследования приповерхностной потери устойчивости слабо армированного слоистого КМ при одноосном сжатии поверхностной нагрузкой в рамках модели кусочно-однородной среды. При использовании указанных расчетных моделей в [3, 8, 9] предполагалось наличие однородного или кусочно-однородного докритического состояния, а исследования проводились для полупространства или полуплоскости без учета влияния боковых сторон образца из КМ.

В [11, 12] на основе ТЛТУДТ в рамках модели кусочно-однородной среды предложена расчетная модель для численного решения методом сеток задачи устойчивости слоистого КМ при одноосном сжатии армирующих слоев поверхностной нагрузкой. В качестве представительного элемента КМ использована двухслойная расчетная область с граничными условиями на боковых сторонах расчетной области, которые соответствуют условиям симметрии. Показано, что как в случае кусочно-однородного, так и неоднородного докритического состояния имеет место приповерхностная потеря устойчивости и рассмотренная расчетная модель может быть использована для исследования такой проблемы, как разрушение при смятии торцов. При численном решении задачи устойчивости переход от исходной модели для материалов, которым соответствует бесконечная или полубесконечная область, к области конечных размеров в рамках модели кусочно-однородной среды проводится, исходя из условий регулярности и периодичности композитных структур, симметричности условий их нагружения. При этом возникает вопрос о влиянии количества слоев, включенных в представительный элемент КМ, на критические параметры устойчивости КМ. В настоящей работе исследована зависимость форм потери устойчивости и критических нагрузок КМ от размеров расчетной области вдоль линии приложения поверхностной нагрузки при увеличении количества слоев многослойного представительного элемента КМ.

Сложность получения аналитических решений для задач указанного класса предполагает использование современных численных методов. В данной работе для численного решения рассматриваемых задач использован метод сеток на основе модифицированного вариационно-разностного подхода [2, 9].

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу устойчивости слоистого двухкомпонентного КМ регулярной структуры (рис. 1, а) для схемы нагружения, которая соответствует равномерному одноосному сжатию слоев наполнителя в направлении оси  $Ox_2$  поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности  $p^0$  и в общем случае приводит к неоднородному докритическому состоянию.

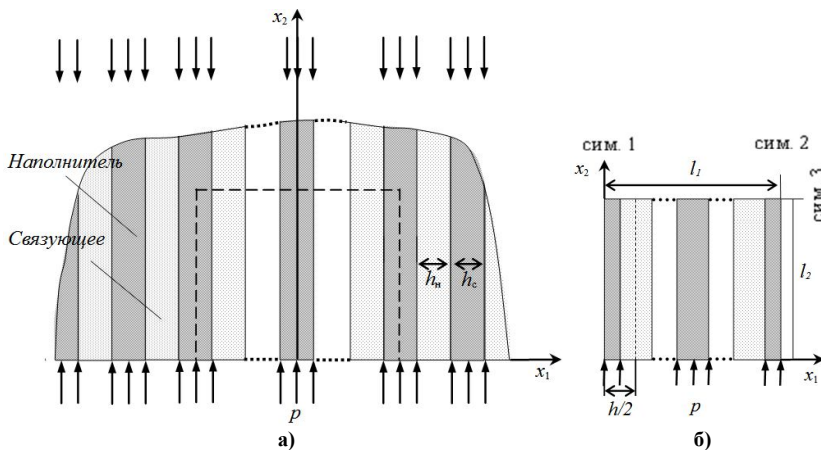


Рис. 1 – Слоистый КМ (а); представительный элемент материала (б),  
сим 1, сим 2, сим 3 – оси симметрии  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = l_1$ ,  $x_1 = l_2$

Поверхностная нагрузка имеет следующий вид

$$p(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 0) = \begin{cases} p^0, & -h_n/2 + kh \leq x_1 \leq h_n/2 + kh, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \\ 0, & \text{для остальных } x_1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $h = h_n + h_c$  – параметр структуры;  $h_n$ ,  $h_c$  – соответственно толщина слоя наполнителя (армирующего слоя) и слоя связующего (матрицы).

Предполагаем, что на бесконечности нагрузка к армирующим слоям прикладывается по такой же схеме. Вдоль оси  $Ox_3$  нагрузка не изменяется.

Исходя из условий симметрии нагружения и регулярности структуры КМ, задачу устойчивости решаем для представительного элемента материала, которому соответствует расчетная область конечных размеров. Указанная расчетная область показана на рис. 1, б.

Крайние слои представительного элемента являются армирующими слоями. Граничные условия на боковых сторонах расчетной области соответствуют условиям симметрии. Размер  $l_1$  расчетной области в направлении оси  $Ox_1$  изменяется кратно двум параметрам структуры  $h$ :  $l_1 = 2nh$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , вследствие чего средний слой представительного элемента является симметрично нагруженным армирующим слоем. Исследуется форма потери устойчивости среднего слоя.

Предполагая, что материал наполнителя и связующего являются достаточно жестким, при исследовании устойчивости будем применять второй вариант теории малых докритических деформаций [3, 8]. Поверхностную нагрузку считаем «мертвой», что обеспечивает выполне-

ние достаточных условий применимости статического метода исследования [10]. При использовании этого метода задача устойчивости сводится к обобщенной задаче на собственные значения, в которой минимальное собственное значение  $\lambda$  определяет критическую нагрузку, а соответствующая собственная функция  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – форму потери устойчивости. Задачу рассматриваем в двумерной постановке для случая плоской деформации в плоскости  $x_1Ox_2$ .

Начальное состояние определяем из следующих основных соотношений линейной теории упругости:

– уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0 \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

– граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{21}^0 = 0 \wedge u_2^0 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ \sigma_{12}^0 = 0 \wedge u_1^0 = 0, \quad (x_1 = 0 \vee x_1 = l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2); \\ \sigma_{22}^0 = p \wedge \sigma_{21}^0 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

– условия контакта между слоями

$$\left[ \sigma_{i1}^0 \right] = 0, \quad \left[ u_i^0 \right] = 0; \quad (4)$$

– соотношения между компонентами напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}^0$  и перемещений  $u_i^0$  в пределах компонента КМ

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} A_{ik} \varepsilon_{kk}^0 + 2(1 - \delta_{ij}) G \varepsilon_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{2}(u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad i \neq j, \quad (5)$$

где

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (6)$$

Здесь  $A_{ij}$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  – модули упругости, модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона слоя.

Основные соотношения трехмерной линеаризованной теории устойчивости для определения критических параметров устойчивости КМ имеют следующий вид:

– уравнения равновесия в возмущениях

$$\left( \sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k} \right)_i = 0, \quad x \in \Omega; \quad (7)$$

– граничные условия

$$\begin{aligned} & (\sigma_{12} + \lambda \sigma_{22}^0 u_{1,2}) = 0 \wedge u_2 = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ u_1 = 0 \wedge & (\sigma_{12} + \lambda \sigma_{11}^0 u_{2,1}) = 0, \quad (x_1 = 0 \vee x_1 = l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2); \\ & (\sigma_{m2} + \lambda p u_{m,2}) = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

– условия контакта между слоями

$$\left[ \sigma_{m1} + \lambda \sigma_{1i}^0 u_{m,i} \right] = 0, \quad [u_i] = 0. \quad (9)$$

Соотношения между возмущениями напряжений  $\sigma_{ij}$ , деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и перемещений  $u_i$  в пределах компонента КМ имеют вид (5), (6).

Критическую нагрузку определяем из следующего соотношения:

$$p_{кр} = \min |\lambda| / (2nh) \int_{0 \leq x_1 \leq l_1} p(x_1) dx_1 = \min |\lambda| p^0 h_n / h, \quad (10)$$

где  $\min |\lambda|$  – минимальное по модулю собственное число задачи (7) – (9).

Вид соотношения (10) отражает тот факт, что сжимающую нагрузку прикладываем только к армирующим слоям.

Обозначения в (2) – (9) являются общепринятыми, и индексы изменяются от 1 до 2 ( $\wedge, \vee$  – знаки логического умножения и сложения). Верхним индексом «0» обозначены компоненты напряжений и перемещений для докритического состояния. Индекс, обозначающий принадлежность к слою КМ, для удобства опущен. В соотношениях (4), (9)  $[f(x)] = f(x-0) - f(x+0)$  – скачок функции  $f(x)$ .

**Численное решение.** Задачу (2) – (6), (7) – (9) решаем методом сеток с использованием концепции базовой схемы. При таком подходе разностную схему для расчетной области  $\Omega$  строим в каждом сеточном узле как определенную сумму значений базовой схемы, представляющей собой разностную схему, полученную вариационно-разностным способом на шаблоне ячейки разностной сетки [2, 9]. Переходя от исходной полубесконечной модели КМ к ограниченной расчетной области, ее размер в направлении  $Ox_2$  определяем в результате вычислительного эксперимента, исходя из условия, что расчетные параметры принимают установившееся значение относительно увеличения размеров расчетной области в указанном направлении. Такими расчетными параметрами являются размер области неоднородного докритического состояния и критическая нагрузка.

При численном решении задачи методом сеток в расчетной области  $\bar{\Omega}$  вводится неравномерная разностная сетка, состоящая из множества  $\omega$  внутренних и множества  $\gamma$  граничных узлов, и задачам (2) – (6), (7) – (9) ставятся в соответствие разностные задачи такого вида:

$$A_m \mathbf{u} = \Phi_m, \mathbf{x} \in \bar{\omega}, \quad (11)$$

$$A_m \mathbf{u} = \lambda B_m \mathbf{u}, \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (12)$$

Выражения для разностных операторов  $A$ ,  $B$  и вектора правой части  $\Phi$  представлены в [11, 12]. Для решения дискретных задач применены эффективные численные методы [14] в соответствии с методикой, представленной в [2, 9]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача определения начального состояния решалась прямым методом Холецкого, а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов. Дискретная задача устойчивости на собственные значения решалась методом итерирования подпространства.

**Численные результаты.** Рассмотрен композитный материал слоистой структуры при сжатии поверхностной нагрузкой, заданной соотношением (1), и следующими механическими и геометрическими характеристиками:  $E^1 / E^2 = 100$ ;  $\nu^1 = \nu^2 = 0,3$ ;  $c_a = h_n / h = 0,5$  ( $c_a$  – объемное содержание армирующих слоев). Здесь  $E^1, E^2$  и  $\nu^1, \nu^2$  – соответственно, модули Юнга и коэффициенты Пуассона армирующих слоев и слоев связующего. Расчеты проводились для размеров  $l_1 = 2nh$  расчетной области в направлении оси  $Ox_1$ , соответствующих значениям  $n = 1 \div 10$ .

На рис. 2 представлены формы потери устойчивости

$$u_2^*(x_2) = u_2(x_2/h) / u_2^{\max}$$

в сечении  $x_1 = l_1/2$  среднего армирующего слоя представительного элемента КМ для различных значений размера  $l_1$  расчетной области, где  $u_2^{\max}$  – максимальное значение возмущения перемещений в указанном сечении.

На рис. 3 показана зависимость соответствующих критических нагрузок  $p_{кр} / p_{кр}^{ycm}$  от указанного размера расчетной области, где  $p_{кр}^{ycm}$  – критическая нагрузка для значения  $l_1 = 20h$  (максимальное значение в рамках проведенного исследования).

Как видно из представленной графической информации, при увеличении количества слоев в представительном элементе КМ и соответствующем увеличении размера расчетной области наблюдается сближение форм потери устойчивости и значений критических нагрузок. Эти формы имеют затухающий характер и характеризуют поверхностную

неустойчивость материала. Формы потери устойчивости локализуются вблизи поверхности материала и имеют вид волны с затухающей амплитудой при удалении от поверхности.

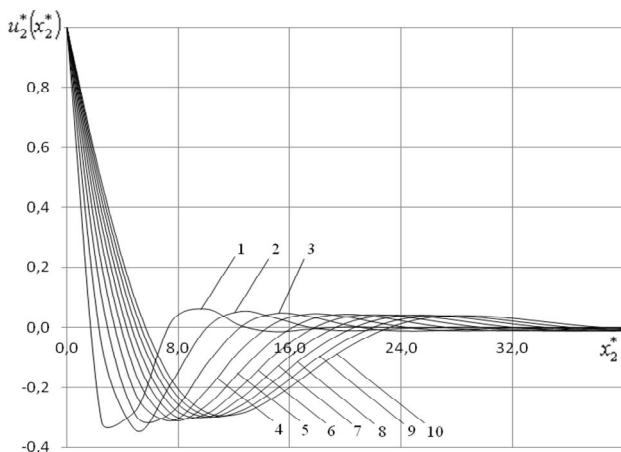


Рис. 2 – Формы потери устойчивости среднего армирующего слоя представительного элемента КМ для различных значений  $l_1 = nh$  размера расчетной области вдоль линии приложения нагрузки: 1 –  $2h$ , 2 –  $4h$ , 3 –  $6h$ , 4 –  $8h$ , 5 –  $10h$ , 6 –  $12h$ , 7 –  $14h$ , 8 –  $16h$ , 9 –  $18h$ , 10 –  $20h$

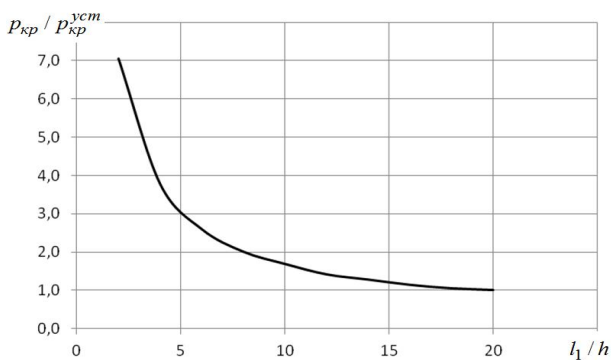


Рис. 3 – Зависимость критической нагрузки  $P_{кр}$  от размера  $l_1$  расчетной области вдоль линии приложения поверхностной нагрузки

**Выводы.** Расчетная схема на основе ТЛТУДТ и модели кусочно-однородной среды, когда в качестве представительного элемента КМ используется многослойная расчетная область с граничными условиями на боковых сторонах расчетной области, которые соответствуют условиям симметрии, позволяет исследовать механизм разрушения, соответствующий смятию торцов.

При увеличении размера расчетной области вдоль линии приложения поверхностной нагрузки, что соответствует увеличению количества слоев представительного элемента КМ, формы потери устойчивости и значения критических нагрузок приобретают установившийся характер. Полученная графическая информация позволяет оценить точность применяемых расчетных схем, связанную с выбором расчетной области, при проведении прочностных расчетов образцов из КМ с необходимой точностью.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Болотин В. В., Новичков Ю. Н.** Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. **Григоренко Я. М., Шевченко Ю. В., Василенко А. Т. и др.** Численные методы. Механика композитов: В 12-и т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.11. К.: «А.С.К.», 2002. 448 с.
3. **Гузь А. Н.** Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. К.: Вища школа, 1986. 512 с.
4. **Гузь А. Н.** Механика разрушения композитных материалов при сжатии. К.: Наук. думка, 1990. 632 с.
5. **Гузь А. Н.** Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х т. (Т.1. Разрушение в структуре материала. 592 с.; Т.2. Родственные механизмы разрушения. 736 с.). К.: «ЛИТЕРА», 2008.
6. **Biot M. A.** Mechanics of Incremental Deformation. New York: Wiley, 1965, 504p.
7. **Biot M. A.** Edge Buckling of Laminated Medium // Int. J. Solids Structures. 1968. Vol.4. No 1. P. 125–137.
8. **Guz A. N.** Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin: Springer-Verlag Heilberg, 1999. 555 p.
9. **Guz A. N., Kokhanenko Yu. V.** Numerical Solution of Three-Dimensional Stability Problems for Elastic Bodies // Int. Appl. Mech. 2001. Vol. 37. No 11. P. 1369–1399.
10. **Guz A. N.** Setting up a theory of stability of fibrous and laminated composites // Int. Appl. Mech. 2009. Vol. 45. No 6. P. 587–613.
11. **Dekret V. A., Zelenskii V. S., Bystrov V. M.** Numerical Analysis of Stability of a Laminated Composite with Compressed Reinforcement Plies // Int. Appl. Mech. 2014. Vol. 50. No 5. P. 549–557.
12. **Bystrov V. M., Dekret V. A., Zelenskii V. S.** Loss of Stability in a Composite Laminate Compressed by a Surface Load // Int. Appl. Mech. 2017. Vol. 53. No 2. P. 156–163.
13. **Novichkov Yu. N., Sinitsyn E. N.** Surface Buckling of a Layered Medium // Mechan. Polim. 1973. Vol. 9. No 4. P. 572–576.
14. **Pissanetzky S.** Sparse Matrix Technology. London: Academic Press, 1984. – 321p.

УДК 539.3

*В. М. Бистров, канд. фіз.-мат. наук, В. А. Декрет, д-р фіз.-мат. наук,  
В. С. Зеленський, канд. фіз.-мат. наук*

## ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ШАРУВАТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ СТИСКАННІ ПОВЕРХНЕВИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

З використанням основних співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості у рамках моделі кусково-однорідного середовища отримано числовий розв'язок задачі стійкості шаруватого композитного матеріалу при стискуванні



поверхневим навантаженням. Розглянутий випадок граничних умов на бічних сторонах багат шарового композитного зразка, які відповідають умовам симетрії. Досліджено залежність форм втрати стійкості і критичних навантажень від розміру розрахункової області, пов'язаного із кількістю шарів представницького елемента композитного матеріалу.

*Ключові слова:* шаруватий композитний матеріал, багат шаровий представницький елемент, поздовжнє стискання, поверхнєве навантаження, критичне навантаження, форма втрати стійкості, тривимірна лінеаризована теорія стійкості, зминання торців.

UDC 539.3

*V. M. Bystrov, PhD (Phys.-Math.), V. A. Dekret, Dr. Sci. (Phys.-Math.),  
V. S. Zelenskii, PhD (Phys.-Math.)*

### **NUMERICAL STUDY OF STABILITY OF LAYERED COMPOSITE MATERIAL COMPRESSED BY SURFACE LOAD**

A numerical solution of the problem of stability of a layered composite material under compressive surface loading is obtained basing on the main relationships of the three-dimensional linearized theory of stability within the framework of the model of piecewise-homogeneous medium. The case of boundary conditions on the lateral sides of a multilayer composite sample made of composite that correspond to symmetry conditions is considered. The dependence of the forms of stability loss and critical loads on the size of the design area associated with the number of layers included in the representative element of the composite material is investigated.

*Keywords:* layered composite material, multilayer representative element of the composite material, longitudinal compression, surface load, critical load, buckling mode, three-dimensional linearized theory of stability, crumpling of ends.

One of the possible failure mechanisms of fibrous and laminated composites under compression is microbuckling. This failure mechanism of a unidirectional composite longitudinally compressed by a surface load may be near-surface buckling near the loaded end of the composite specimen, with buckling modes decaying with distance from that end. Such a mechanism corresponds to end-crushing failure of composite specimens and structural members under compression [5]. In [4], the main results of the study of the indicated mechanism with brittle and plastic failure of composites based on the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies (TLTSDB) [3, 8] are presented in the framework of the continuous approach. For the case of brittle fracture within the framework of the piecewise-homogeneous medium model, such results are given in [9]. It is shown that for unidirectional composites (reinforcing fibers or layers are directed perpendicular to the end surface) at the initial stage of composite failure under compression by a surface load along the reinforcement direction, the only possible failure mechanism is the near-surface microbuckling.

In [11, 12], based on a TLTSDB, within the framework of the model of a piecewise-homogeneous medium, a design model was proposed for the numerical solution by the mesh-based method of the problem of stability of a layered composite under uniaxial compression of reinforcing layers by sur-

face load. As a representative element of the composite, a two-layer computational domain was used with boundary conditions on the sides of the computational region, which correspond to the symmetry conditions. Numerical methods such as the mesh-based method, which is used here, employ finite computational domains to analyze subcritical state and stability. The original infinite or semi-infinite domain occupied by a material is reduced to a finite domain based on the regularity and periodicity of composite structures and the symmetry of loading. In this case, the question arises about the influence of the number of layers included in the representative element of the composite on the critical stability parameters of the composite. In this work, we investigated the dependence of the buckling modes and critical loads on the size of the computational region along the line of application of the surface load when the number of layers of the multilayer representative element of the composite increases.

The article deals with the problem of stability of a layered two-component composite material of a regular structure for a loading scheme that corresponds to uniaxial compression of reinforcing layers by a surface load of constant intensity. Such loading scheme in the general case leads to a heterogeneous subcritical state. Based on the assumption that the matrix and reinforcement are quite stiff, the second variant of the theory of small subcritical deformations [7, 8] is used in the study of stability. The subcritical state can be determined by solving the problem of linear elasticity for piecewise-homogeneous bodies. The surface load is considered «dead», which ensures that enough conditions for the applicability of the static method are met [10]. When using this method, the stability problem is reduced to a generalized eigenvalue problem, in which the minimum eigenvalue determines the critical load, and the corresponding eigenfunction describes the buckling mode.

In this paper, for the numerical solution of these problems is used the mesh-based method based on modified variational-difference approach [2, 9]. The discrete problems are solved using effective numerical methods [14] and the following procedure outlined in [2]. The algebraic problem is solved with the direct Cholesky method. After the refinement of the difference mesh, the conjugate-gradient method is used. The solution found with the Cholesky method is interpolated and used as an initial approximation for solving the discrete eigenvalue problem by the subspace iteration method.

From the obtained results, it follows that with an increase in the number of layers in a representative element of the composite and a corresponding increase in the size of the computational domain, the buckling modes and values of critical loads become closer together. The obtained graphic information allows us to estimate the accuracy of the applied computational schemes associated with the choice of the computational domain, when performing strength calculations of composite specimens with the required accuracy.

## REFERENCES

1. **Bolotin V. V., Novichkov Yu.N.** Mechanics of Multilayer Structures. Moscow: Mashinostroyeniye, 1980. 375 p. (in Russian).

2. **Grygorenko Ya. M., Grygorenko Ya. M., Shevchenko Yu. N., Vasilenko A. T. et al.** Computational methods. Mechanics of composites: In 12 volumes / Editor-in-Chief A.N. Guz. Vol.11. – Kiv: «A.S.K.», 2002. 448 p. (in Russian).
3. **Guz A. N.** Fundamentals of three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Kiv: Vysha Shkola, 1986. 512 p. (in Russian).
4. **Guz A. N.** Mechanics of fracture of composite materials under compression. Kyiv: Naukova Dumka, 1990. 632 p. (in Russian).
5. **Guz A. N.** Fundamentals of the compressive fracture mechanics of composites. Edition in 2 volumes (Vol. 1. Fracture in structure of materials. Vol. 2. Related mechanisms of fracture.). Kyiv: LITERA, 2008. (in Russian)
6. **Biot M. A.** Mechanics of Incremental Deformation. New York: Wiley, 1965, 504p.
7. **Biot M. A.** Edge Buckling of Laminated Medium // Int. J. Solids Structures. 1968. Vol.4. No 1. P. 125–137.
8. **Guz A. N.** Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin: Springer-Verlag Heilberg, 1999. 555 p.
9. **Guz A. N., Kokhanenko Yu. V.** Numerical Solution of Three-Dimensional Stability Problems for Elastic Bodies // Int. Appl. Mech. 2001. Vol. 37. No 11. P. 1369–1399.
10. **Guz A. N.** Setting up a theory of stability of fibrous and laminated composites // Int. Appl. Mech. 2009. Vol. 45. No 6. P. 587–613.
11. **Dekret V. A., Zelenskii V. S., Bystrov V. M.** Numerical Analysis of Stability of a Laminated Composite with Compressed Reinforcement Plies // Int. Appl. Mech. 2014. Vol. 50. No 5. P. 549–557.
12. **Bystrov V. M., Dekret V. A., Zelenskii V. S.** Loss of Stability in a Composite Laminate Compressed by a Surface Load // Int. Appl. Mech. 2017. Vol. 53. No 2. P. 156–163.
13. **Novichkov Yu. N., Sinitsyn E. N.** Surface Buckling of a Layered Medium // Mechan. Polim. 1973. Vol. 9. No 4. P. 572–576.
14. **Pissanetzky S.** Sparse Matrix Technology. London: Academic Press, 1984. – 321p.

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України,  
Київ, Україна*

*Надійшла до редколегії 13.09.2018*