*ISSN 2079–1836*
*2011, вип. 16*

УДК 539.3

*О. Г. Василенко, А. П. Дзюба, д-р техн. наук*

# АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН ЗА ОЦІНКОЮ КІНЦЕВОГО СТАНУ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ АГРЕСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА

**Розглянуте застосування методу оптимального проектування за оцінкою кінцевого стану конструкції, що знаходиться в умовах впливу агресивного середовища, на прикладі розв'язування задачі оптимального проектування тонких кільцевих пластинок. Результати розв'язування задачі ілюструють змінні у часі розподіли матеріалу по радіусу пластинок, величини відносних напружень та прогинів у кінцевий момент втрати несучої здатності пластинок.**

***Ключові слова**: кільцеві пластинки, алгоритм оптимального проектування, корозійне ураження.*

**Вступ.** Проблема оптимального проектування конструкцій, що працюють в умовах спільної дії екстремальних силових навантажень і агресивного середовища, є вельми актуальною, оскільки подібні умови експлуатації конструкцій мають місце у всіх галузях машинобудування, хімічній і нафтопереробній промисловості, металургії і будівництві.

Аналіз наведеного в [1 – 3, 5, 7, 8, 10] огляду значної кількості публікацій, присвячених дослідженням у напрямку оптимального проектування конструкцій з урахуванням агресивного середовища, показав, що прикладні аспекти цієї проблеми все ще недостатньо досліджені. Причиною такого стану проблеми є те, що оптимізація параметрів реальної конструкції вимагає виконання цілого ряду залежних від часу умов, порушення хоча б однієї з яких в заданий період експлуатації веде до порушення функціонування конструкції. Слід зазначити при цьому, що параметри обмежень у формі нерівностей входять до диференціальних рівнянь моделі корозійного зносу, права частина якої, крім цього, залежить від змінних в часі відшукуваних варійованих параметрів (геометричних розмірів поперечних перерізів елементів конструкції).

Відомо, що в конструкції одночасно існують два взаємопов'язаних процеси: деформування і корозійної деградації. Тому, з метою перевірки обмежень, виявляється необхідним здійснювати перерахунок варійованих змінних і компонент напружено-деформованого стану (НДС) конструкції, одночасно виконуючи перевірку задоволення заданих умов її безпечної експлуатації на кожному кроці оптимізаційного ітераційного алгоритму (рис. 1). А для статично невизначених систем, в яких внутрішні силові фактори є функціями змінної (для розглядуваного випадку) в часі жорсткості, до згаданого алгоритму додається ще ітераційний цикл визначення таких зусиль.

© О. Г. Василенко, А. П. Дзюба, 2011

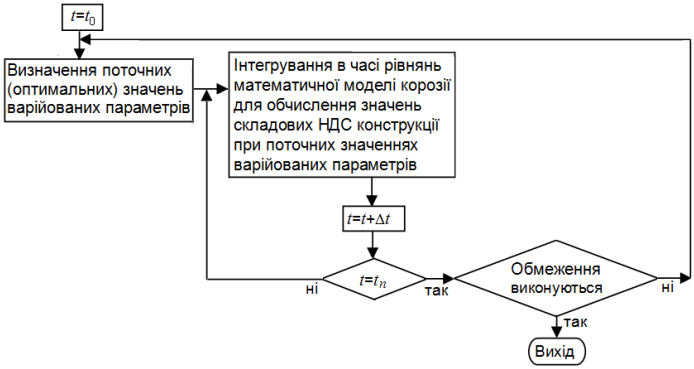



Рис. 1 – **Схема традиційного підходу до розв'язування задачі долговічності**

Очевидно, що такий значний обсяг обчислень приводить як до накопичення обчислювальної похибки, так і до істотної трудомісткості і громіздкості розв'язування задачі в цілому. При цьому очевидно, що ускладнення розрахункової схеми, як і збільшення кількості обмежень на значення елементів системи, значно ускладнюють побудову надійного алгоритму чисельної реалізації.

В статті [5] було запропоновано підхід, застосування якого до вирішення задач оптимізації конструкцій з урахуванням впливу на них агресивного середовища та силових навантажень дозволяє скоротити значну кількість необхідних обчислень при збереженні достатньої точності розрахунків. Оригінальність підходу полягає в тому, що умови довговічності враховуються шляхом всього одного зворотного інтегрування рівнянь математичної моделі корозії. При цьому, на відміну від традиційного підходу зникає необхідність багаторазової перевірки виконання обмежень на кожному кроці алгоритму.

Сутність згаданого вище підходу (рис. 2) полягає у знаходженні деякого раціонального щодо будь-якого критерію (наприклад, мінімальної ваги матеріалу) проекту в заданий кінцевий момент $t_n$ вичерпання несучої здатності конструкції і в подальшому нарощуванні деякого «жертовного» шару матеріалу на поверхні елементів конструкції від цього кінцевого моменту $t_n$ до початкового $t_0$ відповідно до рівняння прийнятої математичної моделі корозії.

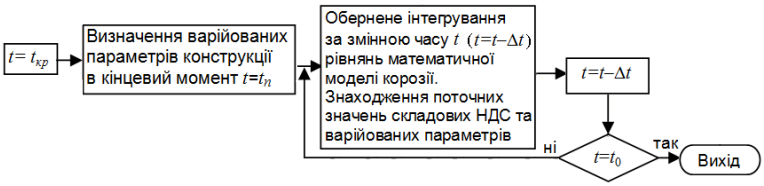



Рис. 2 – **Схема запропонованого підходу**

**Постановка задачі.** Розглянемо застосування алгоритму оптимального проектування за оцінкою кінцевого стану конструкції з урахуванням впливу на поверхню її матеріалу корозійного ураження для тонких кільцевих пластин, які є складовою частиною використовуваних у промисловості виробничих

механізмів, резервуарів та інших конструкцій, що зазвичай зазнають впливу агресивних робочих середовищ. Нехай від оптимального в початковий момент часу $t_0$ проекту пластинки вимагається виконання в кінцевий момент часу $t_n$ таких розповсюджених на практиці обмежень як: вимоги міцності, жорсткості, конструктивні обмеження та вимоги довговічності.

Постановка задачі [6] вагової оптимізації кільцевої пластинки з урахуванням вказаних вимог приймалася наступною:

$$V = \min_{h}\{2\pi\rho\int_{r_1}^{r_2} rh(r,t_0)dr\}; \quad (1)$$

$$\sigma_1 = \frac{6M_1(r,t_n)}{h^2} \le [\sigma_1];\ \sigma_2 = \frac{6}{h^2}(\nu M_1(r,t_n) + D(1-\mu^2)) \le [\sigma_2]; \quad (2)$$

$$w(r,t_n) \le [w(r,t_n)]; \quad (3)$$

$$h(r,t_n) \ge h_{\min};\ \ h(r,t_n) \le h_{\max}; \quad (4)$$

$$t_0 \le t \le t_n, \quad (5)$$

де товщина пластинки $h(r,\ t_0)$ приймається за керування та обирається з умови мінімуму об'єму матеріалу (1) в початковий момент часу $t_0$; (2) – (5) – обмеження, відповідно, на максимальні нормальні напруження, обмеження за прогином пластинки, конструктивні обмеження в кінцевий момент часу $t_n$ та вимоги довговічності. Характеристики напружено-деформованого стану $w,\ \theta,\ M_1,\ Q$ складають вектор фазових змінних $\bar{u} = \bar{u}(w,\theta,M_1,Q)$; $r_i,\ r_1,\ r_2$ – положення розглядуваної точки, внутрішній та зовнішній радіуси пластинки, відповідно; $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$ – припустимі значення напружень; $h_{\min}$, $h_{\max}$ – деякі сталі, що визначають мінімальне та максимальне припустимі значення товщини пластинки; $[w(r,\ t)]$ – у загальному випадку задана функція, яка визначає прогин; $\rho$ – питома вага матеріалу.

Моделювання впливу агресивного середовища на матеріал пластинок проводиться за допомогою відомих математичних моделей корозійної деградації: В. М. Долинського та Е. М. Гутмана [2, 8 – 10]:

$$d\delta/dt = \varphi(t)\cdot(1+k\sigma); \quad (6)$$

$$d\delta/dt = v(t)\cdot e^{\gamma\cdot\sigma}, \quad (7)$$

де $k,\ \gamma$ – коефіцієнти, що відображають вплив напружень на швидкість корозії, а $\varphi(t)$, $v(t)$ – у загальному випадку, функції, що показують ступінь впливу агресивного середовища на швидкість корозійної деградації матеріалу конструкції та приймаються у вигляді

$$\varphi(t) = \left(a + b\cdot e^{(\beta t-1)}\right)/e^{\beta t};$$

$$v(t) = \alpha e^{\eta t},$$

де $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$, $\eta$ – чисельні коефіцієнти моделей, значення яких визначають в результаті експериментів.

При проведенні досліджень вважалося, що $\varphi(t)=V_0=const$.

Алгоритм визначення НДС описаний у [6]. Відшукання компонент НДС пластинки, яка знаходиться в умовах згину під дією вісесиметричного навантаження, приводиться до розв'язування крайової задачі для системи диференційних рівнянь зі змінними коефіцієнтами [6], розв'язок якої здійснюється чисельними методами, зокрема, методом матричної прогонки, суть якого також викладена в [6].

**Чисельні дослідження**. Дослідження проводилися для тонких рівномірно навантажених розподіленим навантаженням кільцевих пластинок (рис. 3).

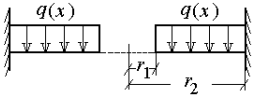



Рис. 3 – **Граничні умови:** $M_1(r_1)=0$, $Q(r_1)=0$; $w(r_2)=0$, $\theta(r_2)=0$

У рамках статті проаналізовано вплив закону розподілу матеріалу уздовж радіусу (в початковий момент часу $t=t_0$) пластинок. Розглянуті наступні види проектів тонких кільцевих пластинок, позначені далі через $a$, $b$, $c$, $d$:

– $a$ – проекти з однаковою для всіх $r_i \in [r_1, r_2]$ товщиною $h^{(a)}=const$;

– $b$ – проекти, розподіл матеріалу у яких змінюється (лінійно зростає) вздовж радіусу $r_i$ за законом

$$h^{(b)} = \frac{(hmin^{(b)} - hmax^{(b)})}{(r_1 - r_2)} \cdot r_i + \frac{(r_2 \cdot hmin^{(b)} - r_1 \cdot hmax^{(b)})}{(r_2 - r_1)}; \qquad (8)$$

– $c$ – проекти, товщина яких лінійно зменшується вздовж $r_i$ згідно з формулою

$$h^{(c)} = \frac{(hmax^{(c)} - hmin^{(c)})}{(r_1 - r_2)} \cdot r_i + \frac{(r_2 \cdot hmax^{(c)} - r_1 \cdot hmin^{(c)})}{(r_2 - r_1)}; \qquad (9)$$

– $d$ – оптимальні проекти, отримані при розв'язуванні задачі (1) – (5).

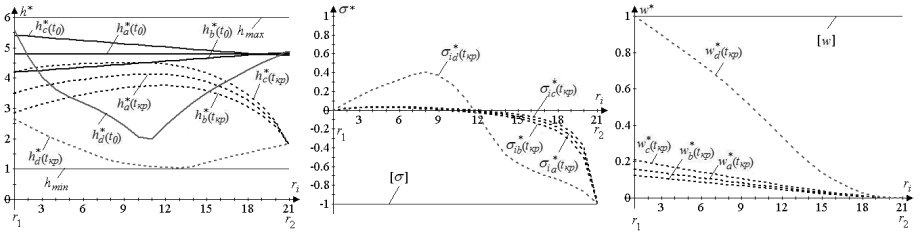
Зазначимо, що варійовані товщини пластинок $a$ – $c$ підбиралися таким чином, щоб їхня довговічність з $d$ була однаковою, тобто вимагалося виконання вимог (2) – (4) до кінцевого моменту часу (5) включно. При цьому, у момент $t=t_n$ одна (або декілька) з вимог (2) – (4) досягають свого граничного значення.

Знаходження параметрів проекту $d$ здійснювалось із застосовуванням методу визначення оптимальних параметрів за кінцевим станом [5] конструкції з урахуванням корозії.

В (9), (10) $hmin^{(b)}$, $hmin^{(c)}$ та $hmax^{(b)}$, $hmax^{(c)}$ – відповідно мінімальні та максимальні товщини проектів пластинок $b$, $c$, значення яких знаходиться у межах встановлених для проектів конструктивних обмежень $h_{\min}$, $h_{\max}$. Для всіх проектів приймалось співвідношення зовнішнього та внутрішнього радіусів $r_1/r_2=1/3$.

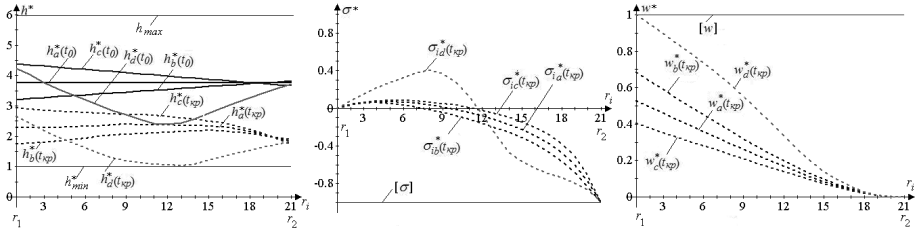
Результати розв'язування задач проектування зазначених кільцевих пластин з урахуванням корозії були отримані для наступного набору вхідних даних [6]: $t_n$=1 *рік*; $dt$=0,1 *рік*; $[\sigma_1]=[\sigma_2]=1{,}274\cdot10^8$ *Н/м*$^2$; $[w(r)]$=0,0019 *м*; $h_1$=0,003 *м*; $h_2$=0,018 *м*; $q=69{,}6\cdot10^3$ *Н/м*$^2$; $\rho=82{,}38\cdot10^3$ *Н/м*$^3$; $E=2{,}1\cdot10^{11}$ *Н/м*$^2$; $\nu$=0,33; $\delta$=0,01 *м*; $r_1$=0,1 *м*; $r_2$=0,3 *м*. З метою проведення відповідних порівнянь, коефіцієнти моделей (6), (7), а отже і властивості зовнішнього агресивного середовища, призначалися з рахуванням умов мінімальної розбіжності між проектами $d$, отриманих з використанням цих моделей, в початковий момент часу $t=t_0$ та приймалися наступними: $V_0$=0,00001 *м/рік*, $k$=0,00003 *МПа*$^{-1}$, $\alpha$=0,0036 *м/рік*; $\eta$=0,091 *рік*$^{-1}$; $\gamma=0{,}1176\cdot10^{-7}$ *МПа*$^{-1}$.

На рис. 4 – 5 показані, відповідно, зміна у часі розподілу відносних величин товщини (рис. 4, 5, *a*) вздовж радіусів проектів $a$ – $d$, напружень $\sigma_1$ на поверхні при $z=h/2$ (рис. 4, 5, *b*) та прогинів (рис. 4, 5, *c*) від $r_1$ до $r_2$ у кінцевий момент часу $t=t_n$. Введені наступні позначення: $h^*=h(r_i)/h_{\min}$ та $h_a^*$, $h_b^*$, $h_c^*$, $h_d^*$ – відносні величини висот відповідних проектів в початковий $t_0$ та кінцевий $t_n$ моменти часу; $\sigma^*=\sigma_{1(t=tкр)}/[\sigma]$ (де $[\sigma]=([\sigma_1]+[\sigma_2])/2$); $w^*=w_{max}/[w]$ – відносний прогин серединної площини. Уздовж осі абсцис на рис. 4, 5 відображені радіуси $r_i$ пластинок від $r=r_1$ до $r=r_2$ з кроком $\delta$=0,01 *м*.




*a*) *b*) *c*)

Рис. 4 – **Параметри проектів** $a, b, c, d$ **в початковий** $t_0$ **(неперервні лінії) та кінцевий** $t_n$ **(пунктирні лінії) моменти часу відповідно моделі В. М. Долинського**




*a*) *b*) *c*)

Рис. 5 – **Параметри проектів** $a, b, c, d$ **в початковий** $t_0$ **(неперервні лінії) та кінцевий** $t_n$ **(пунктирні лінії) моменти часу відповідно моделі Е. М. Гутмана**

Проведені дослідження підтвердили доцільність використання раціональних проектів пластинок у порівнянні з пластинками постійної та лінійно-змінної товщини (8), (9). Так, економія матеріалу на виготовлення оптимального

в початковий момент $t_0$ проекту $d$ (рис. 4, 5, *а*) при однаковій довговічності, характеристиках матеріалу та навантаженні, сягає для проектів $a$, $b$, $c$ 44%, 36% і 53% при моделюванні процесу корозійної деградації за залежністю (6) та 27%, 19%, 53% – при моделюванні за (7). Очевидно, що проекти постійної та лінійно-змінної товщини в початковий момент $t=t_0$ мають досить значний зайвий «жертовний» шар матеріалу, тому його частина (57% – 80%) після закінчення призначеного терміну функціонування виявляється «не використаною» на корозійне зношування. Слід зазначити, що в після корозійної деградації оптимального проекту лишається у 1,2 – 2 рази менше такого «жертовного» матеріалу. При цьому, оптимальні проекти $d$ досягають граничного стану одночасно за вимогами міцності (2) (рис. 4, 5, *b*), жорсткості (3) (рис. 4, 5, *c*), і за конструктивними обмеженнями (4) (рис. 4, 5, *а*).

Звертає увагу, що проект $b$, товщина якого відповідає лінійно-зростаючому (8) розподілу матеріалу по радіусу, виявляється у розглянутому випадку більш ефективним, ніж проекти $a$, $c$. Так, загальний об'єм матеріалу таких проектів в початковий момент $t_0$ часу за результатами, отриманими при використанні моделі В. М. Долинського (6) на 5%, 11%, а при використанні моделі Е. М. Гутмана (7) – на 7%, 14% менший за об'єми проектів $a$, $c$. В кінцевий же момент $t_n$ в цих проектах лишається від 9% до 27% менше «не витраченого» на корозію (а отже, зайвого) матеріалу, ніж після закінчення призначеного терміну експлуатації проектів $a$, $c$ пластин.

До переваг використання методу оптимального проектування за оцінкою кінцевого стану конструкції слід віднести також, що кількість ітерацій, витрачених на пошук оптимальних величин набору варійованих змінних при застосуванні цього методу виявляється в $m$ раз меншою, ніж при використанні традиційного підходу, де $m$ ─ кількість ітерацій застосовуваного оптимізаційного методу.

**Висновки.** Отримані оптимальні проекти та проведено порівняльний аналіз матеріаломісткості проектів тонких пластин, розподіл матеріалу вздовж радіусу яких задавався у початковий момент різними закономірностями. Продемонстровано переваги застосування методу оптимального проектування за кінцевим станом конструкції в умовах корозії над способом безпосереднього підвищенням довгочасної надійності конструкції шляхом введення «жертовного» шару матеріалу.

Отримані результати можуть бути корисними для вирішення проблеми оптимального проектування конструкцій в умовах корозії, зважаючи на те, що огляд доступного обсягу публікацій за проблематикою розв'язування таких задач оптимізації є досить проблематичним через суттєві обчислювальні складнощі.

## БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Василенко О. Г.*** Оптимізація елементів фермових конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища// Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д.: Наука і освіта, 2008. − Вип. 12. – С. 20 – 33.

2. ***Гутман Э. М.*** Прочность газопромысловых труб в условиях коррозионного износа / [Э. М. Гутман, Р. С. Зайнулин, А. Т. Шаталов и др.]. – М.: Недра, 1984. – 80 с.

3. ***Гутман Э. М.*** Механохимия металлов и защита от коррозии, изд-во 2 / Э. М. Гутман. – М.: Металлургия, 1981. – 270 с.

4. ***Дзюба А. П.*** Алгоритм зміни конфігурації поперечного перерізу стрижневого елемента при складному згині в умовах корозійного зношування / А.П. Дзюба, О.О. Кузьміна // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – Д.: ДНУ, 2000. − Вип. 3. – Т. 2. – С. 20 – 29.

5. ***Дзюба А. П.*** Про один підхід до розв'язання задач оптимізації елементів конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища / А. П. Дзюба, О. Г. Василенко, О. А. Дзюба // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Д.: Наука і освіта, 2007. − Вип. 8. – С. 55 – 67.

6. ***Дзюба А. П.*** Оптимизация формы круглых пластин и оболочек вращения / А. П. Дзюба, Л. Д. Левитина. – Д.: ДГУ, 1985. – 124 с.

7. ***Зеленцов Д. Г.*** Обзор исследований по применению методов нелинейного математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / Д. Г. Зеленцов, Г. В. Филатов // Вопросы химии и химической технологии. – 2002. – №4. – С. 108 – 115.

8. ***Овчинников И. Г.*** Расчет и оптимальное проектирование конструкций, подверженных коррозионному износу / И. Г. Овчинников, Ю. М. Почтман. – Д.: ДНУ, 1994. – 112 с.

9. ***Петров В. В.*** Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / В. В. Петров, И. Г. Овчинников, Ю. М. Шихов. – Саратов: изд-во Сарат. ун-та, 1987. – 285 с.

10. ***Почтман Ю. М.*** Методы расчета надежности и оптимального проектирования конструкций, функционирующих в экстремальных условиях / Ю. М. Почтман, М. М. Фридман. – Д.: Наука и образование, 1997. – 134 с.

*Дніпропетровський національний університет*
*ім. Олеся Гончара,*
*Дніпропетровськ, Україна*

*Надійшла до редколегії 20.03.2011*

*Е. Г. Василенко, А. П. Дзюба, д-р техн. наук*

## АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПО ОЦЕНКЕ КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ

**Рассмотрено применение метода оптимального проектирования по оценке конечного состояния конструкции, находящейся в условиях влияния агрессивной среды, на примере решения задачи оптимального проектирования тонких кольцевых пластинок. Результаты решения задач показывают переменные во времени распределения материала по радиусу пластинок, величины относительных напряжений и прогибов в конечный момент потери несущей способности пластинок.**

***Ключевые слова:*** *кольцевые пластинки, алгоритм оптимального проектирования, коррозионная деградация.*

*O. G. Vasylenko, A. P. Dzjuba, Professor*

## THE ALGORITHM OF OPTIMUM DESIGNING OF CIRCULAR PLATES BY ESTIMATION THEIR EVENTUAL STATE TAKING INTO ACCOUNT INFLUENCE OF CORROSIVE ENVIRONMENT

**There is considered application of method of the optimum designing based on evaluation of the eventual state of construction work-time taking into account influence on its material of corrosive environment on the example of solving of task of the optimum designing of thin circular plates. The results of solving the tasks illustrated time-history distributing of material along a radius, relative stresses and bendings, in eventual moment of longevity of the plates.**

***Keywords:*** *circular plates, the algorythm of optimum designing, corrosion wear.*