ISSN 2079–1836
2011, вип. 16

УДК 519.8

В. Я. Кутковецький, д-р техн. наук, М. В. Турти, канд. техн. наук

БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З УПОРЯДКОВАНИМ РОЗМІЩЕННЯМ ТОЧОК НА ПОВЕРХНІ РОЗВ'ЯЗКІВ

Допоміжні контрольні прямі лінії перетинають поверхню рішень в упорядковано розміщених на ній точках і дають можливість для різних змінних однієї задачі отримати оптимальний ітераційно-точний, дискретний та цілочисловий розв'язок багатокритеріальних нелінійних чи лінійних задач математичного програмування з обмеженнями або при прямому пошуку оптимуму.

***Ключові слова*:** *багатокритеріальні задачі, оптимізація, нелінійне програмування*.

Вступ. Актуальність подальшого розвитку методів аналізу задач нелінійного програмування пояснюється їх широким застосуванням на практиці при наявності деяких проблем моделювання реальних процесів.

Наприклад, для розв'язку задачі нелінійного програмування, що складається з однієї функції мети та кількох обмежень, застосовується метод множників Лагранжа або фундаментальні умови Куна – Таккера [1, 4], які мають такі недоліки: відсутність багатокритеріальності; неможливість в одній задачі для різних змінних отримати точний, цілочисловий та дискретний розв'язок; використання частинних похідних від функції мети та обмежень – нерівностей; розгляд порівняно простої функцій мети.

Недоліками чисельних методів нелінійної оптимізації (градієнтних, прямих, апроксимуючого програмування, можливих напрямків тощо [1, 4]) є відсутність умов дискретного та ітераційно точного визначення змінних; необхідність уточнення координат точки, розміщеної на поверхні ділянки існування рішень та застосування, як правило, однієї функції мети.

В статті узагальнюється напрямок оптимізації [2, 3, 5, 6], який позбавлений вказаних недоліків і має наступні особливості:

1. Перетином контрольних прямих ліній з поверхнею рішень (ПР) отримують координати упорядкованих контрольних точок на ПР, по яких розраховують довільну кількість функцій мети довільної складності $F_e(X)$, $e=\overline{1,E}$ і переміщуються в точку багатокритеріального оптимуму.

2. Обсяг обчислень зменшують: застосуванням великих початкових кроків розрахунків; зменшенням розмірності вектора змінних (бо обмеження – нерівності не переводяться у рівняння і тому не вводяться додаткові змінні); переведенням обмежень – нерівностей у функції однієї змінної.

3. Виникає можливість розв'язання деякого класу неопуклих задач.

4. Напрямок досліджень [2, 3, 5, 6] дозволяє застосовувати існуючі методи оптимізації задач математичного програмування [4].

© В. Я. Кутковецький, М. В. Турти, 2011

Нелінійна задача вміщує критерій $F = \sum_{e=1}^{E} [k_e f_e(X)] \to \min$ та обмеження $g_i(X) \le 0,$ де $f_e(X)$ = $[F_e(X) - F_e^{\min}]$ / $(F_e^{\max} - F_e^{\min}) = 0...1$ – нормалізована функція мети $F_e(X)$; $F_e^{\max}$, $F_e^{\min}$ – максимальне та мінімальне значення функції мети $F_e(X)$ (уточнюються у процесі розрахунків); $e = 1,2,...,E$; $j = 1,2,...,n$, $i = 1,2,...,m$ – порядкові номери функцій мети $F_e(X)$, змінних $x_j \ge 0$ та обмежень $g_i(X) \le 0$; $X = \{x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_n\}$ – вектор змінних; $k_e = k_{Be} k_{Xe}(X) = 0...1$ – визначений експертом коефіцієнт впливу; $k_{Be} = 0...1$ – ваговий коефіцієнт функції мети $F_e(X)$; $k_{Xe}(X)$ - коефіцієнт функціональної залежності мети $F_e(X)$ у залежності від вектора X.

Ітераційний дискретний метод оптимізації. Метод [2, 3] полягає у завданні на ПР дискретних $(n-1)$ значень змінних x_j^C, $j = \overline{1,n}$ і визначенні на основі цих даних з обмежень – нерівностей (які розглядаються на ПР як рівності $g_i(X^{CK}) = 0$) однієї найменшої недискретної координати x_K^T, $k \ne j$. По отриманих координатах точки на ПР $X^{CK} = \{x_1^C, ..., x_{n-1}^C, x_K^T\}$ розраховують функції мети $F_e(X^{CK})$.

Розглянемо приклад розв'язання задачі нелінійного програмування:

$$F_1(X) = 2x_1(x_1 - 1,5) + x_2(x_2 - 6) \to \min; \quad (1)$$

$$4x_1^2 + x_2^2 \le 36; \quad (2)$$

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0, \quad (3)$$

де діапазони $x_1 = 0..3$; $x_2 = 0...6$ визначаються з обмежень (2) та (3).

В моделі (1) – (3) при $\sum_{j=1; j \ne k}^{n} \frac{x_j^C}{x_j^{\max}} \le 1$ значення x_1^T розраховуємо ітераційно точно, де $x_j^{\max}$ – максимальне значення змінної x_j, яке визначається по обмеженням – нерівностям. Тут x_2^C задаються як дискретні чи цілочислові величини (в даному випадку дискретність $\Delta x_2^C = 0,75$).

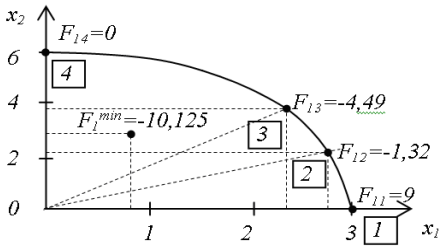


Рис. 1 – **Ітераційний дискретний метод оптимізації**

На рис. 1 показане обмеження (2) з розміщенням на ПР контрольних чорних точок k = 1, 2, 3, 4 та значеннями функції мети $F_{1k}(x_{1k}^T, x_{2k}^C)$. В середині ділянки існування рішень помічене положення глобального мінімуму функції мети (1) $F_1^{\min} = -10,125$, $x_1^{\min} = 0,75$, $x_2^{\min} = 3,0$.

Дані розрахунків зведені у табл. 1.

Таблиця 1 – **Ітераційний дискретний метод розв'язання задачі** (1) – (3)

Крок e_1	Позначення	Координати точок та функції мети				Відрізок
		k=1	k=2	k=3	k=4	
1	x_{2k}^C	0	2,25	3,75	6	x_2^C =0…6
	x_{1k}^T	3	2,78	2,34	0	
	$F_{1k}(x_{1k}^T, x_{2k}^C)$	9	-1,32	-4,49	0	
2	x_{2k}^C	2,25	3,75	4,5	6	x_2^C =2,25…6
	x_{1k}^T	2,78	2,34	1,98	0	
	$F_{1k}(x_{1k}^T, x_{2k}^C)$	-1,32	-4,49	-4,85	0	
3	x_{2k}^C	3,75	4,5*	5,25	6	x_2^C =3,75…6
	x_{1k}^T	2,34	1,98*	1,45	0	
	$F_{1k}(x_{1k}^T, x_{2k}^C)$	-4,49	-4,85*	-4,08	0	

Крок e_1 = 1. Початковий відрізок x_2^C =0…6 розділяємо на три частини значеннями координати $x_{2k}^C = \{0; 2,25; 3,75; 6\}$ з дискретністю $\Delta x_2^C = 0,75$. Для значень x_{2k}^C з нерівності (2) отримуємо недискретні ітераційно точні значення x_{1k}^T. Якщо маємо кілька нерівностей – обмежень $i = \overline{1,m}$, то для

кожної з них розраховуємо x_{1ki}^T і серед них обираємо найменшу величину x_{1k}^T. По координатах $\{x_{1k}^T, x_{2k}^C\}$, $k = \overline{1,4}$ на ПР розраховуємо функцію мети згідно формули (1). З отриманих функцій мети F_{1k} видно, що їх мінімум знаходиться на відрізку x_2^C =2,25…6.

Крок e_1 = 2. Ділимо відрізок x_2^C =2,25…6 на три частини з урахуванням дискретності $x_{2k}^C = \{2,25; 3,75; 4,5; 6\}$ і по значеннях функції мети F_{1k} знаходимо новий відрізок x_2^C =3,75..6.

Крок e_1 = 3. Відрізок x_2^C =3,75…6 розділяємо на три частини $x_{2k}^C = \{3,75; 4,5; 5,25; 6\}$, які далі не можна змінювати через задану дискретність $\Delta x_2^C = 0,75$. Це означає завершення розрахунків. Для ПР задачі (1) – (3) отримано локальний мінімум функції мети (для ПР він є глобальним мінімумом): x_{1k}^T = 1,98; x_2^C = 4,5; F_1 = – 4,85.

Прямий ітераційний дискретний метод. Розглянемо прямий ітераційний дискретний метод на основі [3] стосовно функції мети (1) на універсумах U_{x1} = 0…4, U_{x2} = 0…8, кожний з яких розділяємо на три частини (тут обсяг поверхні рішень ПР визначають універсуми). При цьому значення x_1^T будемо розраховувати ітераційно точно, а x_2^C – із заданою дискретністю $\Delta x_2^C = 0,75$. Тоді універсум U_{x1} = 0…4 можна ітераційно точно розділити чотирма точками на три частини згідно, наприклад, методу «золотого перетину» x_1^T = (0; 1,528; 2,472; 4), а універсум U_{x2} = 0…8 розділяємо на три частини з урахуванням заданої дискретності x_2^C = (0; 3; 4,5; 7,5).

Дані розрахунків наведені у табл. 2 для кроків e_2=1 та e_2=6, для кожної координати x_1^T при заданих x_2^C розраховуємо значення функції мети (1).

На першому кроці e_2 = 1 після розрахунку для усіх координат значень функції мети $F_{1k}(x_{1k}^T, x_{2k}^C)$ виділяються відрізки x_1^T = 0…2,472; x_2^C = 0…4,5, в середині яких знаходиться оптимум функції мети.

На наступних кроках e_2 = 2..6 виконуються аналогічні розрахунки, і на останньому кроці e_2 = 6 отримуємо значення глобального мінімуму F_1 = – 10,12; x_1^T = 0,72; x_2^C = 3.

Таблиця 2 – **Прямий ітераційний дискретний метод** [3]

e_2=1					e_2=6				
x_1^T	0	1,528	2,472	4	x_1^T	0,584	0,72*	0,808	0,944
$F_1(x_1^T;0)$	0	0,08	4,80	20,0	$F_1(x_1^T;2,25)$	–9,19	–9,56	–9,56	–8,36
$F_1(x_1^T;3)$	–9	–8,92	–4,19	11,0	$F_1(x_1^T;3^*)$	–10,1	–10,12*	–10,12	–8,92
$F_1(x_1^T;4,5)$	–6,75	–6,67	–1,94	13,2	$F_1(x_1^T;3,75)$	–9,52	–9,56	–9,56	–9,49
$F_1(x_1^T;7,5)$	11,2	11,3	16,0	31,2	$F_1(x_1^T;4,5)$	–7,83	–7,87	–7,87	–6,67

Метод прямого пошуку на основі апроксимації. Цю ж задачу можна розв'язати інакше: отримати аналітичний вираз «невідомої» функції мети і по ньому визначити координати оптимуму. Наприклад, по даних табл. 2, для кроку e_2=1 можна скласти таблицю спостережень зі змінними $X = \{x_0 = 1; x_1; x_2; x_3 = x_1^2; x_4 = x_2^2\}$ та виходом у вигляді вектора функції мети F_P. Значення постійних коефіцієнтів функції мети були розраховані в середовищі *MathCAD* по формулі $A = (X^T X)^{-1} X^T F_P$, що визначило функцію мети у вигляді

$$F_P = -6,868 \cdot 10^{-4} - 3,002 x_1 - 5,999 x_2 + 2x_1^2 + x_2^2 . \qquad (4)$$

Вираз (4) майже співпадає з формулою функції мети (1) $F = -3x_1 - 6x_2 + 2x_1^2 + x_2^2$. Якщо взяти частинні похідні від виразу (4) і прирівняти їх нулю, то отримаємо глобальний оптимум функції мети $F^g = -10,1$; $x_1^g = 0,75$; $x_2^g = 2,999$.

Ітераційний метод оптимізації. Цей метод [6] застосовує одну гіперплощину для упорядкування точок на ПР замість використання згідно методу [5] n взаємно перпендикулярних гіперплощин для n змінних.

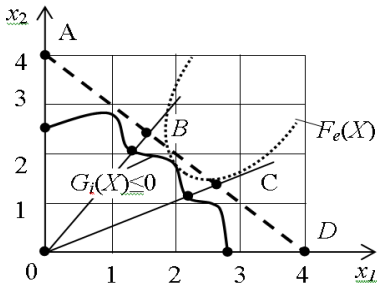


Рис. 2 – **Упорядкування точок на ПР**

При цьому вважаємо, що всі змінні розраховуються ітераційно точно. Для цього прямі лінії контролю 0A, 0B, 0C, 0D (рис. 2) слід проводити через початок координат $X^0 = \left\{x_1^0 = 0,\ldots,x_n^0 = 0\right\}$ та через упорядковані точки $X^U = \left\{x_1^U,\ldots,x_n^U\right\}$, де значення x_j^U змінюються в діапазоні $[0\ldots N]$ при застосуванні для координат кожної точки гіперплощини правила

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^U = N, \qquad (5)$$

де N – задане дослідником довільне ціле число. Чим більше N, тим ітераційно точніше розв'язується задача. Значення N можна змінювати в процесі розв'язування задачі.

Вираз (5) є рівнянням гіперплощини контролю з упорядкованими на ній точками, яка перетинає осі x_j у точках $x_j = N$ чи $x_j = N_j$. На рис. 2 ця гіперплощина показана у вигляді пунктирної лінії AD для N = 4.

Точка $X^{U0} = \left\{x_1^{U0},\ldots,x_n^{U0}\right\} = \left\{\frac{N}{n},\ldots,\frac{N}{n}\right\}$ є центром контрольної гіперплощини (5), а зменшення будь-якої змінної $x_j^U = 0\ldots N$ по відношенню до максимального значення N згідно (5) означає збільшення інших змінних і пересування точки на більшу відстань від осі x_j.

На контрольній гіперплощині (5) координати точок на умовному гіперколі з радіусом R з найближчих точок до деякої довільної точки центру гіперкола $X^U = \left\{x_1^U,\ldots,x_n^U\right\}$ можна розрахувати за виразами

$$X^{UR1} = \left\{x_1^U \mp R, x_2^U \pm \frac{R}{n-1},\ldots,x_n^U \pm \frac{R}{n-1}\right\};$$

$$X^{UR2} = \left\{x_1^U \pm \frac{R}{n-1}, x_2^U \mp R,\ldots,x_n^U \pm \frac{R}{n-1}\right\};$$

……

$$X^{URn}=\left\{x_1^U\pm\frac{R}{n-1},x_2^U\pm\frac{R}{n-1},\ldots,x_n^U\mp R\right\},$$

де значення координат не повинні мати від'ємну складову (такі точки вилучаються з розгляду або від'ємні значення замінюються нулями). Рівняння прямої лінії контролю, яка проходить через початок координат та точку на контрольній гіперплощині з координатами $X^U=\left\{x_1^U,\ldots,x_n^U\right\}$, має вигляд

$$\frac{x_1}{x_1^U}=\frac{x_2}{x_2^U}=\ldots=\frac{x_n}{x_n^U}. \qquad (6)$$

Це дозволяє в обмеженні $g_i(X)\le 0$ замінити всі координати x_j $\left(j=\overline{1,n},j\ne k\right)$ через значення однієї з координат x_k за формулою

$$x_j=\frac{x_j^U}{x_k^U}x_k. \qquad (7)$$

Тоді обмеження $g_i(X)\le 0$ для ПР перетворюється на рівність лише з однією змінною $g_i^k(x_k)=0$, звідки визначаємо координату x_{ki}. Серед отриманих i величин x_{ki} обираємо найменше значення x_k. Згідно (7) розраховуємо всі інші координати x_j контрольної точки на ПР, по яких визначаємо всі функції мети $F_e(X)$. Якщо обмеження мають ряд локальних екстремумів, то аналіз можна виконати або обиранням точок з випадковими координатами, або використанням замість однієї контрольної лінії кількох достатньо близьких ліній контролю з врахуванням мінімального, середнього і максимального значень функції мети. Скороченню розрахунків сприяє розділ відрізків координат $x_j=0\ldots N$ згідно, наприклад, методу «золотого перерізу» з відповідним розрахунком функції мети.

Координата перетину прямої лінії (6) з площиною i-го обмеження $\frac{x_1}{a_{1i}}+\frac{x_2}{a_{2i}}+\ldots+\frac{x_n}{a_{ni}}=1$ дорівнює $x_{ki}^T=\frac{x_j^U}{A_i}$, де $A_i=\frac{x_1^U}{a_{1i}}=\frac{x_2^U}{a_{2i}}=\ldots=\frac{x_n^U}{a_{ni}}$.

Якщо замість нерівності – гіперплощини використовується нелінійна залежність $g_i(X)\le 0$, то згідно (7) замінюємо всі змінні на одну з наступним отриманням розв'язку для $g_i^k\left(x_{ki}^T\right)=0$, визначенням кількох змінних x_{ki}^T і обранням серед них мінімальної величини x_k^T.

Один з можливих алгоритмів розглянемо на прикладі математичної моделі (1) – (3). Кожний з виділених діапазонів контрольної гіперплощини

$x_j = 0 \ldots N$ ділимо на три частки чотирма точками k = (1, 2, 3, 4), наприклад, за методом «золотого перетину» (рис. 1). Координати контрольних точок на контрольній «гіперплощині» $X_k = \{x_{1k}, x_{2k}\}$, k = (1, 2, 3, 4) при умові $(x_{1k} + x_{2k}) = N = 500$ згідно (5) мають значення

$$X_1 = \{x_{11}; x_{21}\} = \{500; 0\}\ ;\ X_2 = \{x_{12}; x_{22}\} = \{309; 191\}\ ;$$

$$X_3 = \{x_{13}; x_{23}\} = \{191; 309\}\ ;\ X_4 = \{x_{14}; x_{24}\} = \{0; 500\}\ .$$

Через кожну отриману контрольну точку X_k, k = (1, 2, 3, 4) проходить контрольна пряма лінія, яка згідно (6) описується рівнянням

$$\frac{x_1}{x_{1k}} = \frac{x_2}{x_{2k}}\ . \qquad (8)$$

Звідки

$$x_2 = \frac{x_{2k}}{x_{1k}} x_1\ . \qquad (9)$$

Підставляємо (9) у обмеження (2) і розраховуємо величину координати на ПР x_{1P}, а потім по формулі (9) – значення другої координати на ПР x_{2P}.

Координати $\{x_{1P}, x_{2P}\}$ отриманої контрольної точки на ПР дозволяють визначити будь-яку кількість функції мети незалежно від їх складності.

Для точок, де всі координати дорівнюють нулю, крім однієї, не використовуються залежності (8), (9), а безпосередньо з обмеження (2) визначається не рівна нулю координата.

Нижче наводяться приклади розрахунків для двох точок (рис. 1).

Точка 1. Для прямої 01 з координатами контрольної точки на контрольній гіперплощині $X_1 = \{x_{11}, x_{21}\} = \{500, 0\}$ координата контрольної точки на ПР $x_{2P} = 0$, і із (5) отримуємо $4(x_{1P})^2 = 36$ або $x_{1P} = 3$. Таким чином, контрольній точці на гіперплощині з координатами $X_1 = \{x_{11}, x_{21}\} = \{500, 0\}$ відповідає контрольна точка на ПР з координатами $\{x_{1P}, x_{2P}\} = \{3, 0\}$, для якої функція мети дорівнює $F_{11} = 9$.

Точка 2. Для прямої 02 з координатами контрольної точки на контрольній гіперплощині $X_2 = \{x_{12}, x_{22}\} = \{309, 191\}$ рівняння прямої лінії згідно (8) має вигляд $x_1 / 309 = x_2 / 191$, тобто

$$x_2 = (191/309) x_1\ . \qquad (10)$$

Значення (10) підставляємо в (5) і отримуємо величину $x_{1P} = 2,866$, а по формулі (10) – величину $x_{2P} = 1,771$. Для контрольної точки на ПР з координатами $\{x_{1P}, x_{2P}\} = \{2,866; 1,771\}$ розраховується функція мети $F_{12} = 0,34$.

Згідно виконаних ітерацій (табл. 3) оптимальне значення функції мети на ПР дорівнює F_2 = – 4,81 при координатах x_{1P} = 1,58; x_{2P} = 5,10, що ітераційно узгоджується з попередніми розрахунками F_1 = – 4,85; x_{1k}^T = 1,98; x_2^C = 4,75. $L_1 = 0...500$ $L_2 = 0...309$ $L_3 = 0...191$ $L_4 = 73...191$.

Таблиця 3 – **Ітераційний метод оптимізації** [6]

	k	1	2	3	4		k	1	2	3	4
e=1, L_1=0…500	x_{1k}	500	309	191	0	e=2, L_3=0…191	x_{1k}	191	118	73	0
	x_{2k}	0	191	309	500		x_{2k}	309	382	427	500
	x_{1P}	3	2,87	2,33	0		x_{1P}	2,33	1,58	0,97	0
	x_{2P}	0	1,77	3,77	6		x_{2P}	3,77	5,10	5,68	6
	F_{1P}	9	0,34	-4,29	0		F_{1P}	-4,29	-4,81	-2,86	0
e=2, L_2=0…309	x_{1k}	309	191	118	0	e=4, L_4=73…191	x_{1k}	191	146	118	73
	x_{2k}	191	309	382	500		x_{2k}	309	354	382	427
	x_{1P}	2,87	2,33	1,58	0		x_{1P}	2,33	1,91	1,58	0,97
	x_{2P}	1,77	3,77	5,10	6		x_{2P}	3,77	4,63	5,10	5,68
	F_{1P}	0,34	-4,29	-4,81	0		F_{1P}	-4,29	-4,78	-4,81	-2,86

Метод [6] також можна, аналогічно попередньому, застосувати для прямого ітераційного пошуку, для чого розглядається функція мети (1) на універсумах U_{x1} = 0…4, U_{x2} = 0…8, кожне з яких розділяється чотирма точками на три частини.

Висновки. Розглянутий напрямок оптимізації [2, 3, 5, 6] усуває ряд недоліків умов Куна – Таккера та чисельного програмування і дозволяє розв'язувати більше коло задач математичного програмування.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Зайченко Ю. П.*** Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – К.: Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.

2. ***Кутковецький В. Я.*** Ітераційний метод оптимізації дискретних задач математичного програмування з лінійними нерівностями / В. Я. Кутковецький // Наукові праці: Науково-методичний журнал. – Вип. 121, т. 134. Комп'ютерні технології. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2010. – С. 94 – 98.

3. ***Кутковецький В. Я.*** Оптимізація нелінійних дискретних задач дослідження операцій переміщенням по упорядкованим точкам поверхні розв'язків / В. Я. Кутковецький // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. / Дніпропетровський національний університет – Д.: Наука і освіта, 2010. – Вип. 14. – С. 210 – 215.

4. ***Пантелеев А. В.*** Методы оптимизации в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.

5. ***Турти М. В.*** Ітераційні методи оптимізації моделей математичного програмування та однозначних нечітких систем / М. В. Турти, В. Я. Кутковецький, О. І. Комарова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Д.: ІМА-прес, 2009. – Вип. 13. – С. 248 – 256.

6. ***Турти М. В.*** Впроваджування точок на поверхні рішень в задачах математичного програмування / М. В. Турти // Іноваційні технології в суднобудуванні та океанотехніці: Матеріал Міжнародної науково-технічної конференції. – Миколаїв: НУК ім. Адмірала С. О. Макарова, 2010. – С. 394 – 396.

Національний університет кораблебудування
ім. Адмірала С. О. Макарова,
Миколаїв, Україна

Надійшла до редколегії 01.03.2011

В. Я. Кутковецкий, д-р техн. наук, М. В. Турти, канд. техн. наук

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С УПОРЯДОЧЕННЫМ РАЗМЕЩЕНИЕМ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ РЕШЕНИЙ

Вспомогательные контрольные прямые линии пересекают поверхность решений в упорядочено размещенных на ней точках и дают возможность для разных переменных одной задачи получить оптимальное итерационно точное, дискретное и целочисленное решение многокритериальных нелинейных или линейных задач математического программирования с ограничениями или при прямом поиске оптимума.

Ключевые слова: *многокритериальные задачи, нелинейное программирование.*

V. Y. Kutkovetsky, Professor, M. V. Turti, Associate Professor

MULTICRITERIAL ITERATION METHODS FOR OPTIMIZATION OF NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS WITH ORDERED POINTS ON THE SURFACE OF DECISIONS

Auxiliary control straight lines across the decision's surface in the ordered points placed on it and allow for different variables of a problem to obtain optimal iterative accurate, discrete and integer solution of multicriterial linear or nonlinear mathematical programming problems with constraints or with the direct search for the optimum.

Keywords**:** *multicriterial problems, nonlinear programming.*