

УДК 539.1:534.1

*І. В. Янчевський, д-р фіз.-мат. наук*

## КЕРУВАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИМИ КОЛИВАННЯМИ П'ЄЗОПЕРЕТВОРЮВАЧА У ВИГЛЯДІ ПОЛОГОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Представлено чисельно-аналітичний метод розв'язання задачі про керування електричним шляхом нестационарними вісесиметричними коливаннями пологої сферичної оболонки, яка складена з тонких пружного і електропружного шарів. Моделювання динамічних процесів виконано в рамках класичної теорії тонких електропружних оболонок. З використанням інтегрального перетворення Лапласа та розвинення шуканих функцій у ряди задача на відшукання конфігурації керуючого електричного сигналу зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерра II-го роду, розв'язання якої виконано чисельно із залученням регуляризуючого алгоритму.

*Ключові слова:* електропружна полого сферична оболонка, нестационарні вісесиметричні коливання, керування.

**Вступ.** На даний час для керування коливаннями тонкостінних конструкцій особлива увага приділяється розвитку активних методів, заснованих на включенні електропружних елементів (з п'єзоелектрично активних матеріалів) та їх роботі в режимі зворотного п'єзоефекту. Переважна частина отриманих у рамках теоретичних досліджень з активного керування результатів отримана в припущенні, що збуджуючі коливання механічного навантаження є періодичними у часі. Серед публікацій останніх років, присвячених даній проблемі, слід відзначити [3, 11, 13]. Разом з тим питання про застосовність електропружних елементів для керування нестационарними коливаннями тонкостінних конструкцій, обумовленими зовнішніми механічними навантаженнями з довільним законом зміни в часі, у т.ч. імпульсними, залишаються недостатньо вивченими. Сучасні успіхи в дослідженні можливостей такого керування за рахунок вибору профілю електричного навантаження, зокрема, для конструктивних елементів у вигляді сферичних і циліндричних оболонок, можна знайти в [1, 4, 6, 7, 10, 12].

Ця робота присвячена проблемі керування вісесиметричними коливаннями пологої сферичної оболонки за рахунок прикладання до струмопровідних покриттів електропружного її шару електричного навантаження, конфігурація якого підлягає визначенню. При цьому розглянуто два критерії на керування, один з яких орієнтований на забезпечення руху центральної точки оболонки за наперед заданим законом, другий – на мінімізацію деформованого стану оболонки, обумовленого зовнішнім механічним навантаженням.

**Постановка задачі.** Розглядається в полярних координатах  $(r, \theta)$  полого сферична оболонка, складеної з жорстко з'єднаних між собою внутрішнього пружного шару товщиною  $h_m$  та зовнішнього електропружного шару товщиною  $h_p$ , який виготовлений з радіально поляризованої п'єзокераміки класу симетрії 6mm. Оболонка обмежена в плані колом радіусу  $l$ , а радіус кривизни поверхні з'єднання шарів дорівнює  $R_1$ . Передбачається, що край оболонки шарнірно закріплений, а її коливання збуджуються як механічним вісесиметричним нормальним навантаженням  $q_0(t)$  ( $t$  – час), область розподілу якого визначається радіусом  $l_1$ , так і різницею потенціалів  $V_0(t)$ , які прикладаються до суцільних нескінченно тонких струмопровідних покриттів п'єзокерамічного шару. При цьому вважається, що електростатичний потенціал на внутрішньому покритті дорівнює нулю (рис. 1).

Початкові умови – нульові (до моменту часу  $t=0$  конструктивний елемент перебуває в стані спокою).

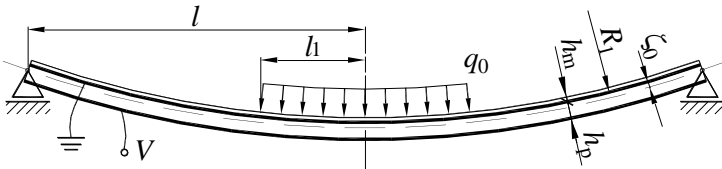


Рис. 1 – Схема навантаження оболонки

Для моделювання електропружного стану оболонки через її тонкостінність залучаються механічні гіпотези Кірхгофа – Лява для двохшарової структури в цілому, які доповнені відповідної точності гіпотезами щодо характеристик електричного поля в електропружному шарі. В результаті розглянута вісесиметрична задача зводиться до розв'язання системи рівнянь:

$$\beta_0^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^3} \right) \right) = \beta_0^4 q_\zeta + \left[ \frac{2}{R} V - \zeta_p \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right]; \quad (1)$$

$$-\delta_1 \frac{\partial w}{\partial r} + \delta_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^2} = q_r - \delta_3 \frac{\partial V}{\partial r},$$

де  $w$  і  $u_0$  – нормальні та радіальні переміщення точок поверхні

зведення;  $q_r = 0$  і  $q_\zeta(r, t) = q_0(t)H(l_1 - r)$  – меридіональна та нормальна складові зовнішнього механічного навантаження;  $H$  – одинична функція Хевісайда;  $V(r, t) = V_0(t)$  – різниця потенціалів між суцільними струмопровідними покриттями електропружного шару.

Граничні умови у випадку шарнірного закріплення краю оболонки мають вигляд:

$$w|_{r=l} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\bar{\nu}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{\bar{\nu}}{R} \frac{u_0}{r} + \zeta_p V \right) \Big|_{r=l} = 0;$$

$$\left( \frac{1+\nu}{R} w + \frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu \frac{u_0}{r} - \delta_6 V \right) \Big|_{r=l} = 0.$$

Слід зазначити, що система (1) і умови (2) записані з використанням безрозмірних змінних: геометричні величини віднесені до  $l$  (при цьому  $R = (R_1 + \zeta_0)/l$ ;  $\zeta_0$  – відстань між поверхнею зведення та поверхнею з'єднання шарів, рис. 1); час – до  $l\sqrt{m_h/D_N(1+\delta_5)}$ ; навантаження  $q_*$  – до  $D_N(1+\delta_5)/l$ ; електростатичний потенціал – до  $-\bar{D}/e_1 l^2$ . Розрахункові вирази для вхідних в (1) і (2) постійних коефіцієнтів співпадають з наведеними в [5].

Для замикання постановки даної нестационарної задачі необхідно записати початкові умови ( $w|_{t=0} = u_0|_{t=0} = \partial w/\partial t|_{t=0} = \partial u_0/\partial t|_{t=0} = 0$ ) та вказати умову керування, на підставі якої визначається профіль електричного сигналу  $V_0(t)$ . У даній роботі розглядаються два варіанти такої умови:

$$w(0, t) = f(t); \tag{3'}$$

$$\int_0^l w(r, t) r dr = 0. \tag{3''}$$

Перша орієнтована на забезпечення руху центральної точки  $r = 0$  за заданим законом  $f(t)$ , а друга припускає мінімізацію деформованого стану оболонки, обумовленого зовнішнім механічним навантаженням  $q_0(t)$ .

**Метод розв'язання.** Для розв'язання задачі переміщення  $w$  та  $u_0$  шукаються у вигляді сум «квазістатичних» і «динамічних» складових [8], останні з яких записуються рядами по функціях Бесселя  $l$ -го роду:

$$w(r,t) = a_0(t)(r^2 - l^2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) J_0(\lambda_k r); \quad (4')$$

$$u_0(r,t) = b_0(t)r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) J_1(\lambda_k r),$$

де  $\lambda_k$  – додатні корені рівняння  $J_0(\lambda_k l) = 0$ , розташовані в порядку зростання;  $a_k, b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) – коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Функції електричної  $V(r,t)$  та механічної  $q_{\zeta}(r,t)$  зовнішніх навантажень (1) представляються рядами Фур'є – Бесселя:

$$V(r,t) = V_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(3)} J_0(\lambda_k r); \quad q_{\zeta}(r,t) = q_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(0)} J_0(\lambda_k r), \quad (4'')$$

у яких  $\chi_k^{(0)} = \frac{2l_1}{\lambda_k l^2} \frac{J_1(\lambda_k l_1)}{J_1^2(\lambda_k l)}$ ;  $\chi_k^{(3)} = \frac{2}{l \lambda_k J_1(\lambda_k l)}$ .

Після підстановки рядів (4'), (4'') у рівняння (1) і застосування інтегрального перетворення Лапласа за часом з врахуванням нульових початкових умов ( $s$  – комплексний параметр перетворення) для невідомих коефіцієнтів розвинень  $a_k$  і  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) в області зображень нескладно одержати наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$a_k^L(s) (s^2 + \phi_k^{(3)}) + b_k^L(s) \frac{\lambda_k^3}{R\beta_0^4} = q_0^L(s) \chi_k^{(0)} + V_0^L(s) \chi_k^{(4)} + a_0^L(s) s^2 \chi_k^{(5)}; \quad (5)$$

$$a_k^L(s) (\delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3) + b_k^L(s) (s^2 + \phi_k^{(2)}) = a_0^L(s) \chi_k^{(6)} + b_0^L(s) s^2 \chi_k^{(7)}.$$

При отриманні (5) був врахований той факт, що електростатичний потенціал не залежить від радіальної координати (струмопровідні покриття є суцільними), і були уведені наступні позначання:

$$\chi_k^{(4)} = \frac{2\chi_k^{(3)}}{R\beta_0^4}; \quad \chi_k^{(5)} = \frac{J_1(\lambda_k l)(2-l^2) + l^2 J_3(\lambda_k l)}{\lambda_k l J_1^2(\lambda_k l)}; \quad \chi_k^{(7)} = \frac{-2J_3(\lambda_k l)}{\lambda_k J_1^2(\lambda_k l)};$$

$$\chi_k^{(6)} = -2\delta_1 \chi_k^{(7)}.$$

Розв'язання системи (5) нескладно записати в зручному для наступної побудови оригіналів вигляді:

$$\begin{aligned}
 a_k^L(s) &= q_0^L(s) \chi_k^{(0)} I_k^{(2)L}(s) + V_0^L(s) \chi_k^{(4)} I_k^{(2)L}(s) + \\
 &+ a_0^L(s) \chi_k^{(5)} \left[ 1 - \phi_k^{(3)} I_k^{(5)L}(s) \right] - b_0^L(s) \chi_k^{(7)} \frac{\lambda_k^3}{R \beta_0^4} I_k^{(0)L}(s); \\
 b_k^L(s) &= - \left[ q_0^L(s) \chi_k^{(0)} + V_0^L(s) \chi_k^{(4)} \right] \left( \delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3 \right) I_k^{(1)L}(s) + \\
 &+ a_0^L(s) \frac{\chi_k^{(6)} \phi_k^{(3)}}{\phi_k^{(4)}} I_k^{(4)L}(s) + b_0^L(s) \chi_k^{(7)} \left( 1 - \phi_k^{(2)} I_k^{(6)L}(s) \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\text{Тут } I_k^{(1)L}(s) = \frac{1}{D_k(s)}; \quad I_k^{(\kappa)L}(s) = \frac{s^2 + \phi_k^{(\kappa)}}{D_k(s)} \quad (\kappa \neq 1); \quad \phi_k^{(0)} = 0; \quad \phi_k^{(2)} = \lambda_k^2;$$

$$\phi_k^{(3)} = \frac{\lambda_k^4}{\beta_0^4}; \quad \phi_k^{(4)} = \frac{\chi_k^{(6)} \phi_k^{(3)}}{\chi_k^{(6)} - \chi_k^{(5)} \left( \delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3 \right)}; \quad \phi_k^{(5)} = \left( \delta_k^{(8)} + \frac{\chi_k^{(6)}}{\chi_k^{(5)}} \frac{\lambda_k^3}{R \beta_0^4} \right) / \phi_k^{(3)};$$

$$\phi_k^{(6)} = \frac{\delta_k^{(8)}}{\phi_k^{(2)}}; \quad D_k(s) = s^4 + s^2 \delta_k^{(7)} + \delta_k^{(8)}; \quad \delta_k^{(7)} = \phi_k^{(2)} + \phi_k^{(3)};$$

$$\delta_k^{(8)} = \phi_k^{(3)} \left( \phi_k^{(2)} \left( 1 - \frac{\delta_2}{R} \right) - \frac{\delta_1}{R} \right).$$

Очевидно, що прийнятий вид розв'язку для функції  $w$  забезпечує виконання лише першої граничної умови (2) про рівність нулю прогину на контурі пластини. Для наближеного задоволення других і третього граничних умов (2) використовуються функції  $a_0(t)$  та  $b_0(t)$ . Для їх обчислення розв'язки (4') підставляються в трансформовані за Лапласом згадані умови. З використанням залежностей між функціями Бесселя та їх похідними отримуємо наступну систему в області зображень:

$$a_0^L(s) + \frac{1-\nu'}{2l(1+\nu')} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) \lambda_k J_1(\lambda_k l) + \frac{\zeta_p - \delta_6/R}{2(1+\nu')} V_0^L(s) = 0; \quad (7)$$

$$b_0^L(s) - \frac{1-\nu}{l(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) J_1(\lambda_k l) - \frac{\delta_6}{1+\nu} V_0^L(s) = 0,$$

яка з врахуванням зв'язків (6) між фігуруючими в (3') коефіцієнтами містить три невідомі функції – зображення  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$  і  $V_0(t)$ . Рівняння, якого не вистачає, формується з прийнятої умови керування. Так умова (3') про керування рухом точки на осі симетрії оболонки з врахуванням

(4') прийме вид

$$-a_0^L(s)l^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) = f^L(s), \quad (8')$$

а інтегральна умова (3''), що моделює наближення поверхні зведення біморфної оболонки до недеформованого стану

$$-a_0^L(s) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) \frac{4J_1(\lambda_k l)}{l^3 \lambda_k} = 0. \quad (8'')$$

На підставі системи (7) і замикаючого його рівняння (8') або (8'') нескладно одержати алгебраїчні рівняння для шуканих функцій в області зображень наступного формату:

$$a_0^L(s)K_{1i}^L(s) + b_0^L(s)K_{2i}^L(s) + V_0^L(s)K_{3i}^L(s) = q_0^L(s)K_{4i}^L(s) + y_i^L(s) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (9)$$

Явний вид трансформант  $K_{ji}^L(s)$  ( $j = \overline{1,4}$ ;  $i = \overline{1,3}$ ) для скорочення викладу матеріалу не наводиться.

Спроба розв'язання системи рівнянь (9) пов'язана з необхідністю розкриття визначників 3-го порядку. При цьому одержувані формули для шуканих величин стають настільки складними та громіздкими, що наступна їх інверсія пов'язана з принциповими математичними труднощами. Тому для її розв'язання здійснюється безпосередній перехід у простір оригіналів. У результаті обернення отримаємо систему інтегральних рівнянь Вольтерра II-го роду відносно функцій  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$  і  $V_0(t)$ :

$$a_0 * K_{1i} + b_0 * K_{2i} + V_0 * K_{3i} = q_0 * K_{4i} + y_i \quad (i = \overline{1,3}). \quad (10)$$

Тут використовується позначання  $X * Y = H(t) \int_0^t X(\tau)Y(t-\tau)d\tau$ .

Функції  $I_k^{(*)}(t)$ , які фігурують у ядрах  $K_{ji}(t)$  системи (10), знайдені аналітично з використанням таблиць операційного обчислення [2]:

$$I_k^{(\kappa)}(t) = \sum_{j=1}^2 \beta_k^{(\kappa,j)} \frac{\sin(\alpha_k^{(j)} t)}{\alpha_k^{(j)}}; \quad \beta_k^{(1,j)} = \frac{1}{\alpha_k^{(i)2} - \alpha_k^{(j)2}};$$

$$\beta_k^{(\kappa,j)} = \frac{\phi_k^{(\kappa)} - \alpha_k^{(j)2}}{\alpha_k^{(i)2} - \alpha_k^{(j)2}} \quad (\kappa \neq 1),$$

де  $i, j = 1, 2$ ;  $i \neq j$ ;  $\alpha_k^{(j)}$  – модулі уявних коренів біквдратного рівняння

$$D_k(s) = 0 \quad (D_k(s) = (s^2 + \alpha_k^{(1)2})(s^2 + \alpha_k^{(2)2})).$$

Система інтегральних рівнянь (10) розв'язувалася чисельно з використанням квадратурних формул. При цьому для побудови стійких до обчислювальних погрішностей та некоректності вхідних даних результатів використовувався регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова. Чисельна реалізація алгоритму детально описана у низці монографій, зокрема [9].

Далі за виразами (4') обчислюється деформований стан оболонки. При цьому на підставі інверсії рівностей (6) будуть справедливими вирази:

$$\begin{aligned} a_k &= q_0 * \chi_k^{(1)} I_k^{(2)} + V_0 * \chi_k^{(4)} I_k^{(2)} + a_0 \chi_k^{(5)} - a_0 * \chi_k^{(5)} \phi_k^{(3)} I_k^{(5)} - b_0 * \chi_k^{(7)} \frac{\lambda_k^3}{R\beta_0^4} I_k^{(0)}; \\ b_k &= -q_0 * \chi_k^{(1)} (\delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3) I_k^{(1)} - V_0 * \chi_k^{(4)} (\delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3) I_k^{(1)} + \\ &+ a_0 * \frac{\chi_k^{(6)} \phi_k^{(3)}}{\phi_k^{(4)}} I_k^{(4)} + b_0 \chi_k^{(7)} - b_0 * \chi_k^{(7)} \phi_k^{(2)} I_k^{(6)}. \end{aligned}$$

Маючи у своєму розпорядженні представлену вище методику нескладно побудувати розв'язок задачі у випадку жорсткого защемлення краю оболонки. При цьому граничні умови жорсткого защемлення

$$w|_{r=l} = 0; \quad \partial w / \partial r|_{r=l} = 0; \quad u_0|_{r=l} = 0,$$

після підстановки в них подань (4') в області зображень запишуться у вигляді наступної системи рівнянь:

$$2la_0^L(s) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) \lambda_k J_1(\lambda_k l) = 0; \quad b_0^L(s) l + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) J_1(\lambda_k l) = 0.$$

З врахуванням співвідношень (6) і рівняння (8') чи (8'') ця система, аналогічно (9), представляє собою в області оригіналів систему інтегральних рівнянь Вольтерра II-го роду відносно  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$  і  $V_0(t)$ . Процедура її розв'язання та наступне відновлення деформованого стану оболонки при жорсткому защемленні краю аналогічні викладеним вище.

**Результати обчислень.** Числові результати виконані для біморфної оболонки, шари якої виготовлені з п'єзокераміки марки PZT-5 безрозмірної товщини  $h_p = 0,04$  і титанового сплаву ВТ-6 товщиною  $h_m = h_p / 2$ .

Фізико-механічні характеристики зазначених матеріалів можна знайти в [8]. Обезрозмірний радіус поверхні зведення  $R = 3$ . Крок дискретизації часового інтервалу для реалізації методу квадратур (методу середніх прямокутників) прийнятий рівним 0,078. У рядах (4) утримувалося 30 членів, що забезпечило прийнятну точність розрахунків. Параметр регуляризації в методі А. М. Тихонова обчислювався на підставі принципу нев'язки с відносним рівнем 0,1.

У якості першого прикладу розглянута задача керування коливаннями оболонки із шарнірно закріпленим краєм для забезпечення осьового руху центральної її точки  $r = 0$  за законом, графік якого зображений штриховою кривою 1 на рис. 2, а. Слід зазначити, що дана крива відповідає переміщенням цієї точки у випадку дії на біморфну оболонку з жорстко затисненим краєм одиничного східчастого механічного навантаження, рівномірно розподіленого на круговій області радіусу  $l_1 = 0,5l$ . Профіль керуючого впливу, обчислений на підставі системи рівнянь (7) і (8') в області оригіналів і такий, що забезпечує виконання умови (3), зображений кривою 1 на рис. 2, б. Наступне обчислення переміщень  $w(0,t)$  у припущенні, що електричне навантаження  $V_0(t)$  є відомим (крива 1, рис. 2, б) дає поведінку точки  $r = 0$ , яка близька до необхідної (крива 2, рис. 2, а). Очевидно, що отриманий керуючий сигнал із прийнятною точністю може бути описаний виразом  $V_0(t) \approx V_m + V_a \cos(\omega t)$ , а закон руху  $f(t) \approx w_{st}(1 - \cos(\omega t))$ . Тут  $V_m = 913$  і  $w_{st} = 30,3$  – середні значення;  $V_a = 2197$  – амплітудне значення;  $\omega = 2\pi/T_0$ ,  $T_0 \approx 31,33$  – період нижчої форми коливань оболонки з жорстко защемленим краєм. Виявлено, що між  $V_m$  і  $w_{st}$  має місце наближений зв'язок при розв'язанні задачі в статичній постановці (коли в системі (1) відсутні інерційні доданки) – при прикладанні електричного навантаження  $V_0 = V_m$  одержуємо  $w|_{r=0} \approx w_{st}$ . Слід зазначити, що при розв'язанні викладеним методом статичної задачі та пошуку її розв'язку у вигляді:

$$w(r) = a_0(r^2 - l^2) + \sum_k a_k J_0(\lambda_k r),$$

$$u_0(r) = b_0 r + \sum_k b_k J_1(\lambda_k r),$$

задача зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $a_0$  і  $b_0$  (при заданому значенні  $V_0$ ) або відносно  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$  і  $V_0(t)$  (при відшуканні значення керуючого електричного навантаження).



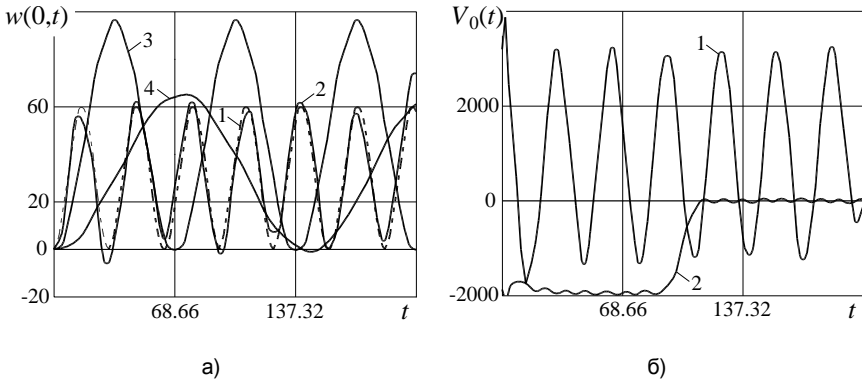


Рис. 2 – Результати обчислень при реалізації умови керування (3')

Крива 3 на рис. 2, а ілюструє деформації розглянутої біморфної оболонки як функція  $w(0,t)$  при раптовому прикладанні одиничного електричного навантаження  $V_0(t) = H(t)$ . Як і раніше вважається, що механічне навантаження відсутнє ( $q_z = 0$ ), а край оболонки шарнірно закріплений. Видалення пружного шару ( $h_m = 0$ ) приводить до зменшення максимальних значень переміщень, незважаючи на зменшення згинної жорсткості оболонки (крива 4). Цей ефект обумовлений обнулінням «електричної» складової у виразах для згинальних моментів через збіг поверхні зведення із серединною поверхнею електропружного шару (див. [9]). Зіставлення кривих 3 і 4 на цьому рисунку, які для зручності читання результатів побудовані з масштабним коефіцієнтом 1000, свідчить про більш широку роль пружного шару окрім збільшення міцності розглянутого біморфного конструктивного елемента (п'єзокераміка – матеріал досить крихкий). Додаткове збільшення чутливості, під якою тут мається на увазі збільшення максимального значення  $w(0,t)$  при дії одиничного електричного навантаження, можливо за рахунок відповідного вибору співвідношень між товщинами шарів та секціонування струмопровідних покриттів.

У якості другого прикладу розглянуто випадок мінімізації деформацій оболонки, обумовлених дією механічного навантаження прямокутного профілю –  $q_0(t) = H(T_1 - t)$ , яке рівномірно розподілене на круговій області, обмеженої радіусом  $l_1 = 0,5l$ . Тут  $T_1 = 1,5 \cdot T_0$  – тривалість дії імпульсу;  $T_0 \approx 68,66$  – період нижчої форми власних згинних коливань оболонки із шарнірно закріпленим краєм при короткозамкнених електродах ( $V_0 = 0$ ). Керування, як і раніше, реалізується електричним шляхом, однак у цьому випадку конфігурація електричного сигналу визначається із системи інтегральних рівнянь, одержуваної оберненням рівнянь (7) і (8").

На рис. 3 кривою 1 зображена залежність від часу прогину в центрі оболонки  $w(0,t)$ , коли керуючий сигнал не підводить (електроди закорочені,  $V_0 = 0$ ). Із графіка видно, що при  $t < T_1$  оболонка здійснює коливання відносно статичного деформованого стану ( $w_{st} = -90,2$ ), а після припинення дії механічного навантаження ( $t > T_1$ ) – відносно рівноважного положення з максимальною на момент зняття навантаження ( $t = T_1$ ) амплітудою. Обчислена конфігурація електричного сигналу, яка забезпечує наближене виконання умови керування (3"), зображена на рис. 2,б кривою 2. Спільне прикладання даного керуючого електричного навантаження та збуджуючого механічного  $q_\zeta(r,t) = H(T_1 - t)H(l_1 - r)$  дає в точці  $r = 0$  переміщення  $w$ , яке зображене на рис. 3 кривою 2. З рисунку видно, що при дії обчисленого керуючого навантаження максимальні значення механічно обумовлених переміщень у точці  $r = 0$  зменшилися приблизно в 14 разів, що свідчить про ефективність даного механізму керування нестационарними коливаннями розглянутої електропружної оболонки. При цьому, як витікає з рис. 3, прикладання обчисленого керуючого навантаження  $V_0(t)$  дозволило зменшити амплітудні значення основної форми коливань, частота якої зберігається, однак на цій частоті переміщення  $w$  в точці  $r = 0$  при  $V_0 = 0$  й  $V_0(t) \neq 0$  відбуваються вже в протифазі.

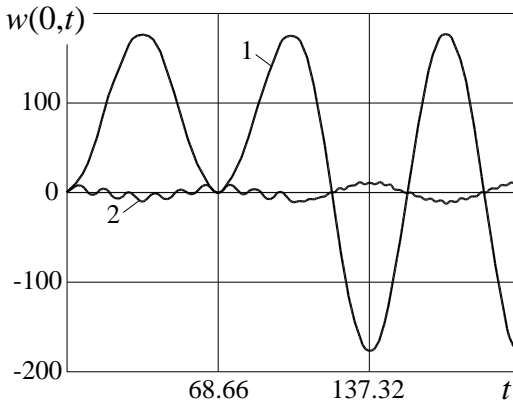


Рис. 3 – Результати обчислень при реалізації умови керування (3")

Із зіставлення профілю зовнішнього механічного навантаження та графіка обчисленого керуючого впливу  $V_0$  (крива 2, рис. 2, б), випливає можливість її подання виразом  $V_0(t) \approx V_{st}q_0(t)$ , де  $V_{st} \approx -1805$  – розв'язок даної задачі керування в статичній постановці (при  $q_\zeta(r) = H(l_1 - r)$ ). Цей факт свідчить про можливість суттєвого

спрощення процедури розв'язання задачі про керування нестационарними коливаннями з подібними до (3") критеріями керування, що особливо актуально в прикладних задачах з керуванням у режимі реального часу. Керуюче електричне навантаження при цьому зрівноважує механічне.

Представлений графічний матеріал у цілому демонструє ефективність викладеного механізму керування нестационарними коливаннями розглянутої біморфної оболонки. Збільшення ефективності такого керування можливо не тільки за рахунок відповідного вибору геометричних параметрів оболонки, але й за рахунок секціонування струмопровідних покриттів електропружного шару. При розробці методів керування коливаннями оболонки із секціонованим покриттям можуть бути використані наведені підходи.

**Висновки.** Викладено чисельно-аналітичний метод розв'язання задачі про керування нестационарними віссиметричними коливаннями конструктивного елемента у вигляді пологої сферичної оболонки, складеної з тонких пружного та електропружного шарів. Керування здійснюється за рахунок різниці електричних потенціалів, яка підводиться до суцільних електродів електропружного шару. Розглянуті в роботі умови керування орієнтовані на забезпечення руху центральної точки оболонки за наперед заданим законом та на мінімізацію рівня механічно обумовлених її коливань. Постановка задачі виконана в рамках теорії тонких електропружних оболонок, заснованої на узагальненні на випадок електромеханіки гіпотезах Кірхгофа – Лява. Процедура розв'язання задачі побудована на поданні шуканого розв'язку у вигляді суми «квазістатичної» та «динамічної» складових, розвиненні шуканих функцій у ряди Фур'є – Бесселя, методах теорії інтегральних перетворень та теорії некоректних задач обчислювальної математики. Представлено графічний матеріал, який ілюструє ефективність запропонованого механізму керування та формування профілю керуючого впливу. Зниження рівня керуючого впливу можливо як за рахунок відповідного вибору співвідношень між товщинами шарів, так і секціонування струмопровідних покриттів.

## БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Бабаев А. Э.** Излучение акустических импульсов заданного профиля электроупругой цилиндрической оболочкой / А. Э. Бабаев, В. Г. Савин, Ю. В. Кожемяка // Теор. и прикл. мех. – 2001. – Вып. 33. – С. 186–191.
2. **Диткин В. А.** Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М. : Высшая школа, 1965. – 466 с.
3. **Киричок И. Ф.** Вынужденные моногармонические колебания и виброразогрев вязкоупругих гибких круглых пластинок с пьезослоями / И. Ф. Киричок // Прикл. механика. – 2013. – Т. 49, № 6. – С. 100–112.
4. **Ковальчук П. С.** Управление колебаниями незамкнутой сферической оболочки из электроупругого материала / П. С. Ковальчук, И. В. Янчевский // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2012. – Вып. 18. – С. 79–90.
5. **Кубенко В. Д.** Колебания незамкнутой двухслойной (металл-пьезокерамика) сферической оболочки при импульсном электромеханическом нагружении / В. Д. Кубенко, И. В. Янчевский // Прикл. механика. – 2013. – Т. 49, № 3. – С. 60–73.
6. **Подчасов Н. П.** Управление нестационарными колебаниями цилиндрической

полупассивной оболочки при секционированном электродировании пьезослоя / Н. П. Подчасов, И. В. Янчевский // Теор. и прикл. мех. – 2011. – Вып. 3 (49). – С. 93–101.

7. **Савин В. Г.** Нестационарная гидроэлектроупругость сферических пьезоэлектрических преобразователей / В. Г. Савин, А. В. Збруцкий, И. О. Моргун. – К.: НТУУ «КПИ», 2013. – 241 с.

8. **Янчевский И. В.** Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении / И. В. Янчевский // Проблемы общислювальной механики і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – 2011. – Вып. 16. – С. 303–313.

9. **Янютин Е. Г.** Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский. – Харьков: Изд-во ХАДИ, 2001. – 184 с.

10. **Piquette J. C.** Approximate transducer transient suppression with increased output amplitude / J. C. Piquette // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – Vol. 128, Is. 5. – P. 2543–2548.

11. **Qiu J.** Research on applications of piezoelectric materials in smart structures / J. Qiu, H. Ji // Front. Mech. Eng. – 2011. – Vol. 6, Is. 1. – P. 99–117.

12. **Scandrett C.** Scattering and active acoustic control from a submerged spherical shell / C. Scandrett // J. Acoust. Soc. Am. – 2002. – Vol. 111, Is. 2. – P. 893–907.

13. **Thorat P.A.** Vibration Control by Piezoelectric Materials: A Review / P. A. Thorat, B. C. Londhe, T. B. Sonawane // Int. J. of Innovative Research in Adv. Eng. – 2014. – Vol. 1, Is. 4. – P. 206–210.

*И. В. Янчевский, д-р физ.-мат. наук*

## **УПРАВЛЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В ВИДЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Представлено численно-аналитическое решение задачи об управлении электрическим путем нестационарными осесимметричными колебаниями пологой сферической оболочки, составленной из тонких упругого и электроупругого слоев. Моделирование динамических процессов выполнено в рамках теории тонких электроупругих оболочек, основанной на обобщенных гипотезах Кирхгофа – Лява. С использованием интегрального преобразования Лапласа и разложения искомым функций в ряды задача на отыскание конфигурации управляющего электрического сигнала сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра II-го рода, решение которой выполнено численно с привлечением регуляризирующего алгоритма.

*Ключевые слова:* электроупругая биморфная полая сферическая оболочка, нестационарные осесимметричные колебания, управление

*I. V. Yanchevsky, Dr. Sci. (Phys.-Math.)*

## **CONTROL OF AXISYMMETRIC VIBRATION OF PIEZOTRANSDUCER IN FORM OF SHALLOW SPHERICAL SHELL**

The numerical-analytical solution of a problem about control by electrical load of non-stationary axisymmetric vibrations of the shallow spherical shell composed of thin elastic and electroelastic layers is presented. Modelling of dynamic processes is executed within the theory of the thin electroelastic shells based on generalized Kirchhoff – Love hypotheses. Using integral Laplace transform and decomposition of unknown functions in series the problem on determination of a configuration of controlling electric signal is reduced to system of Volterra integral equations of the 2nd kind which is solved numerically with regularizing algorithm.

*Keywords:* electroelastic bimorph shallow spherical shell, non-stationary axisymmetric vibration, control.

**Problem statement.** For modelling an electroelastic state of the shell in view of its small thickness generalized on case of electromechanics Kirchhoff – Love hypotheses are involved. As a result considered axisymmetric problem is reduced to solving of the system of equations:

$$\begin{aligned} & \beta_0^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \\ & - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^3} \right) = \beta_0^4 q_\zeta + \frac{2}{R} V; \\ & -\delta_1 \frac{\partial w}{\partial r} + \delta_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{u_0}{r^2} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where  $w$  and  $u_0$  are normal and radial displacements of points on the surface of reduction of considered bimorph shell;  $q_\zeta(r, t) = q_0(t)H(l_1 - r)$  – normal component of external mechanical load;  $t$  – time;  $H$  – Heaviside step function;  $V(r, t) = V_0(t)$  – difference of potential between continuous current-carrying coverings of the electroelastic layer;  $r$  – radial coordinate;  $R$  – radius of curvature of the surface of reduction.

Boundary conditions in case of the shell with hinged edge are:

$$\begin{aligned} & w|_{r=l} = 0; \\ & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\bar{\nu}}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{\bar{\nu}}{R} \frac{u_0}{r} + \zeta_p V \right) \Big|_{r=l} = 0; \\ & \left( \frac{1+\nu}{R} w + \frac{\partial u_0}{\partial r} + \nu \frac{u_0}{r} - \delta_6 V \right) \Big|_{r=l} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

System (1) and conditions (2) are written down using dimensionless variables. Equations for entering into them and further constant coefficients are not presented here.

Two conditions for control for electric signal  $V_0(t)$  calculation are considered:

$$w(0, t) = f(t); \quad (3')$$

$$\int_0^l w(r, t) r dr = 0. \quad (3'')$$

The first condition is focused on maintenance of movement of the central point  $r=0$  according to the law  $f(t)$ , the second one assumes minimization of the deformed state of the shell under external mechanical load  $q_0(t)$ .

**Method of solving.** For the solving of the problem displacements  $w$  and  $u_0$  are searched in the form of the sums of “quasistatic” and “dynamic” summands, last of which are written as series of Bessel functions:

$$w(r,t) = a_0(t)(r^2 - l^2) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) J_0(\lambda_k r);$$

$$u_0(r,t) = b_0(t)r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) J_1(\lambda_k r), (4')$$

where  $\lambda_k$  are positive roots of the equation  $J_0(\lambda_k l) = 0$  located in ascending order;  $a_k, b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) are coefficients which are under determination.

Functions of electric  $V(r,t)$  and mechanical  $q_{\zeta}(r,t)$  external loads (see (1)) are presented as Fourier – Bessel series:

$$V(r,t) = V_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(3)} J_0(\lambda_k r); \quad q_{\zeta}(r,t) = q_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k^{(0)} J_0(\lambda_k r). \quad (4'')$$

After substitution (4) in equations (1) and applying integral Laplace transform on time in view of zero initial conditions ( $s$  is complex parameter of transformation) for unknown coefficients of decomposition  $a_k$  and  $b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) in the field of transforms it is simple to obtain system of algebraic equations. A solution of this system can be written down in convenient for the next construction of originals form:

$$a_k^L(s) = q_0^L(s) \chi_k^{(0)} I_k^{(2)L}(s) + V_0^L(s) \chi_k^{(4)} I_k^{(2)L}(s) +$$

$$+ a_0^L(s) \chi_k^{(5)} \left[ 1 - \phi_k^{(3)} I_k^{(5)L}(s) \right] - b_0^L(s) \chi_k^{(7)} \left( \lambda_k^3 / R \beta_0^4 \right) I_k^{(0)L}(s);$$

$$b_k^L(s) = - \left[ q_0^L(s) \chi_k^{(0)} + V_0^L(s) \chi_k^{(4)} \right] \left( \delta_1 \lambda_k + \delta_2 \lambda_k^3 \right) I_k^{(1)L}(s) +$$

$$+ a_0^L(s) \left( \chi_k^{(6)} \phi_k^{(3)} / \phi_k^{(4)} \right) I_k^{(4)L}(s) + b_0^L(s) \chi_k^{(7)} \left( 1 - \phi_k^{(2)} I_k^{(6)L}(s) \right). \quad (6)$$

$$\text{Here } I_k^{(1)L}(s) = \frac{1}{D_k(s)}; \quad I_k^{(\kappa)L}(s) = \frac{s^2 + \phi_k^{(\kappa)}}{D_k(s)} \quad (\kappa \neq 1);$$

$$D_k(s) = s^4 + s^2 \delta_k^{(7)} + \delta_k^{(8)}.$$

For approached calculation of  $a_0(t)$  and  $b_0(t)$  the solution (4') are substituted in transformed conditions (2). As a result we'll receive:

$$a_0^L(s) + \frac{1-\nu'}{2l(1+\nu')} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) \lambda_k J_1(\lambda_k l) + \frac{\zeta_p - \delta_6/R}{2(1+\nu')} V_0^L(s) = 0; \quad (7)$$

$$b_0^L(s) - \frac{1-\nu}{l(1+\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^L(s) J_1(\lambda_k l) - \frac{\delta_6}{1+\nu} V_0^L(s) = 0,$$

which in view of connections (6) between appearing in (3') coefficients keep three unknown functions – images  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$  and  $V_0(t)$ . The missing equation is formed by accepted condition on control. So the condition (3') will become

$$-a_0^L(s)l^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) = f^L(s); \quad (8')$$

and an integrated condition (3'')

$$-a_0^L(s) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^L(s) \left( 4J_1(\lambda_k l) / l^3 \lambda_k \right) = 0. \quad (8'')$$

On the basis of system (7) and the closing it equation (8') or (8'') it is simple to obtain algebraic equations for required functions in the field of images of a following format:

$$a_0^L(s) K_{1i}^L(s) + b_0^L(s) K_{2i}^L(s) + V_0^L(s) K_{3i}^L(s) = q_0^L(s) K_{4i}^L(s) + y_i^L(s) \quad (i = \overline{1,3}). \quad (9)$$

For its solution analytical transform in space of originals is carried out. As a result we'll obtain system of Volterra integral equations of the II-nd kind relative to functions  $a_0(t)$ ,  $b_0(t)$  and  $V_0(t)$ . This system was solved numerically. Thus for obtaining steady results against computing errors and an ill-posedness of the problem regularization Tikhonov algorithm was used. Further using expressions (4') deformed state of the shell is determined.

**Conclusion.** Numerical experiments show efficiency of the set mechanism of control of non-stationary vibration of considered bimorph shell. Increasing of this efficiency is possible not only due to a corresponding choice of geometrical parameters of the shell, but also due to sectioning current-carrying coverings of the electroelastic layer. By development of methods of control by vibration of the shell with the sectioned coverings the approaches stated in this work can be used.

## REFERENCES

1. **Babaev A. E.** Radiation of acoustic impulses with known law by electroelastic cylindrical shell / A. E. Babaev, V. G. Savin, Yu. V. Kozhemyaka // Theor. and appl. mech. – 2001. – Is. 33. – C. 186–191. (in Russian)
2. **Ditkin V. A.** Integral transforms and operational calculus / V. A. Ditkin, A. P. Prudnikov. – M.: Pergamon Press, 1965. – 529 p.

3. **Kirichok I. F.** Forced monoharmonic vibrations and self-heating of viscoelastic flexible circular plates with piezoelectric layers / I. F. Kirichok // Appl. mechanics. – 2013. – Vol. 49, Is. 6. – P. 715–725.
4. **Koval'chuk P. S.** Vibration control of non-closed spherical shell made of electroelastic material / P. S. Koval'chuk, I. V. Yanchevsky // Problems of comp. mechanics and strength of struct.: Col. of sci. art. – 2012. – Is. 18. – C. 79–90. (in Russian)
5. **Kubenko V. D.** Vibrations of a nonclosed two-layer spherical electroelastic shell under impulsive electromechanical loading / V.D. Kubenko, I.V. Yanchevskii // Appl. mechanics. – 2013. – Vol. 49, Is. 3. – P. 303–314.
6. **Podchasov N. P.** Non-stationary vibrations control for semipassive cylindrical shell with partially electroded piezolayer / N. P. Podchasov, I. V. Yanchevsky // Theor. and Appl. mech. – 2011. – Is. 3 (49). – P. 93–101. (in Russian).
7. **Savin V. G.** Non-stationary hydroelectroelasticity of spherical piezoelectric transducer / V. G. Savin, A. V. Zbrutskii, I. O. Morgun. – K. : NTUU «KPI», 2013. – 241 p. (in Russian)
8. **Yanchevsky I. V.** Minimizing of deflections of round electroelastic bimorph plate under impulsive loading / I. V. Yanchevsky // Problems of comp. mechanics and strength of struct.: Col. of sci. art. – 2011. – Is. 16. – P. 303–313. (in Russian).
9. **Yanyutin E. G.** Impulse influences on elastically deformed elements of constructions / E. G. Yanyutin, I. V. Yanchevsky. – Kharkiv: KhADI, 2001. – 184 p. (in Russian).
10. **Piquette J. C.** Approximate transducer transient suppression with increased output amplitude / J. C. Piquette // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – Vol. 128, Is. 5. – P. 2543–2548.
11. **Qiu J.** Research on applications of piezoelectric materials in smart structures / J. Qiu, H. Ji // Front. Mech. Eng. – 2011. – Vol. 6, Is. 1. – P. 99–117.
12. **Scandrett C.** Scattering and active acoustic control from a submerged spherical shell / C. Scandrett // J. Acoust. Soc. Am. – 2002. – Vol. 111, Is. 2. – P. 893–907.
13. **Thorat P. A.** Vibration Control by Piezoelectric Materials: review / P. A. Thorat, B. C. Londhe, T. B. Sonawane // Int. J. of Innovative Research in Adv. Eng. – 2014. – Vol. 1, Is. 4. – P. 206–210.

*Харківський національний  
автомобільно-дорожній університет,  
Харків, Україна*

*Надійшла до редколегії 20.07.2014*