

УДК 539.3

В. І. Пожуєв, д-р фіз.-мат. наук, Д. В. Грищак

КІНЕМАТИЧНИЙ СТАН КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ З ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ МАСОЮ ПРИ ДИНАМІЧНОМУ ЗОВНІШНЬОМУ ТИСКУ

Робота присвячена проблемі аналізу поведінки конічного обтічника літального апарату з зосередженою всередині масою при динамічному зовнішньому навантаженні на базі запропонованого наближеного аналітичного розв'язку у випадку, коли параметри системи є функціями часу.

Ключові слова: конічна оболонка, обтічник, зосереджена маса, динамічний тиск, наближений аналітичний розв'язок, комп'ютерна алгебра.

Вступ. Дослідження поведінки тонкостінних конструкцій із додатковими масами представляє як теоретичний інтерес з точки зору отримання наближених аналітичних розв'язків сингулярних диференціальних рівнянь та їх систем із змінними коефіцієнтами при заданих початкових умовах, так і практичний інтерес з точки зору оцінки амортизуючих властивостей конструкцій літального апарату (ЛА) при зовнішньому динамічному навантаженні.

Із узагальнюючих публікацій цього напрямку можливо відзначити, наприклад, дослідження, присвячені нестационарній взаємодії пластин і оболонок із суцільним середовищем [2], а також методи дослідження вільних хвиль і стаціонарного деформування оболонкових конструкцій для довільних за величиною швидкостей зовнішнього навантаження [3].

У даній роботі пропонується наближений аналітичний розв'язок задачі про поведінку носового відсіку ЛА, який представляє собою пружну конічну оболонку обертання, перетин малого діаметру якої зв'язаний із жорсткою носовою вставкою, а перетин більшого діаметру затиснений у жорстку основу. Всередині відсіку розташована зосереджена маса, яка зв'язана з оболонкою за допомогою пружин і демпферів (рис. 1). На конструкцію діє плоска ударна хвиля, яка поширюється із заданою постійною швидкістю вздовж вісі симетрії конструкції. Закон зміни тиску за фронтом ударної хвилі вважається заданим. Ставиться задача про визначення кінематичних параметрів носової частини оболонки і зосередженої маси для довільних моментів часу.

Постановка задачі. Основні залежності. Для моделювання носової частини корпусу ЛА в роботі [1] вибрані оболонки обертання змінної кривини серединної поверхні.

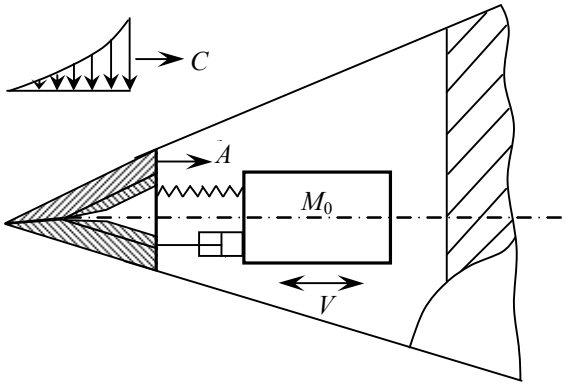


Рис. 1 – Пружна конічна оболонка носового обтічника в ідеальному стисливому середовищі

Рух конічної оболонки для вісесиметричного випадку з урахуванням основних геометричних залежностей

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = \alpha R / \operatorname{tg} \gamma, \quad k_\alpha = 0, \quad k_\beta = \operatorname{tg} \gamma / \alpha;$$

$$A = R, \quad B = R \alpha \cos \gamma, \quad R = (R_0 + R_n) / 2, \quad (1)$$

де α – координата вздовж твірної від вершини конуса; R_0 – радіус меншого перетину і R_n – радіус більшого перетину оболонки, описуються у вигляді:

$$\dot{V} = K_1 [(N_1 - \Theta Q) + (N_1 - N_2 - \Theta Q) / \alpha + p \Theta / K_0];$$

$$\ddot{W} = K_1 [(Q + \Theta N_1) + (Q - \Theta N_1 - N_2 \operatorname{tg} \gamma) / \alpha - p / K_0];$$

$$\ddot{\Phi} = K_1 [-M_1 - (M_1 - M_2) / \alpha - (M_2 \Theta \operatorname{tg} \gamma) / \alpha + 12 Q / K_0^2]; \quad (2)$$

$$p = (1 - \mu^2) p_0 / E, \quad K_1 = a^2 / c^2, \quad K_0 = h / R;$$

$$a = \sqrt{E / \rho (1 - \mu^2)}, \quad (3)$$

де a – швидкість розповсюдження поздовжніх збурень в оболонці;

$$(\dot{\cdot}) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \tau}, \quad \tau = \frac{ct}{R}.$$

Задача вирішується при нульових початкових умовах

$$V = W = \Phi = 0, \quad \dot{V} = \dot{W} = \dot{\Phi} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (4)$$

Відповідно до роботи [1] задача зводиться до інтегрування зв'язаної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що описують динаміку жорсткої носової частини і додаткової маси M_0 з парціальною власною частотою Ω і відносним коефіцієнтом демпфування δ , які у загальному випадку є функціями часу:

$$\begin{aligned} \ddot{A} &= \dot{K}_1 \left[K_2 P_0 q^B(\tau) + K_3 G_0 \right] - \omega^2(\tau) m(A - V) - \delta(\tau) m(\dot{A} - \dot{V}); \\ \ddot{V} &= \omega^2(\tau)(A - V) + \delta(\tau)(\dot{A} - \dot{V}), \end{aligned} \quad (5)$$

де $V(\tau)$ – безрозмірна координата додаткової маси, що представляє собою відношення її лінійного переміщення вздовж вісі оболонки до характерного розміру R

$$\begin{aligned} K_2 &= 6 \left(\frac{\rho}{\rho^B} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 \frac{ctg^3 \gamma}{\eta^2}; \\ K_3 &= 6 \left(\frac{\rho}{\rho^B} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right) R_0 ctg \gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\omega(\tau) = (\Omega(\tau)R)/c$; $\delta(\tau) = 2\delta_0\omega(\tau)$; $m = M_0/M$; M – маса жорсткої носової частини; $\Omega(\tau) = \sqrt{k(\tau)/M_0}$; $k(\tau)$ – жорсткість пружини.

Осьова сила G_0 реакції конічної оболонки на перетині $\alpha = \alpha_0$ віднесена до одиниці довжини кола перетину і надається виразом

$$G_0 = (N_1 - \Theta Q) \sin \gamma - (Q + \Theta N_1) \cos \gamma. \quad (7)$$

Система рівнянь (5) у роботі [1] вирішується чисельно при нульових початкових умовах

$$A = V = 0, \quad \dot{A} = \dot{V} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (8)$$

У даному дослідженні надається наближений аналітичний розв'язок системи рівнянь (7) на базі асимптотичного підходу, запропонованого у роботах [4 – 6].

Наближений аналітичний розв'язок задачі на базі асимптотичного підходу. Відповідним перетворенням основна система диференціальних рівнянь (8) зводиться до вигляду

$$\ddot{X}(\tau) + (m + 1)\delta(\tau)\dot{X}(\tau) + (m + 1)\omega^2(\tau)X(\tau) = \tilde{Q}(\tau), \quad (9)$$

де

$$X(\tau) = A(\tau) - V(\tau); \quad (10)$$

$$\tilde{Q}(\tau) = K_1 \left[K_2 P_0 q^b(\tau) + K_3 G_0 \right]; \quad (11)$$

$$m+1 = M_0/M + 1 = (M_0 + M)/M.$$

Диференціальне рівняння (9) може бути записано у формі

$$\varepsilon^2 \ddot{X}(\tau) + \delta(\tau) \dot{X}(\tau) + \omega^2(\tau) X(\tau) = Q(\tau), \quad (12)$$

де $\varepsilon^2 = M/(M_0 + M)$ – малий параметр;

$$Q(\tau) = \frac{\tilde{Q}(\tau)}{m+1} = \tilde{Q}(\tau) \varepsilon^2. \quad (13)$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння

$$\ddot{X}(\tau) + \frac{\delta(\tau)}{\varepsilon^2} \dot{X}(\tau) + \frac{\omega^2(\tau)}{\varepsilon^2} X(\tau) = 0 \quad (14)$$

шукається у вигляді

$$X(\tau) = U(\tau) \exp \int -\delta(\tau) / (2\varepsilon^2) d\tau, \quad (15)$$

що дозволяє звести рівняння (14) до вигляду

$$\varepsilon^2 \ddot{U}(\tau) + \left(\omega(\tau)^2 - \dot{\delta}(\tau)/2 - \delta(\tau)^2 / (4\varepsilon^2) \right) U(\tau) = 0. \quad (16)$$

У випадку, коли параметри $\omega(\tau)$ і $\delta(\tau)$ залежать від часу, рівняння (16) не інтегрується точно і в цьому випадку застосовується наближений аналітичний підхід із застосуванням комп'ютерної алгебри [4 – 6].

Відповідно до методу фазних інтегралів [5], розв'язок диференціального рівняння

$$\varepsilon^2 \ddot{U}(\tau) + \tilde{K}(\tau) U(\tau) = 0, \quad (17)$$

де $\tilde{K}(\tau) = \omega(\tau)^2 - \dot{\delta}(\tau)/2 - \delta(\tau)^2 / (4\varepsilon^2)$, шукається у формі

$$U(\tau) = \exp \int \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i-1} \varphi_i(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Після підстановки (18) у рівняння (17) і утримуючи лише перший член ряду, будемо мати розв'язок рівняння (17):

$$U(\tau) = C_1 \sin K(\tau) + C_2 \cos K(\tau), \quad (19)$$

де

$$K(\tau) = \int \varepsilon^{-1} \tilde{K}(\tau)^{1/2} d\tau. \quad (20)$$

З урахуванням (15), (19) і (20)

$$X(\tau) = [C_1 \sin K(\tau) + C_2 \cos K(\tau)] \exp \int -\delta(\tau)/2\varepsilon^2 d\tau. \quad (21)$$

У частинному випадку, коли $\omega = const$ і $\delta = const$, будемо мати

$$X(\tau) = [C_1 \sin \{\varepsilon^{-1} K_0 \tau\} + C_2 \cos \{\varepsilon^{-1} K_0 \tau\}] \exp[-\delta\tau/2\varepsilon^2], \quad (22)$$

де

$$K_0^2 = \omega^2 - \delta^2/4\varepsilon^2. \quad (23)$$

Розв'язок (22) запишемо у формі

$$X(\tau) = (C_1 \sin k\tau + C_2 \cos k\tau) \exp[-a\tau/2], \quad (24)$$

де $k = K_0/\varepsilon$, $a = \delta/\varepsilon^2$.

За методом варіації довільних сталих отримаємо загальний розв'язок рівняння (12) у вигляді

$$X(\tau) = \exp[-a\tau/2] \sin k\tau \{I_1(\tau)/k + d_1\} + \exp[-a\tau/2] \cos k\tau \{I_2(\tau)/k + d_2\}, \quad (25)$$

де

$$I_1(\tau) = \int \exp[a\tau/2] Q(\tau) \cos k\tau d\tau; \\ I_2(\tau) = \int \exp[a\tau/2] Q(\tau) \sin k\tau d\tau. \quad (26)$$

Враховуючи початкові умови (8), знаходяться довільні сталі у вигляді

$$X(0) = A(0) - V(0) = I_2(0)/k + d_2 = 0; \\ d_2 = -I_2(0)/k; \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}(0) = \dot{A}(0) - \dot{V}(0) &= (-a/2)(I_2(0)/k + d_2) + \\ &+ I_1(0)/k + d_1 + I_2'(0)/k = 0; \\ d_1 &= -I_1(0)/k. \end{aligned} \quad (28)$$

Для даних початкових умов будемо мати загальний розв'язок рівняння (9):

$$\begin{aligned} X(\tau) &= 1/k \cdot \exp[-a\tau/2] \{ \sin k\tau \cdot [I_1(\tau) - I_1(0) - I_2'(0)] + \\ &+ \cos k\tau \cdot [I_2(\tau) - I_2(0)] \}. \end{aligned} \quad (29)$$

З урахуванням позначень (13), (23), (24) розв'язок (29) набуває вигляду

$$\begin{aligned} X(\tau) &= \varepsilon/K_0 \cdot \exp[-(\delta\tau)/(2\varepsilon^2)] \{ \sin(K_0\tau/\varepsilon) \times \\ &\times [I_1(\tau) - I_1(0) - I_2'(0)] + \cos(K_0\tau/\varepsilon) [I_2(\tau) - I_2(0)] \}. \end{aligned} \quad (30)$$

Аналіз чисельних результатів. Тестові задачі. Для перевірки точності здобутих із застосуванням комп'ютерної алгебри аналітичних залежностей розглянемо, наприклад, випадок, коли

$$Q(\tau) = 1 + q_0\tau. \quad (31)$$

Розв'язок рівняння (21) у цьому випадку дається у вигляді

$$\begin{aligned} U(\tau) &= \sin \tau \left[\frac{\{ \cos \tau + \sin \tau(1 + \tau) \}}{\varepsilon^2 + d_1} \right] + \\ &+ \cos \tau \left[\frac{-\{ \sin \tau - \cos \tau(1 + \tau) \}}{\varepsilon^2 + d_2} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

З урахуванням початкових умов

$$U(0) = \dot{U}(0) = 0 \quad (33)$$

розв'язок (22) набуває вигляд:

$$\begin{aligned} U(\tau) &= \sin \tau \left\{ \frac{[\cos \tau + (1 + \tau)\sin \tau]}{\varepsilon^2 - 1/\varepsilon^2} \right\} + \\ &+ \cos \tau \left\{ \frac{-[\sin \tau - (1 + \tau)\cos \tau]}{\varepsilon^2 - 1/\varepsilon^2} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Результати чисельного аналізу за розв'язком (34) і прямого чисельного інтегрування із застосуванням програмного комплексу «Mathematica» за умови $\tilde{K}_0/\varepsilon = 1$ надані на рис. 2 – 5.

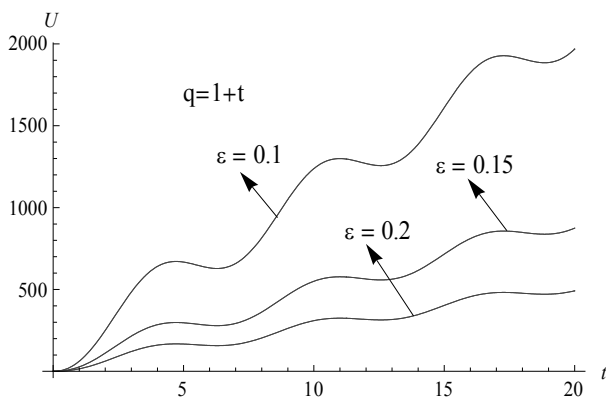


Рис. 2 – Залежність функції $U(\tau)$ від параметру ε і часу, $q(\tau) = (1 + \tau)$
(аналітичний і прямий чисельний розв'язки)

Аналогічні аналітичні розв'язки здобуто для законів зміни зовнішнього навантаження (рис. 4, 5)

$$q(\tau) = \exp[-n\tau] + n\tau - 1;$$

$$q(\tau) = [1 + (n(\tau_0) - 1) \exp n(\tau_0)] \times \exp(-n(\tau_0)), \quad \varepsilon = 0,1$$

і надано порівняння наближених аналітичних розв'язків та прямих чисельних розрахунків для різних законів зміни динамічного зовнішнього навантаження у часі (рис. 5).

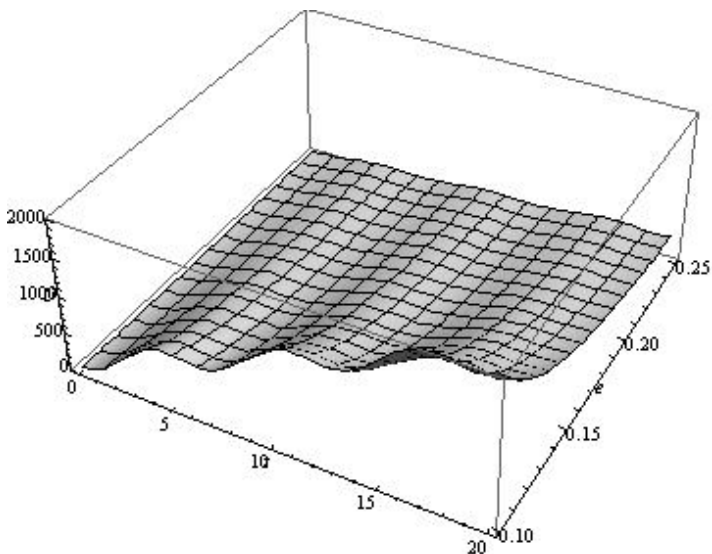


Рис. 3 – Залежність функції $U(\tau)$ від параметру ε і часу, $q(\tau) = (1 + \tau)$

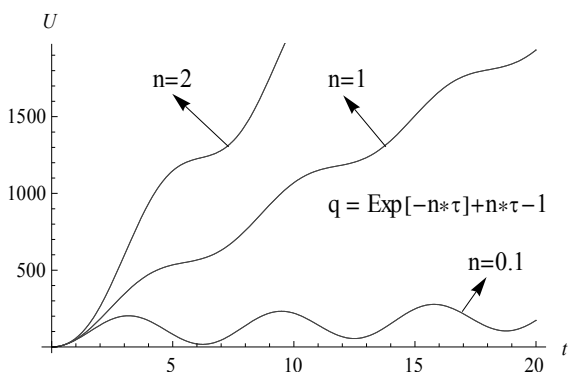


Рис. 4 – Залежність функції $U(\tau)$ від параметру ε і часу, (аналітичний і чисельний розв'язки)

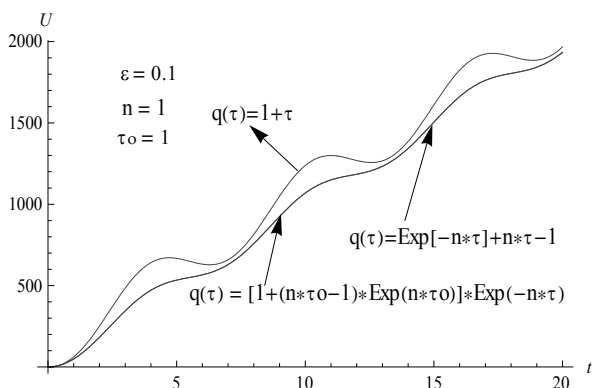


Рис. 5 – Порівняльний аналіз залежності функції $U(\tau)$ за різними законами зовнішнього тиску (аналітичний і чисельний розв'язки)

Із другого рівняння системи (7) з урахуванням (32) отримуємо функцію $V(\tau)$ і відповідно функцію $A(\tau)$ для заданих параметрів оболонки, зосередженої маси і зовнішнього навантаження.

Висновки. На базі асимптотичного підходу із застосуванням методу фазних інтегралів запропоновано наближений аналітичний розв'язок задачі про визначення кінематичних параметрів кінцевого обтічника ЛА з зосередженою масою у середині, парціальна частота Ω і відносний коефіцієнт демпфування δ якої є функціями часу при динамічному зовнішньому тиску.

В окремому випадку, коли параметри системи не залежать від часу, нульове наближення за методом фазних інтегралів відповідає точному розв'язку задачі. Запропоновані залежності можуть бути застосовані для дослідження кінематики та напружено-деформованого стану системи «оболонка-маса» із параметрами, залежними від часу, з урахуванням конкретного закону зміни зовнішнього навантаження у часі і початкових умов.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Бондарев М. Е.** Напряженно-деформированное состояние носового обтекателя ЛА при динамическом воздействии бокового внешнего давления / М. Е. Бондарев, В. С. Сафронов, И. К. Туркин // Труды 4-й Международной конференции «Авиация и космонавтика». [Электронный ресурс]: <http://www.mai.ru/coufi/aerospace/internetconf.22.10.2006>.
2. **Горшков А. Г.** Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами / А. Г. Горшков // Изв. АН. СССР. Механика твердого тела. – 1981. – №4. – С. 177 – 189.
3. **Горшков А. Г.** Стационарные задачи динамики многослойных конструкций / А. Г. Горшков, В. И. Пожуйев. – М.: Машиностроение, 1992. – 223 с.
4. **Грищак В. З.** Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування / В. З. Грищак. – Запоріжжя, 2009. – 225 с.
5. **Пожуйев В. И.** Приближенный аналитический метод анализа колебаний конструкций с массой, не периодически зависящей от времени / В. И. Пожуйев, Д. В. Грищак // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Д. – 2009. – Вип. 10. – С. 240 – 247.
6. **Gristchak D. V.** New Approximate Analytical Solution of Buckling Problem for Rectangular Plate under Non uniform External Loading / D. V. Gristchak // Proc. XII Symposium Stability of Structures. / Zakopane, Poland, – 2009. – P. 133 – 238.

*Запорізька державна інженерна академія,
Запоріжжя, Україна*

Надійшла до редколегії 18.03.2011

В. И. Пожуйев, д-р физ.-мат. наук, Д. В. Грищак

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Работа посвящена проблеме анализа поведения конического обтекателя летательного аппарата с сосредоточенной в середине массой при динамическом внешнем нагружении на базе предложенного приближенного аналитического решения в общем случае, когда параметры системы являются функциями времени.

Ключевые слова: коническая оболочка, обтекатель, сосредоточенная масса, динамическое давление, приближенное аналитическое решение, компьютерная алгебра.

V. I. Pozhuyev, Professor, D. V. Gristchak

KINEMATIC STATE OF CONICAL SHELL OF THE FLYING APARATUS WITH CONCENTRATED MASS UNDER DYNAMIC EXTERNAL LOADING

This paper deals with the behavior analysis of the conical shell with concentrated inside mass under dynamic external pressure on the basis of proposed approximate analytical solution in general case when parameters of system are function of time.

Keywords: conical shell, concentrated mass, dynamic pressure, approximate analytical solution, computer algebra.