

УДК 539.3:534.1:62

Н. В. Сметанкина, канд. техн. наук, В. А. Сметанкин, канд. техн. наук

МИНИМИЗАЦИЯ МАССЫ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Решена задача минимизации массы слоистых ортогонально армированных пластин при импульсном нагружении. Исследовано влияние параметров нагружения на оптимальный проект двухслойной пластины. Построена область допустимых значений варьируемых параметров при различных значениях интенсивности нагрузки.

Ключевые слова: слоистая пластина, композитная конструкция, импульсное нагружение, минимизация массы, гибридный поисковый метод.

Введение. Слоистые композитные конструкции широко используются в различных областях техники, так как они сочетают высокую прочность, жесткость и малый удельный вес. Напряженно-деформированное состояние слоистых композитных конструкций существенно зависит от направлений армирования, порядка укладки и толщин слоев, условий нагружения. Поэтому задача оптимального проектирования этих конструкций является многокритериальной, близкой к реальной проектной ситуации, когда необходимо удовлетворить нескольким противоречивым показателям качества одновременно.

Анализ публикаций [2, 7, 10 – 14, 17] позволяет сделать вывод, что чаще всего рассматриваются задачи оптимизации конструкций в условиях статического нагружения или свободных колебаний. Вопросы оптимального проектирования слоистых композитных пластин и оболочек при воздействии высокоскоростных интенсивных нагружений освещены в литературе недостаточно [1, 3, 15]. Это связано с математическими трудностями, возникающими при расчете нестационарных колебаний конструкций, а также с тем, что при решении задачи оптимизации необходимо оценивать влияние параметров проектирования конструкции на некотором временном интервале ее функционирования, когда заранее неизвестны моменты времени, в которые достигаются экстремальные значения перемещений или напряжений. Таким образом, остается актуальным создание эффективных методов расчета параметров динамического отклика слоистых конструкций, а также методов решения задач их оптимизации, позволяющих повысить точность решения при наименьших вычислительных затратах.

Целью настоящей работы является разработка методики минимизации массы слоистых ортогонально армированных пластин при импульсном нагружении.

Постановка и решение задачи. Задача оптимального проектирования формулируется в терминах нелинейного программирования. Варьируемыми параметрами задачи минимизации массы являются толщины слоев $X = \{h_i\}$, $i = \overline{1, I}$ (I – количество слоев). Ограничиваются минимальное значение толщины каждого слоя h_i^- и максимальное значение толщины пакета

H^+ . Для оценки прочности слоев используется критерий Хоффмана [4]. Компоненты напряжений в главных осях материала $\sigma_1^i, \sigma_2^i, \tau_{12}^i, \tau_{13}^i, \tau_{23}^i$ ($i = \overline{1, I}$), входящие в критерий прочности, оцениваются на некотором отрезке времени $[0, T]$. Отрезок выбирается так, чтобы на его протяжении проявились все основные факторы, характеризующие процесс нестационарного деформирования. Выбор критерия Хоффмана обусловлен тем, что наиболее часто применяемые критерии максимальных напряжений или деформаций не учитывают взаимодействия компонентов напряжения или деформации, а также тем, что выбранный критерий обобщает критерий Хилла на случай различной прочности материала при растяжении и сжатии.

Таким образом, необходимо отыскать значения независимых параметров $X^* = \{h_i^*\}$, при которых масса слоистой пластины $F_M(X)$ принимает минимальное значение, то есть

$$F_M^* = \min F_M(X), \quad F_M = S \sum_{i=1}^I \rho_i h_i;$$

$$h_i - h_i^- \geq 0, \quad i = \overline{1, I}; \quad (1)$$

$$H^+ - \sum_{i=1}^I h_i \geq 0; \quad (2)$$

$$\max_{[0, T]} \max_{x, y \in \Omega} \left[C_1^i (\sigma_2^i)^2 + C_2^i (\sigma_1^i)^2 + C_3^i (\sigma_1^i - \sigma_2^i)^2 + C_4^i \sigma_1^i + C_5^i \sigma_2^i + \right. \\ \left. + C_6^i (\tau_{23}^i)^2 + C_7^i (\tau_{13}^i)^2 + C_8^i (\tau_{12}^i)^2 \right] \leq 1, \quad (3)$$

где S – площадь пластины; ρ_i – плотность материала i -го слоя;

$$C_1^i = 0,5 \left(-1 / (X_T^i X_C^i) + 1 / (Y_T^i Y_C^i) \right), \quad C_2^i = 0,5 \left(1 / (X_T^i X_C^i) - 1 / (Y_T^i Y_C^i) \right); \\ C_3^i = 0,5 \left(1 / (X_T^i X_C^i) + 1 / (Y_T^i Y_C^i) \right), \quad C_4^i = 1 / X_T^i - 1 / X_C^i, \quad C_5^i = 1 / Y_T^i - 1 / Y_C^i; \\ C_6^i = 1 / (R^i)^2, \quad C_7^i = C_8^i = 1 / (S^i)^2, \quad i = \overline{1, I}.$$

Здесь X_T^i, Y_T^i – пределы прочности материала i -го слоя на растяжение, X_C^i, Y_C^i – на сжатие, R^i, S^i – на сдвиг.

Для решения задачи оптимального проектирования используется гибридный поисковый метод оптимизации с адаптивным управлением вычислительным процессом. В основе указанного метода лежит идея гибридизации, состоящая в том, что на заданном наборе поисковых методов, каждый из

которых эффективно решает свой узкий класс задач, организуется метод, который при изменении ситуации, благодаря адаптивному управлению, однозначно вводит в процесс поиска один или несколько методов из принятого набора. Таким образом, гибридный метод может эффективно решать более широкий класс задач, чем каждый из этих методов. Применение гибридного метода оказывается целесообразным в тех случаях, когда ограничения или функция цели заданы алгоритмически и заранее неизвестно расположение границ и линий уровня, а также когда ограничения или функция цели представляют собой трудновычислимые функции, поскольку гибридный метод обеспечивает минимальное количество проверок выполнения ограничений. Подробное описание метода дано в работах [8, 9].

Динамическое поведение пластины рассматривается в рамках теории, учитывающей в пределах каждого слоя деформации поперечного сдвига и инерции вращения нормального элемента [5, 6]. Для пакета слоев в целом выполняется гипотеза ломаной линии. Также предполагается несжимаемость материала слоев в поперечном направлении. Перемещения согласно принятым гипотезам представляются в виде

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_x^i, \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_y^i, \quad w^i = w;$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i, \quad i = \overline{1, I},$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ – перемещения точки координатной плоскости в направлении координатных осей; $\psi_x^i = \psi_x^i(x, y, t)$, $\psi_y^i = \psi_y^i(x, y, t)$ – углы поворота нормального элемента в слое вокруг осей абсцисс и ординат; t – время.

Напряжения и деформации в слоях связаны законом Гука для ортогонально армированного тела [4]. Граничные условия и уравнения движения пластины под действием импульсной нагрузки получены с помощью вариационного принципа Остроградского – Гамильтона [5].

Для прямоугольных шарнирно опертых пластин метод решения задачи об их нестационарных колебаниях состоит в следующем. Функции перемещений и нагрузок разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания. В результате преобразований система уравнений движения сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая интегрируется методом разложения решения в ряд Тейлора [9, 18].

Анализ результатов численных исследований. Рассмотрим задачу о минимизации массы квадратной шарнирно опертой двухслойной пластины.

Слои пластины выполнены из эпоксидного углепластика со следующими упругими и предельными характеристиками [16]: $E_2^i = 21 \text{ ГПа}$, $E_1^i = 25E_2^i$ (модули упругости); $G_{12}^i = G_{13}^i = G_{23}^i = 0,5E_2^i$ (модули сдвига); $\nu_1^i = 0,25$ (коэффициент Пуассона); $X_T^i = 1515 \text{ МПа}$, $X_C^i = 1697 \text{ МПа}$, $Y_T^i = Y_C^i = 43,8 \text{ МПа}$, $R^i = 67,6 \text{ МПа}$, $S^i = 86,9 \text{ МПа}$; $i = 1,2$. Плотность материала $\rho_i = 800 \text{ кг/м}^3$; $i = 1,2$; углы армирования слоев $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$. Длина стороны пластины равна $0,25 \text{ м}$, минимальная толщина слоя $h_i^- = 0,5 \text{ мм}$, максимальная толщина пакета $H^+ = 3,5 \text{ мм}$. Пластина находится под действием поперечной импульсной нагрузки $P = P_0 H(t)$, равномерно распределенной по всей области пластины ($H(t)$ – функция Хевисайда, $P_0 = 0,1 \text{ МПа}$). Длительность характерного отрезка времени выбрана равной $2,5 \text{ мс}$. Толщины слоев до оптимизации $h_i^0 = 25 \text{ мм}$, значение функции цели в стартовой точке составляет $F_M^0 = 2,5 \text{ кг}$. В результате минимизации массы найдено две экстремальных точки – a и b , что является следствием невыпуклости границы области допустимых значений (ОДЗ), определяемой требованиями к прочности слоев (3).

В точке a варьируемые параметры и функция цели принимают значения $h_1^* = 0,5 \text{ мм}$, $h_2^* = 1,81 \text{ мм}$, $F_M^* = 0,115 \text{ кг}$, в точке b – $h_1^* = 2,5 \text{ мм}$, $h_2^* = 0,5 \text{ мм}$, $F_M^* = 0,15 \text{ кг}$. Лучшему проекту отвечают параметры в точке a .

Исследовано влияние интенсивности нагрузки P_0 на оптимальный проект при ее изменении в пределах $0,025 \text{ МПа} \leq P_0 \leq 0,25 \text{ МПа}$. При любом фиксированном значении интенсивности нагрузки найдено также две экстремальных точки. На рис. 1 приведена зависимость величин h_1^* , h_2^* и F_M^* от значения интенсивности нагрузки P_0 в точках экстремума. Лучший проект определяется графическими зависимостями в точке a при любом значении P_0 .

На рис. 2 построена ОДЗ варьируемых параметров при различных значениях интенсивности нагрузки P_0 . Прямые 1 и 2 отвечают ограничениям (1). Кривые 3 и 4 являются геометрическими образами ограничений (3), налагаемых на напряжения в первом и втором (штриховая линия) слоях. Прямая 5 соответствует ограничению (2). ОДЗ варьируемых параметров G заштрихована. Искомым оптимальным проектам отвечают значения параметров в точках a и b на границе области.

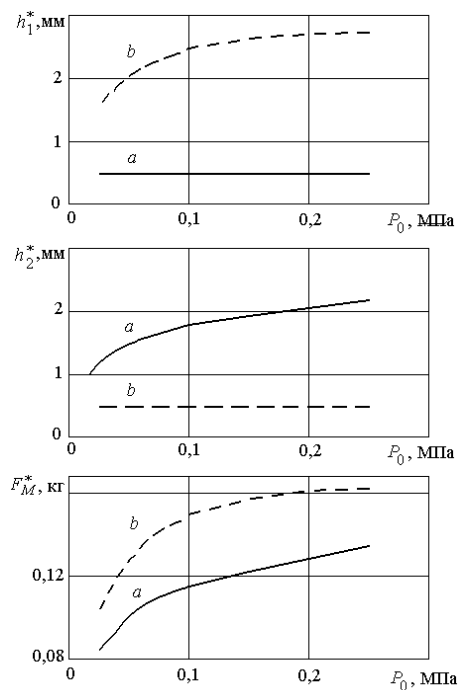


Рис. 1 – Зависимость оптимальных параметров от интенсивности нагрузки

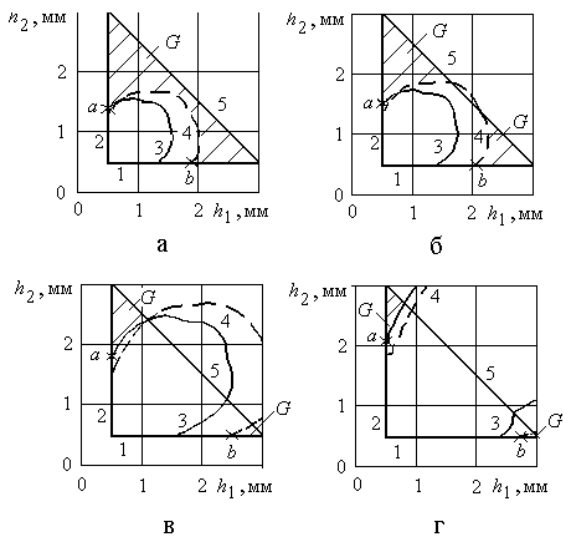


Рис. 2 – Область допустимых значений варьируемых параметров:
 а – $P_0 = 0,04$ МПа, б – $P_0 = 0,05$ МПа, в – $P_0 = 0,1$ МПа, г – $P_0 = 0,2$ МПа

При увеличении интенсивности нагрузки допустимая область будет включать только точку a , а при дальнейшем увеличении интенсивности нагрузки задача становится некорректной, поскольку с ограничением на толщину пластины невозможно обеспечить допустимый уровень напряжений в слоях.

Выводы. Таким образом, разработана методика оптимального проектирования слоистых ортогонально армированных пластин минимальной массы при импульсном нагружении, учитывающая геометрические и прочностные ограничения, исследовано влияние параметров нагружения на оптимальный проект. На практике характеристики материалов слоев в слоистых конструкциях ограничены наборами стандартных значений. Однако результаты решения оптимизационных задач позволяют оценить резервы реальных конструкций и то, как близко они находятся к оптимальным конструкциям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Абросимов Н. А.** Оптимальное проектирование многослойных композитных оболочек вращения нерегулярной структуры при импульсных и ударных воздействиях / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов, В. П. Столов // Механика композитных материалов. – 1980. – № 6. – С. 1087 – 1093.
2. **Гусев Е. Л.** Математические методы синтеза слоистых структур / Е. Л. Гусев. – Новосибирск: ВО «Наука», 1993. – 262 с.
3. **Каниболотский М. А.** Оптимальное проектирование слоистых конструкций / М. А. Каниболотский, Ю. С. Уржумцев. – Новосибирск: Наука, 1989. – 176 с.
4. Композиционные материалы: в 8-ми т. – Т. 7. Анализ и проектирование конструкций. Ч. 1./ Под. ред. К. Чамиса.– М.: Машиностроение, 1978. – 300 с.
5. **Сметанкина Н. В.** Исследование динамического отклика многослойных композитных пластин сложной формы в плане / Н. В. Сметанкина // Вестн. НТУ «ХПИ». Серия «Динамика и прочность машин». – 2004. – № 20. – С. 91 – 98.
6. **Сметанкіна Н. В.** Нестационарні коливання багатощарових ортотропних оболонок неканонічної форми / Н. В. Сметанкіна // Вібрації в техніці та технологіяx. – 2009. – № 3 (55). – С. 38 – 41.
7. **Чедрик В. В.** Практические методы оптимального проектирования конструкций из слоистых композиционных материалов / В. В. Чедрик // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, № 5. – С. 184 – 198.
8. **Шелудько Г. А.** Прикладний адаптивний пошук / Г. А. Шелудько, О. М. Шупіков, Н. В. Сметанкіна, С. В. Угримов. – Харків: Око, 2001. – 192 с.
9. **Шупіков А. Н.** Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / А. Н. Шупіков, Я. П. Бузько, Н. В. Сметанкіна, С. В. Угримов. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с.
10. **Farshi B.** Optimum design of composite laminates for frequency constraints/ B. Farshi, R. Rabiei // Composite Structures.– 2007.– V. 81, N 4.– P. 587–597.
11. **Franco Correia V. M.** Modeling and design of adaptive composite structures / V. M. Franco Correia, M. A. Gomes, A. Suleman, C. M. Mota Soares, C. A. Mota Soares // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.– 2000. – Vol. 185, N. 2 – 4. – P. 325 –346.
12. **Kolkapov A. G.** Design of a laminated plate possessing the required stiffnesses using the minimum number of materials and layers / A. G. Kolkapov // J. Elasticity.– 2007.– V. 86, N 3. – P. 245 – 261.
13. **Olhoff N.** On optimum design of structures and materials / N. Olhoff // Meccanica.– 1996. – Vol. 31, N. 2. – P. 143 – 161.
14. **Kalamkarov A. G.** Analysis, design and optimization of composite structures / A. L. Kalamkarov, A. G. Kolkapov. – Chichester: John Wiley&Sons, 1997.– 478 p.
15. **Pathak K. K.** Dynamic response of composite laminated plates using artificial neural networks / K.K. Pathak, V. Arora // IE(I) Journal-AS. – 2004. – Vol. 85, N. 5. – P. 25 – 28.

16. **Reddy J. N.** Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates / J. N. Reddy // Int. J. Num. Meth. Engng. – 1983. – Vol. 19. – P. 237 – 255.

17. **Saitou K.** A survey of structural optimization in mechanical product development / K. Saitou, K. Izui, Sh. Nishiwaki, P. Papalambros // Trans. ASME. J. Computing and Information Science in Engineering. – 2005. – Vol. 5, N 3. – P. 214 – 226.

18. **Smetankina N. V.** A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment / N. V. Smetankina, A. N. Shupikov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko // Trans. ASME. J. Appl. Mechanics. – 2008. – Vol. 75, N 5. – P. 051004-1–051004-9.

*Институт проблем машиностроения
им. А.Н. Подгорного НАН Украины,
Харьков, Украина*

Поступила в редколлегию 10.03.2011

Н. В. Сметанкіна, канд. техн. наук, В. О. Сметанкін, канд. техн. наук

МІНІМІЗАЦІЯ МАСИ ШАРУВАТИХ КОМПЗИТНИХ ПЛАСТИН ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розв'язано задачу мінімізації маси шаруватих ортогонально армованих пластин при імпульсному навантаженні. Досліджено вплив параметрів навантаження на оптимальний проект двошарової пластини. Побудовано область допустимих значень змінних параметрів при різних значеннях інтенсивності навантаження.

Ключові слова: шарувата пластинка, композитна конструкція, імпульсне навантаження, мінімізація маси, гібридний пошуковий метод.

N. V. Smetankina, Associate Professor, V. A. Smetankin, Associate Professor

MINIMIZATION OF THE MASS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES AT IMPULSE LOADING

The problem of minimization of the mass of laminated cross-ply plates at an impulse loading is solved. Influence of loading parameters on the optimum design of a two-layer plate is investigated. The admissible domain of design variables is constructed at different values of the load intensity.

Keywords: laminated plate, composite structure, impulse loading, mass minimization, hybrid search method.