ISSN 2079–1836
2011, вип. 15

УДК 534.632

В. А. Андрущенко, Д. Ю. Либов, В. В. Мелешко, д-р физ.-мат. наук,
В. Н. Никитенко, О. Д. Смоктий, В. И. Сторожев, д-р техн. наук

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Данная работа посвящена экспериментальному и теоретическому исследованию спектра резонансных частот пьезокерамических цилиндров и толстого диска. Два теоретических подхода – метод суперпозиции и метод однородных решений, развиты авторами для расчета собственных частот. Резонансные частоты, найденные этими методами, надежно согласуются с экспериментальными данными.

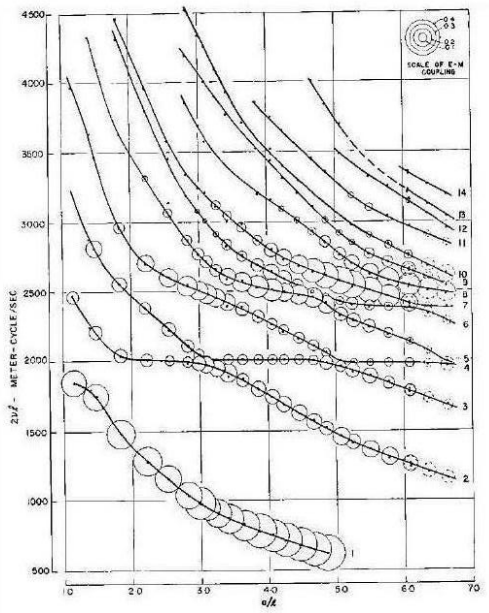
Ключевые слова: *пьезокерамический цилиндр, метод суперпозиции, метод однородных решений, коэффициент Пуассона.*

Введение. Проблема исследования закономерностей спектра собственных частот и форм колебаний пьезоэлектрических резонаторов в виде цилиндров конечной длины имеет давнюю историю, ранний период которой отражен в фундаментальных монографиях [2, 6]. В ставшей ныне классической статье [16] детально исследовался спектр и формы колебаний цилиндров из поляризованной по толщине пьезокерамики титаната бария $BaTiO_3$ с отношением диаметра к толщине в диапазоне от 1 до 7. Экспериментально полученный резонансный спектр для $BaTiO_3$ [16] и найденный теоретически [7] для изотропного цилиндра представлены на рис. 1. Полученные результаты показывают сложную структуру спектра, особенно в области частоты толщинного резонанса бесконечного слоя. Это обстоятельство было также отмечено в [6, с. 292]: *"… упругие условия настолько сложны, что можно наблюдать много резонансных частот, причем все они расположены в узкой полосе частот по соседству с идеальной частотой колебания по толщине"*. Особенно интересным было открытие краевого резонанса [16], для которого собственная частота остается практически одинаковой при значительном изменении диаметра диска и постоянной его толщине.

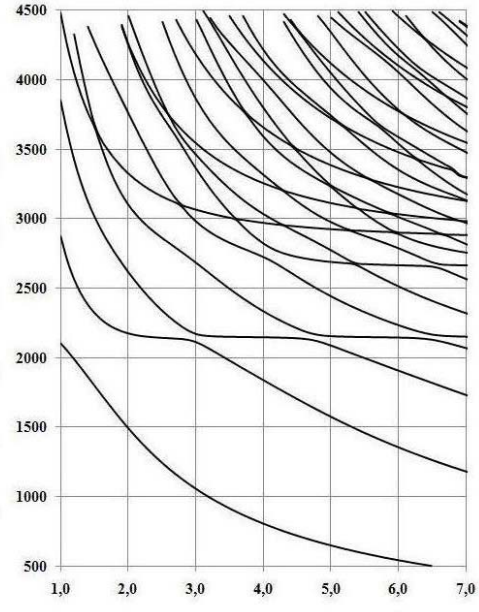
Применение пьезокерамических цилиндров и дисков, работающих в диапазоне частот от десятков $кГц$ до нескольких $МГц$ в различных системах ультразвуковых линий задержки [11], фильтров [5] и резонаторов [9] для конгломерации мелких частиц, двигающихся в жидкости [13], стимулировало значительный интерес к исследованию таких колебательных систем.

К настоящему времени накоплен значительный теоретический [3, 4] и экспериментальный материал [12, 14 – 16], весьма полно характеризующий поведение высокочастотных мод колебаний цилиндров и толстых пьезодисков.

© В. А. Андрущенко, Д. Ю. Либов, В. В. Мелешко,
В. Н. Никитенко, О. Д. Смоктий, В. И. Сторожев, 2011



а)



б)

По оси абсцисс отложено безразмерное отношение радиуса к полутолщине диска; по оси ординат – произведение собственной частоты на толщину (в *м/с*). Кружочки с центрами на резонансных кривых имеют диаметр, пропорциональный измеренным коэффициентам электромеханической связи данной моды колебаний. [Reprinted with permission from E. A. G. Shaw, "On the resonant vibrations of thick barium titanate disks," *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, Issue 1, 38–50 (January 1956). Copyright © 1956 American Institute of Physics.]

Рис. 1 – **Спектр собственных частот: а) для толстых дисков из титаната бария [16]; б) для изотропных дисков [7] (коэффициент Пуассона $\nu = 0.31$)**

Однако несколько важных вопросов по-прежнему остаются без надлежащего анализа. Среди них находится интересный и практически важный вопрос о возможности с допустимой инженерной точностью (погрешность в пределах 5 %) анализировать моды колебаний, поляризованных по толщине трансверсально-изотропных пьезокерамических (материалы $BaTiO_3$ и ЦТС-19) “кубообразных” цилиндров со сплошными электродами на плоских поверхностях путем рассмотрения задачи о вынужденных колебаниях конечного изотропного цилиндра с некоторыми приведенными характеристиками. Получение положительного ответа на этот вопрос путем сопоставления экспериментальных и расчетных данных составляет цель предлагаемой статьи.

Постановка задачи. Рассматриваются гармонические осесимметрические колебания, с круговой частотой ω, конечного цилиндра толщины $2H$ и диметра $2a$. Область, занимаемая цилиндром, описывается в цилиндрической системе координат (r,θ,z): $0 \le r \le a,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ -H \le z \le H$. Осесимметрические уравнения движения цилиндра задаются соотношениями (временной множитель $e^{i\omega t}$ здесь и далее опущен)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 u_r = 0; \\ &\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho\omega^2 u_z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где уравнение (1) описывает второй закон Ньютона применительно к элементу сплошной среды; $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ – компоненты тензора напряжений; u_r, u_z – компоненты вектора перемещений, ρ – плотность материала.

К соотношениям (1) следует добавить закон, связывающий напряжения с деформациями для трансверсально-изотропного материала

$$\begin{aligned} &\sigma_r = c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12}\frac{u_r}{r} + c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \sigma_\theta = c_{12}\frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11}\frac{u_r}{r} + c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &\sigma_z = c_{13}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right) + c_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z}; \qquad \tau_{rz} = c_{44}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ – модули упругости.

В случае изотропного материала (2) переходит в закон Гука при

$$c_{11} = c_{33} = 2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}, \quad c_{12} = c_{13} = 2G\frac{\nu}{1-2\nu}, \quad c_{44} = G, \tag{3}$$

где ν – коэффициент Пуассона; G – модуля сдвига.

Отметим, что мы не рассматриваем полных уравнений состояния для пьезокерамики, а учитываем лишь ее трансверсально-изотропные свойства.

Подставляя соотношения (2) в уравнения (1) получаем осесимметрические уравнения движения частиц цилиндра с перемещениями u_r и u_z

$$c_{11}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+\frac{c_{11}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}-c_{11}\frac{u_r}{r^2}+\rho\omega^2 u_r=0;$$
$$c_{44}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\left(c_{13}+c_{44}\right)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z}+\frac{c_{13}+c_{44}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}+c_{44}\frac{u_z}{r}+\rho\omega^2 u_z=0. \quad (4)$$

В частном случае изотропного тела получаем осесиметрические уравнения движения Ламе (4) с упругими постоянными (3).

Поверхность цилиндра находится под гармонической во времени нагрузкой

$$\sigma_r(a,z)=f(z);\quad \tau_{rz}(a,z)=0,\ -H\le z\le H;$$
$$\sigma_z(r,\pm H)=g(r);\quad \tau_{rz}(r,\pm H)=0,\quad 0\le r\le a. \quad (5)$$

Функция $f(-z)=f(z)$ есть парной по координате z, что соответствует симметрическим колебаниям цилиндра относительно плоскости $z=0$. Учет пьезокерамических свойств при возбуждении колебаний цилиндров со сплошными электродами на их плоских поверхностях проводился с помощью выбора силовой нагрузки (5).

Цель рассмотрения задач на вынужденные колебания (4) и (5) состоит в нахождении резонансных частот ω, при которых все величины напряженного состояния неограниченно возрастают, иными словами выполняется поиск интервалов, содержащих резонансную частоту ω, внутри которых все характеристики полей меняют знаки.

Экспериментальное исследование. Эксперимент заключался в измерении амплитудно-частотных характеристик пьезокерамических цилиндров из материалов ЦТС-19 и $BaTiO_3$ с поляризацией по толщине, на плоских поверхностях которых были нанесены посеребренные электроды, как показано на рис. 2.

Физические характеристики исследуемых образцов в табл. 1, необходимые в теоретическом расчете: s_{11}, s_{12} – упругие податливости, c_{33} – модуль упругости, V_1 – скорость волны расширения, $\nu=-s_{11}/s_{12}$ – коэффициент Пуассона, взяты из справочного пособия [8].

Резонансные частоты исследовались на экспериментальном стенде (рис. 3), который состоял из: частотного характериографа (тип Х1-46), усилителя мощности (У7-8), частотомера (Ч3-57), милливольтметра (В3-37), генератора частот (Г3-117) и двухкоординатного самописца (Н-307). Блок-схема электрической части экспериментальной установки и схема подключения пьезоцилиндров детально описана в [1].

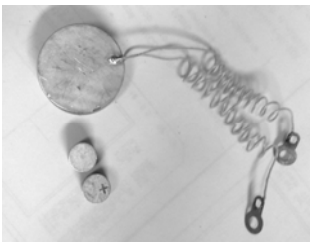


Рис. 2 – **Экспериментальные образцы**

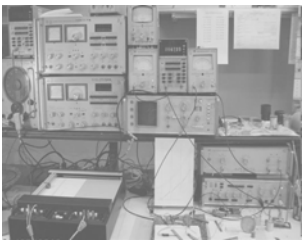


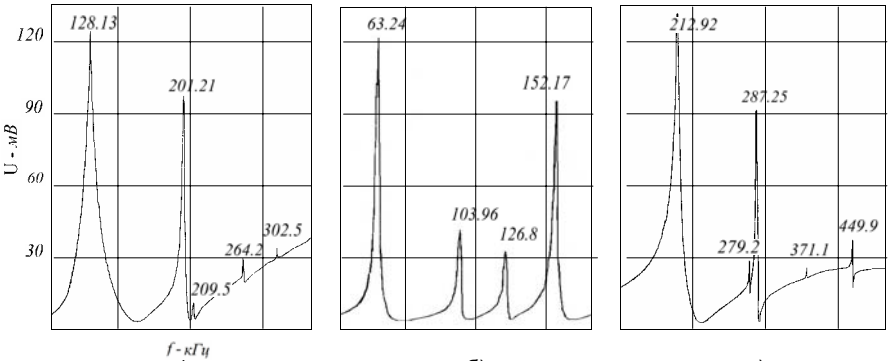
Рис. 3 – **Экспериментальный стенд**

С целью исключения диссипативного разогрева цилиндров, возникающего при интенсивных циклических колебаниях, уровень возбуждения выбирался не более 0,13 B, чтобы значение тока было не больше 13 $мА$. Амплитудно-частотные характеристики от 10 $кГц$ до 500 $кГц$ для пьезокерамических цилиндров изображены на рис. 4. Осью абсцисс является частота f в $кГц$, а по оси ординат отложена величина напряжения U в $мВ$.

Таблица 1 – **Свойства образцов из пьезоэлектрических керамик ЦТС-19 и $BaTiO_3$**

Тип керамики	Диаметр × высота, $мм$	s_{11}, $10^{-12} м^2/н$	s_{12} $10^{-12} м^2/н$	c_{33} $10^{10} н/м^2$	ρ, $10^3 кг/м^3$	V_1, $м/с$	ν
ЦТС – 19	10.0 × 10.0	15.2	–5.8	12.3	7.74	3869.9	0.38
	30.0 × 13.3						
$BaTiO_3$	10.0 × 10.0	9.1	–2.7	17.1	5.7	5477.2	0.3

Теоретические методы определения резонансных частот. В настоящее время сформировались два аналитических подхода к построению точных решений задач про гармонические колебания конечных цилиндров – метод однородных решений и метод суперпозиции, поскольку применение вариационных методов связано с большим объемом вычислений, требующих существенных затрат ресурса памяти и процессора даже на современных компьютерах [12].



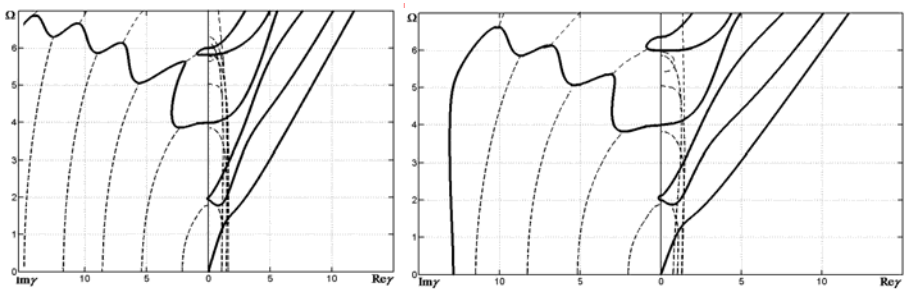
а) б) в)

Рис. 4 – **Амплитудно-частотные характеристики пьезокерамических цилиндров: а) ЦТС-19 – 10.0 × 10.0 $мм$, б) ЦТС-19 – 30.0 × 13.3 $мм$, в) $BaTiO_3$ – 10.0 × 10.0 $мм$**

Оба аналитических метода существенно опираются на использование свойств нормальных мод в бесконечном слое (рис. 5). В представленной работе метод суперпозиции был применен для описания собственных частот осесимметрических колебаний конечных изотропных цилиндров. Резонансные частоты в методе суперпозиции определялись как частоты, при которых граничная задача (3) – (5) не имела конечного решения [7].

В задаче про осесимметрические гармонические колебания трансверсально-изотропного цилиндра (4) с заданной нагрузкой на поверхности (5) использовался метод однородных решений. Решение краевой задачи по-

строено в виде суммы по нормальным волнам, которые распространяются в бесконечном слое. Определение резонансных частот осуществлялось на основе анализа частотно-фазовых характеристик динамического напряженного состояния конечного цилиндра [10].



а) б)

Рис. 5 **– Дисперсионные спектры симметричных нормальных волн в слое для а) $BaTiO_3$ и б) ЦТС-19**

Результаты измерений и расчетов. Резонансные частоты (все даны в $кГц$) f_{MS} для изотропного цилиндра, найденные по методу суперпозиции, f_{MHS} для трансверсально-изотропного цилиндра, найденные по методу однородных решений, и экспериментально определенные частоты f_{EX} представлены в табл. 2.

Таблица 2 – **Сопоставление теоретических f_{MS} , f_{MHS} и экспериментальных частот f_{EX} для пьезокерамических цилиндров**

ЦТС – 19 (10.0 × 10.0) *мм*	f_{MS}	134.13	187.29	252.05	285.09
	f_{MHS}	126.78	-	-	-
	f_{EX}	128.13	201.21	264.2	302.50
ЦТС – 19 (30.0 × 13.3) *мм*	f_{MS}	66.37	107.11	120.28	149.25
	f_{MHS}	67.50	102.65	126.56	-
	f_{EX}	63.24	103.96	126.83	152.17
$BaTiO_3$ (10.0 × 10.0) *мм*	f_{MS}	214.37	291.04	375.50	455.97
	f_{MHS}	206.67	279.20	-	-
	f_{EX}	212.87	287.25	371.10	449.90

Резонансные частоты, найденные по методу суперпозиции и по методу однородных решений, удовлетворяют требуемой точности (относительная погрешность составляла не более 5 %). Следует отметить, что частоты f_{EX} =209.5 $кГц$ и f_{EX} =279.2 $кГц$ для “кубообразных” цилиндров из ЦТС-19 и $BaTiO_3$ соответственно требуют дальнейшего детального исследования форм колебаний с помощью спекл интерферометрии [12, 16], т. к. не могут быть предсказаны в рамках рассматриваемых задач.

Выводы. Проведено сравнение экспериментально полученных данных по колебаниям цилиндров из $BaTiO_3$ и ЦТС-19 с теоретическими результатами. Сопоставление резонансных частот осуществлялось на основании решений задач про установившиеся колебания трансверсально-изотропного цилиндра методом однородных решений и про стационарные колебания изотропного конечного цилиндра методом суперпозиции. Хотя исследованные цилиндры из пьезоэлектрической керамики представляют трансверсально-изотропный материал, тем не менее, использованные здесь допущения не привели к серьезным отличиям между теоретическими и экспериментальными результатами, что было также отмечено в [16]. Установлено хорошее и надежное соответствие между теоретическими и экспериментальными результатами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Андрущенко В. А.*** Определение упругих постоянных квадратных пьезокерамических пластин резонансным методом / В. А. Андрущенко, А. А. Бондаренко, В. В. Мелешко, В. Н. Никитенко // Акуст. вестник. – 2006. – Т. 9, № 4. – С. 3–11.

2. ***Бергман Л.*** Ультразвук и его применение в науке и технике / Л. Бергман.– М.: Иностранная литература. 1957. – 726 с.

3. ***Гринченко В. Т.*** Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К.: Наук. думка, 1978. – 264 с.

4. ***Гринченко В. Т.*** Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.

5. ***Джонсон Р.*** Механические фильтры в электронике / Р. Джонсон. – М.: Мир, 1986. – 406 с.

6. ***Кэди У.*** Пьезоэлектричество и его практическое применение / У. Кэди. – М.: Иностранная литература, 1949. – 718 с.

7. ***Лібов Д.*** Осесиметричні коливання циліндра / Д. Лібов // Вісн. Київськ. нац. ун. Серія “Фізико-математичні науки”. – 2009. – Вип. 2. – С. 71–74.

8. Пьезокерамические преобразователи: справочник; под ред. С. И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.

9. Пьезоэлектрические резонаторы : справочник; под ред. П. Е. Кандыбы, П. Г. Позднякова. – М.: Радио и связь, 1992. – 392 с.

10. ***Сторожев В. И.*** Особенности спектра собственных колебаний трансторопной дисковидной пластины в окрестности краевого резонанса / В. И. Сторожев, Ю. В. Мысовский, О. Д. Соколова // Теор. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 184–189.

11. Физическая акустика. Методы и приборы ультразвуковых исследований / под ред. У. Мезона. – М.: Мир, 1966. – 592 с.

12. ***Bayon A.*** An analytical, numerical and experimental study of the axisymmetric vibrations of a short cylinder / A. Bayon, F. Gascon, F. J. Nieves // J. Sound Vibr. – 2008. – Vol. 313. – P. 617–630.

13. ***Boltryk R. J.*** Mode-switching: A new technique for electronically varying the agglomeration position in an acoustic particle manipulation / R. J. Boltryk, P. Glynne-Jones, M. Hill // Ultrasonics. – 2010. – Vol. 50. – P. 68–75.

14. ***EerNisse E. P.*** Design of piezoelectric devices / E. P. EerNisse, R. Holland. – Cambridge : MIT, 1969. – 258 p.

15. ***Ikegami S.*** Frequency spectra of extensional vibrations in $Pb(ZrTi)O_3$ / S. Ikegami, T. Nagata, Y. Nakayima // J. Acoust. Soc. Am. – 1976. – Vol. 60. – P. 113–116.

16. ***Shaw E. A. G.*** On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – Vol. 28. – P. 38–50.

Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченко
Киев, Украина

Донецкий национальный университет
Донецк, Украина

Поступила в редколлегию 05.10.2010

В. А. Андрущенко, Д. Ю. Лібов, В. В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук,
В. Н. Нікитенко, О. Д. Смоктій, В. И. Сторожев, д-р техн. наук

РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРІВ

Дана робота присвячена дослідженню експериментально отриманих амплітудно-частотних характеристик п'єзокерамічних циліндрів з поляризацією по товщині. Два теоретичних підходи розвинуті для дослідження резонансних частот п'єзокерамічних циліндрів: метод суперпозиції і метод однорідних розв'язків. Резонансні частоти, що були знайдені цими методами, добре узгоджуються з експериментом.

Ключові слова: *п'єзокерамічний циліндр, метод суперпозиції, метод однорідних розв'язків, коефіцієнт Пуассона.*

V. A. Andrushenko, D. Yu. Libov, V. V. Meleshko, Professor,
V. N. Nikitenko, O. D. Smoktiy, V. I. Storozhev, Professor

RESONANT VIBRATIONS OF PIEZOELECTRIC CERAMIC CYLINDERS

The paper deals with an analysis of experimental amplitude-frequency responses of piezoelectric ceramic cylinders. Two theoretical methods were used for finding the frequency spectra of ceramic cylinders: method of superposition and method of homogeneous solutions. Method of superposition and method of homogeneous solutions show good agreement with experimental dates.

Keywords: *piezoceramic cylinder, method of superposition, method of homogeneous solutions, Poisson's ratio.*