ISSN 2079–1836
2011, вип. 15

УДК 539.3

С. Ю. Бабич, д-р техн. наук, Е. Н. Борисов, канд. физ.-мат. наук,
А. Б. Кулик, канд. физ.-мат. наук, В. Ф. Лазар, канд. техн. наук

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В СЛОЕ

В работе рассмотрена осесимметричная задача теории упругости о трещине нормального отрыва, находящейся в слое с начальными напряжениями. Все исследования проведены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых тел при произвольной структуре упругого потенциала. На основании численных расчетов для материалов с потенциалами Бартенева − Хазановича (несжимаемые тела) и потенциалов гармонического типа (сжимаемые тела) выявлены основные закономерности влияния начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений.

Ключевые слова: *начальные напряжения, коэффициент интенсивности напряжений, уравнение Фредгольма, косинус-преобразование Фурье.*

Введение. В работе [1] рассмотрена осесимметричная задача теории упругости о трещине нормального отрыва, которая находится в слое с начальными напряжениями. В результате данная задача приведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Необходимо отметить, что актуальность исследований статических и динамических задач для упругих предварительно напряженных тел с трещинами не вызывает сомнений, так как начальные (остаточные) напряжения практически присутствуют во всех элементах конструкций. Как известно, начальные напряжения имеют различную природу. Так, они возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении и сборке; в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил; в композитных материалах при технологических процессах их создания; в кровеносных сосудах живых организмов. Начальные напряжения необходимо учитывать при решении задач о деформировании грунтов (особенно мерзлых). Кроме того, в упругопластических телах также могут присутствовать внутренние остаточные напряжения после снятия нагрузок. Иногда целесообразно преднамеренно создавать начальные напряжения (остаточные или технологические) для компенсации тех напряжений, которые возникают в элементах конструкции в процессе работы и повышения их прочностных характеристик.

Таким образом, механика материалов и элементов конструкций, геофизика, сейсмология, механика горных пород, механика композитов, биомеханика, неразрушающие методы определения напряжений и ряд других – такой далеко не полный перечень научных направлений фундаментального и прикладного характера, в которых возникают проблемы, связанные с необходимостью исследования влияния начальных (остаточных) напряжений или деформаций.

© С. Ю. Бабич, Е. Н. Борисов,
А. Б. Кулик, В. Ф. Лазар, 2011

Постановка задачи. Рассмотрим упругий слой, ослабленный круговой трещиной, которая расположена в его срединной поверхности ($y_3 = 0$) параллельно границам. Пусть слой подвергнут предварительной нагрузке, приложенной на бесконечности и действующей в плоскости трещины. При этом считаем, что начальное состояние слоя является однородным и выполняются условия:

$$S_{33}^0 = 0; \quad S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0; \quad \lambda_3 \neq 0.$$

Предположим, что толщина слоя в начальном деформированном состоянии равна $2h$, а радиус трещины – a, и считаем, что нормальные напряжения на берегах трещины заданы в виде произвольной функции полярного радиуса $f(r)$ (для случая равномерной внешней нагрузки $f(r) \equiv -q$).

Изложение основного материала. В работе [1] осесимметричная задача о трещине нормального отрыва в слое с начальными напряжениями сведена к уравнению Фредгольма второго рода, которое в обозначениях, принятых в [1], имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^a \varphi(t)K(t,x)dt - F(x),$$

причем функция $F(x)$ определяется нагрузкой, заданной на берегах трещины. В общем случае, при решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода приходится прибегать к численным методам, для эффективной реализации которых существенным является непрерывность и ограниченность ядра уравнения. В связи с этим выясним, при каких значениях коэффициента удлинений ядро интегрального уравнения Фредгольма второго рода, определяемое соотношением [1], имеет разрыв. Поэтому для его интегрирования и нахождения величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние в слое, необходимо использовать численные методы. Ниже изложена методика численного определения коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины нормального отрыва в слое с начальными напряжениями. Коэффициент интенсивности напряжений K_I, согласно [1], выражается через решение уравнения Фредгольма второго рода. Ядро интегрального уравнения [1] определяется через косинус-преобразование Фурье $G(\lambda_i)$ функции $g(\lambda_i)$. Вследствие сложности функции $g(\lambda_i)$ для упругих потенциалов конкретного вида аналитическое выражение косинус-преобразования Фурье для нее не найдено. Поэтому для нахождения функции $G(\lambda_i)$ используется формула трапеций. При численном определении через косинус-преобразование Фурье функции $g(\lambda_i)$ несобственный интеграл заменим конечной суммой по формуле трапеций:

$$G(\lambda_i) = \int_0^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda\xi_i d\lambda \approx \sum_{k=0}^{M} g(\lambda_k)\cos\lambda_k\xi_i\Delta\lambda\,,$$

где $\lambda_k = k\Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ − шаг численного интегрирования. При этом удерживаются слагаемые до такого номера M, пока их значения не станут достаточно малыми по сравнению со значением суммы.

Таким образом, алгоритм численного определения коэффициента интенсивности напряжений сводится к следующему. Для конкретного вида упругого потенциала и заданных толщины слоя и радиуса трещины составляем таблицу значений косинус-преобразования Фурье для функции $g(\lambda)$ (табл. 1). Пользуясь табл. 1, вычисляем коэффициенты $K_{i,j}$ при неизвестных в алгебраической системе уравнений. Затем, решая полученную систему, находим приближенное значение коэффициента интенсивности напряжений K_I, соответствующее исходным данным. С помощью специальных программ проведены расчеты для различных геометрических характеристик слоя из материалов с упругими потенциалами Бартенева − Хазановича и гармонического типа.

Для упругих потенциалов указанных типов формула для вычисления косинус-преобразования Фурье принимает вид

$$G(\xi) = p_1\int_0^{\infty}\left[1+\frac{1}{(1+m_1)l_1}\frac{(1+m_1)^2(l_1\mu)^2(1-\coth^2\mu)+}{(1+m_1)l_1\mu(1-\coth^2\mu)+}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\frac{+(1+m_2)^2(l_2-l_1)^2\coth\mu}{+(1+m_2)(l_2-l_1)\coth\mu}\right]\times\cos\mu p_1\xi d\mu,$$

где $\mu = \lambda h_1$, $p_1 = a/h_1$, коэффициенты l_1, l_2, m_1, m_2, зависящие от начальных напряжений, для указанных потенциалов приведены в [1].

Для подтверждения достоверности полученных результатов вычислительные программы были протестированы по результатам решения рассматриваемой задачи в рамках классической теории упругости (без учета начальных напряжений, приведенных в работе [2]). Другим моментом, обуславливающим достоверность численных результатов, является контроль точности вычислений и анализ возникающих погрешностей.

При составлении табл. 1 шаг численного интегрирования несобственного интеграла выбирался исходя из условия, чтобы погрешность, вычисленная относительно значения, найденного с вдвое меньшим шагом, не превышала 1%. Суммирование слагаемых проводилось до тех пор, пока приращение к значению интегральной суммы не становилось по абсолютной величине меньше 0,1% ее значения. Кроме того, значение косинус-преобразования Фурье для функции $g(\lambda_i)$, а, следовательно, в наиболее неблагоприятном

случае и погрешности определения, при вычислении ядра разрешающего уравнения Фредгольма второго рода складываются. Поэтому контроль точности вычислений осуществлялся и на заключительном этапе расчета путем сравнения вычисленных при различных параметрах численного интегрирования значениях коэффициента интенсивности напряжений. Область определения функции $\omega(\xi)$ при этом была разбита на двадцать частей, а геометрические характеристики слоя с трещиной (отношение диаметра трещины к толщине слоя p) и значения параметров начальных деформаций варьировались.

Численные результаты. На основании выполненного анализа было установлено, что указанным выше критериям сходимости при вычислении значений косинус-преобразования Фурье для функции $g(\lambda_i)$ удовлетворяют значения, найденные при шаге численного интегрирования $\Delta M = 0{,}005$. При этом наибольшая погрешность определения коэффициента интенсивности напряжений отмечается для результатов, соответствующих потенциалу Бартенева − Хазановича при значении $\lambda_1 = 1{,}3$ (наибольшим из использовавшихся в расчетах) и не превышает 2,5%. При решении системы линейных алгебраических уравнений после нахождения ω_i вычислялись невязки всех уравнений. Величины невязок были на 5−7 порядков меньше величин ω_i, что свидетельствовало о достаточно точном нахождении решений.

Наконец, был выполнен анализ сходимости решения в зависимости от числа участков N, на которые разбивалась область определения функции ω_i. Наибольшую погрешность определения коэффициента интенсивности напряжений можно было ожидать в случае, когда функция ω_i изменялась наиболее быстро.

В этом случае при уменьшении числа участков разбиения N с 80 до 40 значения коэффициента интенсивности напряжений изменялись не более чем на 4%. Для остальных значений λ_i, использовавшихся в расчетах, изменение значений коэффициента интенсивности напряжений в таких пределах происходило при уменьшении числа участков разбиения N с 40 до 20.

Приведем результаты численного определения коэффициента интенсивности напряжений и дадим их качественный анализ. Расчеты проводились по методике, изложенной в [1], для слоя из материалов с упругими потенциалами Бартенева − Хазановича и гармонического типа при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3$ и 0,4. Коэффициенту удлинений в начальном состоянии λ_1 присваивались значения 0,8; 0,9 (сжимающие начальные напряжения), 1,0 (начальные напряжения отсутствуют), 1,1; 1,2 и 1,3 (растягивающие начальные напряжения). Отношение p диаметра трещины к толщине слоя принималось равным 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,6; 0,5; 0,4; 0,2 и 0,1.

В табл. 1 приведены значения коэффициента интенсивности напряжений для слоя с трещиной K_I, отнесенного к значению коэффициента интенсивности K_I^{∞} для неограниченного упругого тела с трещиной [1], для материалов

с упругими потенциалами двух видов только для значений коэффициента удлинений в начальном состоянии $\lambda_1 = 0{,}8;\ 1{,}0;\ 1{,}3$ и отношения радиуса трещины к толщине слоя p. Как видно, наиболее сильное влияние начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений проявляется для относительно тонкого слоя (при $p = 2{,}0$, а для потенциала Бартенева − Хазановича и при $p = 1{,}5$) при $\lambda_1 = 0{,}8$, т. е. наиболее близким к значениям, являющимся корнями уравнений соответственно для потенциала гармонического типа и потенциала Бартенева − Хазановича

$$(\nu + 2)\lambda_1 - (\nu + 1) = 0;$$

$$3\lambda_1^2 - 1 = 0.$$

Таблица 1 − **Значения косинус-преобразования Фурье функции** $g(\lambda_i)$

p	Потенциал гармонического типа				Потенциал Бартенева − Хазановича
	$\nu = 0{,}1$	$\nu = 0{,}2$	$\nu = 0{,}3$	$\nu = 0{,}4$	
	$\lambda_1 = 0{,}8$				
0,1	0,9692	0,9670	0,9650	0,9631	0,9135
0,4	0,8836	0,8751	0,8672	0,8598	0,7803
0,5	0,9291	0,9215	0,9146	0,9084	0,8718
0,6	1,006	1,001	0,9959	0,9917	0,9894
0,8	1,237	1,239	1,240	1,242	1,246
1,0	1,673	1,750	1,863	2,029	2,034
1,5	3,374	3,597	3,742	3,918	4,098
2,0	7,350	8,742	9,859	9,983	11,69
	$\lambda_1 = 1{,}0$				
0,1	1,001	1,001	1,001	1,001	1,001
0,4	1,046	1,046	1,046	1,046	1,046
0,5	1,080	1,080	1,080	1,080	1,080
0,6	1,125	1,125	1,125	1,125	1,125
0,8	1,236	1,236	1,236	1,236	1,236
1,0	1,370	1,370	1,370	1,370	1,370
1,5	1,771	1,771	1,771	1,771	1,771
2,0	2,236	2,236	2,236	2,236	2,236
	$\lambda_1 = 1{,}3$				
0,1	1,056	1,063	1,071	1,080	1,097
0,4	2,070	2,325	2,584	2,694	2,764
0,5	1,907	2,028	2,185	2,393	2,510
0,6	1,832	2,225	2,391	2,455	2,561
0,8	1,415	1,443	1,498	1,502	1,393
1,0	1,384	1,377	1,371	1,365	1,358
1,5	1,464	1,441	1,418	1,396	1,365
2,0	1,593	1,542	1,503	1,455	1,407

Другой максимум влияния начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений наблюдается при $p = 0{,}4$ и $\lambda_1 > 1{,}3$. Причем величина K_I / K_I^{∞} для $\lambda_1 > 1$ растет при уменьшении p от 0,8 до 0,4, а затем при дальнейшем уменьшении p начинает убывать.

Предельному случаю неограниченного упругого тела ($p = 0$) соответствует прямая $K_I / K_I^{\infty} = 1$. Таким образом, близкие к единице значения величины K_I / K_I^0 отмечаются для значений p, лежащих в промежутке от 1,0 до 0,8, т. е. и для таких относительных толщин слоя влияние начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений мало.

Кроме того, в зависимости от относительной толщины слоя знак начальных напряжений по-разному сказывается на характере изменения коэффициента интенсивности напряжений. Так, при толщине слоя меньшей либо равной диаметру трещины ($p \geq 1$) сжимающие начальные напряжения приводят к увеличению величины K_I / K_I^0, а растягивающие – к ее уменьшению. Когда значения p уменьшаются от 1,0 до 0,8, происходит смена характера влияния начальных напряжений и для $p \leq 0{,}8$ сжимающие начальные напряжения вызывают уменьшение величины K_I / K_I^0, а растягивающие – ее увеличение.

Выводы. Таким образом, для круговой трещины нормального отрыва в слое из сжимаемого материала (потенциал гармонического типа) и несжимаемого материала (потенциал Бартенева − Хазановича) коэффициент интенсивности напряжений зависит от начальных деформаций, причем характер этой зависимости определяется знаком начальных напряжений и относительной толщиной слоя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Гузь А. Н.*** Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями / А. Н. Гузь, С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов. – Кременчуг: Press line, 2007. – 795 с.

2. ***Уфлянд Я. С.*** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 403 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины,
Киев, Украина

Поступила в редколлегию 15.10.2010

С. Ю. Бабич, д-р техн. наук, Е. Н. Борисов, канд. фіз.-мат. наук,
А. Б. Кулик, канд. фіз.-мат. наук; В. Ф. Лазар канд. техн. наук

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА КОЕФІЦІЄНТ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ЗАДАЧІ ПРО ТРІЩИНУ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В ШАРІ

В роботі розглянута вісесиметрична задача теорії пружності про тріщину нормального відриву, яка знаходиться в шарі з початковими напруженнями. Всі дослідження проведені в загальній формі для стисливих та нестисливих тіл за довільної структури пружного потенціалу. З проведених чисельних розрахунків для матеріалів з потенціалами Бартенєва − Хазановича (нестисливі тіла) та потенціалів гармонічного типу (стисливі тіла) виявлені основні закономірності впливу початкових напружень на коефіцієнт інтенсивності напружень.

Ключові слова: *початкові напруження, коефіцієнт інтенсивності напружень, рівняння Фредгольма, косинус-претворення Фурьє.*

S. Yu. Babich, Professor, E. M. Borysov, Associate Professor,
A. B. Kulyk, Associate Professor, V. F. Lazar, Associate Professor

INFLUENCE OF INITIAL DEFORMATION ON STRESS INTENSITY COEFFICIENT IN THE PROBLEM OF CRACK OF THE NORMAL SEPARATION IN THE LAYER

In work the theory of elasticity problem about a normal separation crack, being in a layer with initial pressure are presented. The problem is considered axisymmetrical. All researches are made in the general form for compressible and incompressible samples at any structure of elastic potential. On the basis of numerical calculations for materials with Bartenev – Hazanovich's potentials (incompressible samples) and potentials of harmonious type (compressible samples) the basic laws of initial stress influence on stress intensity coefficient are revealed.

Keywords: *initial stress, coefficient of stress intensity, Fredholm's equation, Fourie's cosine-transformation.*