ISSN 2079–1836
2011, вип. 15

УДК 620.179

В. Р. Богданов, канд. физ.-мат. наук, Г. Т. Сулым, д-р физ.-мат. наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДРАСТАНИЯ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

С использованием разностных методов исследуется плоское деформированное состояние достаточно толстого компактного образца для определения вязкости разрушения (трещиностойкости) в нестационарной упругопластической постановке с учетом роста трещины при нагрузке, которая приложена к локализованной области и изменяется со временем по линейному закону. Для моделирования роста трещины используется локальный критерий хрупкого разрушения. Определены зависимости напряжений, параметра Одквиста, пластических деформаций.

Ключевые слова: *компактный образец, пластические деформации, рост трещины.*

Введение. Для изучения процессов разрушения необходимо построение математических моделей и решение тех задач, которые описывают явления, изучаемые в экспериментах. Более просто формулировать такие задачи с использованием линейно-упругих механических моделей равновесного состояния. Однако, поскольку, во многих случаях постоянные определяют из ударного разрушения на трехточечный изгиб надрезанных образцов прямоугольной формы (компактных образцов для определения вязкости разрушения), то пренебрежение динамическими явлениями, а также нелинейностью и пластичностью явления деформирования, обусловливает очень большие погрешности.

В работе В. И. Махненко [6] было предложено для анализа процессов разрушения использовать вместе с экспериментальными также и расчетные методы на основе квазистатической модели материала. Эти результаты были обобщены в публикациях [2, 3], где определяющие соотношения для упруго-пластического деформирования были объединены с динамическими уравнениями в предположении, что трещина неподвижна. Предложенные модели дают возможность значительно повысить уровень адекватности полученных теоретических подходов. В публикации [7] определяется напряженно-деформированное состояние жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием при динамическом нагружении.

В данном исследовании методика работ [2, 3] расширена на случай, когда трещина динамично увеличивается в упругопластическом образце после его динамического нагружения.

Математическая формулировка задачи. Рассматривается деформирование балочного образца в форме прямоугольника $\Sigma = L \times B$ $(0 \le y \le B;$

© В. Р. Богданов, Г. Т. Сулым, 2011

$-L/2 \le x \le L/2$) с пропилом-трещиной начальной длины $l = l_0$ вдоль отрезка $\{x = 0;\ 0 \le y \le l_0\}$, который контактирует с двумя неподвижными опорами вдоль $\{L_* \le |x| \le L_* + a;\ y = 0\}$. Толщина w образца предполагается настолько большой, чтобы можно было использовать зависимости плоского деформированного состояния ($\sigma_{zz} = \text{const}, \sigma_{xz} = 0, \sigma_{yz} = 0$).

Сверху на тело падает абсолютно твердый ударник, который контактирует вдоль отрезка $\{|x| \le A;\ y = B\}$. Его действие на тело заменим равномерно распределенным в области контакта нормальным напряжением $-P$, что изменяется со временем как линейная функция $P = p_{01} + p_{02}t$. Так как процесс деформирования является симметричным относительно линии $x = 0$, то далее рассматривается только правая часть поперечного сечения (рис. 1, а).

В результате ударного нагружения считаем, что материал упругопластичный с упрочнением, причем расчет полей напряжений, деформаций и их приращений, в частности приращений интенсивности пластичных $d\varepsilon_i^p$, а также параметра Одквиста $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$, будем осуществлять на основе численного решения соответствующей динамической упругопластической задачи.

При проведении расчетов используем известные методики исследования квазистатической упругопластической [6] модели, которые учитывают нестационарность нагружения и используют численное интегрирование, реализованное в расчетах динамической упругой модели [11]. При расчетах динамических полей напряжений и деформаций не учитываем взаимодействия волновых полей, отражения от границ тела и возможного при этом контактного взаимодействия между берегами разреза.

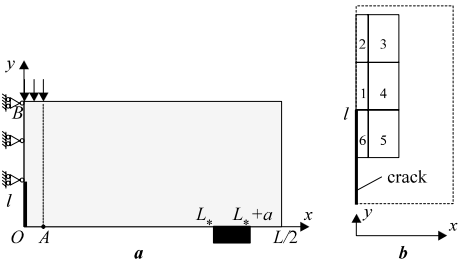


Рис. 1 – **а) Геометрическая схема задачи; б) Сетка разбиения возле острия трещины**

Рассматриваются уравнения плоской динамической теории, для которой компоненты вектора смещений $u = (u_x, u_y)$ связаны с компонентами

тензора деформаций соотношениями Коши, а уравнения движения среды плотности ρ имеют вид $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$; $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$.

Краевые условия задачи, учитывающие изменение длины трещины, однако выходят из допущения о неизменности области приложения реакций, расположения опор, запишутся так:

$$
\begin{aligned}
&x=0; \quad 0<y<l: && \sigma_{xx}=0;\ \sigma_{xy}=0;\\
&x=0; \quad l<y<B: && u_x=0;\ \sigma_{xy}=0;\\
&x=L/2; \quad 0<y<B: && \sigma_{xx}=0;\ \sigma_{xy}=0;\\
&y=0; \quad 0<x<L_*: && \sigma_{yy}=0;\ \sigma_{xy}=0;\\
&y=0; \quad L_*<x<L_*+a: && u_y=0;\ \sigma_{xy}=0;\\
&y=0; \quad L_*+a<x<L/2: && \sigma_{yy}=0;\ \sigma_{xy}=0;\\
&y=B; \quad 0<x<A: && \sigma_{yy}=-P;\ \sigma_{xy}=0;\\
&y=B; \quad A<x<L/2: && \sigma_{yy}=0;\ \sigma_{xy}=0.
\end{aligned}
$$

Начальные условия имеют вид

$$u_x\big|_{t=0}=0;\ u_y\big|_{t=0}=0;\ \dot{u}_x\big|_{t=0}=0;\ \dot{u}_y\big|_{t=0}=0;\ l\big|_{t=0}=l_0.$$

где точка над символом означает производную по времени.

В основу определяющих соотношений механической модели положена теория неизотермического пластического течения среды с упрочнением при условии текучести Губера - Мизеса. Эффектами ползучести и температурным расширением пренебрегаем [9].

Тогда, рассматривая компоненты тензора деформаций как сумму упругих и пластических его составляющих [1], получим для них

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^e_{ij}+\varepsilon^p_{ij};\ \ \varepsilon^e_{ij}=\frac{1}{2G}s_{ij}+K\sigma;\ \ d\varepsilon^p_{ij}=s_{ij}d\lambda.$$

Здесь $s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma$ – компоненты девиатора тензора напряжений; δ_{ij} - символ Кронекера; G – модуль сдвига; $K_1=(1-2\nu)/(3E)$, $K=3K_1$ – модуль объемного сжатия, связывающий в соотношении $\varepsilon=K\sigma+\varphi$ объемное расширение 3ε (температурное расширение $\varphi\equiv 0$); ν - коэффициент Пуассона; $\sigma=(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})/3$ - среднее напряжение; $d\lambda$ – некоторая скалярная функция, определяемая из условия пластичности (формы

поверхности нагружения) и из соображений на упомянутый выше его выбор квадратично зависит от компонент девиатора напряжений s_{ij} [9], причем

$$d\lambda = \left\{ 0 \ \ (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0), \ \ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \ \ (f = 0, \ \ df = 0) \right\};$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + 6\left(d\varepsilon_{xy}^p\right)^2};$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + 6\sigma_{xy}^2}.$$

Материал упрочняется с коэффициентом упрочнения η_* [6]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0)\left(1 + \kappa(T)/\varepsilon_0\right)^{\eta_*}; \ \ \varepsilon_0 = \sigma_{02}(T_0)/E; \ \ T_0 = 20^\circ\mathrm{C},$$

где E – модуль упругости; $\sigma_S(T)$ - предел текучести после упрочнения материала при температуре T.

В отличие от традиционной плоской деформации, когда $\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \ \mathrm{const}$, для уточненного описания деформирования образца с учетом возможного приращения продольного удлинения $\Delta\varepsilon_{zz}$ запишем в виде [4]

$$\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \Delta\varepsilon_{zz}^0 + \Delta\chi_x x + \Delta\chi_y y, \qquad (1)$$

где неизвестные $\Delta\chi_x$ и $\Delta\chi_y$ характеризуют изгиб призматического тела (которое моделирует в механике деформированного твердого тела состояние плоской деформации) в плоскостях Ozx и Ozy соответственно, а $\Delta\varepsilon_{zz}^0$ – приращения при упомянутом изгибе деформации вдоль волокон $x = y = 0$.

Схема решения задачи. Пусть нестационарное взаимодействие осуществляется в интервале времени $t \in [0, t_*]$, тогда

$$\varepsilon_{\|xx,yy,zz\|}^e = \frac{\sigma_{\|xx,yy,zz\|} - \sigma}{2G} + K\sigma; \ \ \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} = \sigma_{xy}\frac{d\lambda}{dt};$$

$$\frac{d\varepsilon_{\|xx,yy,zz\|}^p}{dt} = \left(\sigma_{\|xx,yy,zz\|} - \sigma\right)\frac{d\lambda}{dt}; \ \ \varepsilon_{xy}^e = \frac{\sigma_{xy}}{2G}. \qquad (2)$$

Для численного интегрирования по времени использовалась квадратурная формула Грегори [10] порядка $m_1 = 3$ с коэффициентами D_n. После равномерной дискретизации по времени с узлами $t_k = k\Delta t \in [0, t_*] \ \ (k = \overline{0, \mathrm{K}})$

для каждого значения k запишем соответствующие узловые значения приращений деформаций:

$$\Delta\varepsilon_{xx,k} = B_1\sigma_{xx,k} + B_2\sigma_{yy,k} - \beta_{xx};\ \ B_1 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)/\alpha_1;$$

$$\Delta\varepsilon_{yy,k} = B_2\sigma_{xx,k} + B_1\sigma_{yy,k} - \beta_{yy};\ \ B_2 = \alpha_2(1-\alpha_2/\alpha_1); \qquad (3)$$

$$\Delta\varepsilon_{zz,k} = \alpha_1\sigma_{zz,k} + \alpha_2(\sigma_{xx,k} - \sigma_{yy,k}) - b_{zz};\ \ \Delta\varepsilon_{xy,k} = B_3\sigma_{xy,k} - b_{xy};$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}\left(K + \frac{1}{G} + 2D_0\Delta\lambda_k\right);\ \ \alpha_2 = \frac{1}{3}\left(K - \frac{1}{2G} - D_0\Delta\lambda_k\right);$$

$$\beta_{\|xx,yy\|} = b_{\|xx,yy\|} - \frac{\alpha_2(b_{zz} + \Delta\varepsilon_{zz})}{\alpha_1};\ \ B_3 = \frac{1}{2G} + D_0\Delta\lambda_k;$$

$$\beta_{zz} = -(b_{zz} + \Delta\varepsilon_{zz})/\alpha_1;\ \ b_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij}\left(K - \frac{1}{2G}\right)\sigma_{k-1} -$$

$$\sum_{n=1}^{m_1-1} D_n\left(\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij}\sigma_{k-n}\right)\Delta\lambda_{k-n}\ \ (i,j \sim x,y).$$

Функция $\psi = 1/(2G) + \Delta\lambda$, характеризующая условие текучести, с учетом (1), (2), имеет вид:

$$\psi = \left\{\frac{1}{2G}\ \ (f<0),\ \ \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}\ \ (f=0,\ \ df=0)\right\}; \qquad (4)$$

$$\Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\left(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + \left(\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p\right)^2 +\right.$$

$$\left. 6\left(\Delta\varepsilon_{xy}^p\right)^2\right)^{1/2};\ \ \Delta\varepsilon_{\|xx,yy,zz,xy\|}^p = \Delta\varepsilon_{\|xx,yy,zz,xy\|} - \Delta\varepsilon_{\|xx,yy,zz,xy\|}^e.$$

Учет во время расчетов величины $\Delta\varepsilon_{zz}^p$ показал, что ее влияние настолько мало, что без изменения точности вычислений ею можно пренебречь.

Для учета физической нелинейности [6] в зависимостях (4), применяется метод последовательных приближений, дающий возможность свести нелинейную задачу к последовательности линейных задач

$$\psi^{(n+1)} = \left\{\psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G}\ \ (Q_i < -Q);\ \ \psi^{(n)}\ \ (|Q_i| < Q);\right.$$

$$\left.\psi^{(n)}\frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)}\ (Q_i > Q)\right\};\ \ Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T),$$

где Q – наибольшее отклонение интенсивности напряжений от упрочненного предела текучести; эмпирическая постоянная $0 \le p \le 1$ определяется для разных типов материалов.

Решение системы (3) дает выражения для компонент тензора напряжений на каждом шаге:

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx,k} = A_1\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_2\Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{xx};\ \ Y_{xx} = A_1\beta_{xx} + A_2\beta_{yy};\\
\sigma_{yy,k} = A_2\Delta\varepsilon_{xx,k} + A_1\Delta\varepsilon_{yy,k} + Y_{yy};\ \ Y_{yy} = A_2\beta_{xx} + A_1\beta_{yy};\\
\sigma_{zz,k} = -\alpha_2(\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k})/\alpha_1 - \beta_{zz};\ \ \sigma_{xy,k} = A_3\Delta\varepsilon_{xy,k} + Y_{xy};\\
Y_{xy} = A_3 b_{xy};\ \ A_3 = 1/B_3;\ \ A_1 = B_1\Big/\left(B_1^2 - B_2^2\right);\ \ A_2 = -B_2\Big/\left(B_1^2 - B_2^2\right).
\end{gathered} \tag{5}$$

Неизвестные $\Delta\chi_x$, $\Delta\chi_y$ и $\Delta\varepsilon_{zz}^0$ в (1) определяются из условий равновесия четных по x нормальных напряжений σ_{zz}

$$\iint_\Sigma \sigma_{zz}(x,y)\xi\,dxdy = M_\xi\ \ (\xi = 1, x, y);\ \ \text{при}\ \ M_1 = M_x = M_y = 0. \tag{6}$$

где M_1 – проекция на ось z главного вектора контактных напряжений, а M_x, M_y – соответственно, проекции главного момента усилий, действующих на опору (кручение, как отмечено ранее, отсутствует). Из соображений симметрии задачи и $\sigma_{zz}(x,y) = \sigma_{zz}(-x,y)$ это равенство в случае $\xi = x$ удовлетворяется автоматически.

Если в (6) подставить (1) и (5), с учетом симметричности области интегрирования по x и четности функций $\sigma_{xx,k}, \sigma_{yy,k}, b_{zz}$ имеем $\Delta\chi_x = 0$. Для вычисления $\Delta\varepsilon_{zz}^0$, $\Delta\chi_y$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\Delta\varepsilon_{zz}^0 L_{\xi 1} + \Delta\chi_y L_{\xi y} = \bar{M}_\xi;\ \ L_{\xi r} = \iint_\Sigma \frac{\xi r\,dxdy}{\alpha_1};$$

$$\bar{M}_\xi = \iint_\Sigma \frac{\alpha_2\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right) - b_{zz}}{\alpha_1}\xi r\,dxdy\ \ (r, \xi = 1, y).$$

Интенсивности напряжений и деформаций, использующиеся выше, определялись для каждой элементарной ячейки из численного решения.

Независимым параметром, характеризующий процесс нагружения, является время $t_k = k\Delta t$, следовательно, и соответствующая этому моменту

времени сила $F = 2AP$ контактного взаимодействия ударника с образцом. Поскольку в механике разрушения вязкость разрушения (трещиностойкость) в большинстве случаев определют из квазистатических экспериментов и сопоставляют ее с предельным значением коэффициента интенсивности напряжений (КІН) K_{I}, полученным из упругого решения, то для описания изменения отдельных характеристик во многих случаях в роли независимого параметра (переменной) выберем приближенное значение КІН K_{I}^{e} (ниже будем называть его упругим КІН) для многих зависимостей для упругой задачи трехточечного изгиба балки с трещиной [8]:

$$K_{\mathrm{I}}^{e} = \frac{12F\sqrt{l}}{BH}\left(1{,}93 - 3{,}07\frac{l}{B} + 14{,}53\left(\frac{l}{B}\right)^{2} - 25{,}11\left(\frac{l}{B}\right)^{3} + 25{,}8\left(\frac{l}{B}\right)^{4}\right). \qquad (7)$$

Актуальная длина l трещины в каждый рассматриваемый момент времени определялась по такому алгоритму. Если в ячейке 1 наибольшее главное напряжение σ_1 достигло или превысило уровень критических напряжений хрупкого разрушения $S_C(\kappa) = \left[C_1 + C_2\exp(-A_d\kappa)\right]^{-1/2}$ при условии, что эффективное напряжение $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$ (при зависящем от температуры $\sigma_{02}(T) = a - c\left((T+273) + b\exp(-h(T+273))\right)$ не является отрицательным, то предполагается, что эта ячейка разрушается, длина трещины увеличивается на высоту этой ячейки и осуществляется перестройка сетки так, чтобы возле острия трещины снова была ячейка 1. Параметры *a, c, b, h, C_1, C_2,* и A_d этих зависимостей характеризуют свойства исследуемого поликристаллического материала.

Численная реализация. Для расчетов математической модели компактного образца из стали 15Х2НМФА использован метод конечных разностей с переменным шагом разбиения вдоль осей Ox (N элементов) и Oy (M элементов). Шаг между точками разбиения был наименьшим в области вершины трещины и на границах образца. Характерный размер ячеек в радиусе 1-2 *мм* от вершины трещины равен среднему размеру зерна испытуемого металла (0,05 *мм*). Разбиение по времени равномерное. Использование метода конечных разностей обосновывается в [5], причем обеспечивается точность расчетов с погрешностью не больше чем $O((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta t)^2)$.

Результаты расчетов средних напряжений в ячейках вблизи острия трещины при относительно небольших нагружениях, когда в дискретизированной задаче пластические деформации отсутствуют, сопоставлялись с рассчитанными для центра ячейки на основе классических одночленных асимптотических зависимостей [8, п. 1.2] с использованием КІН (7). Для ячеек 1, 6 (см. рис. 1, б) разница не превышала 0,3%.

На рис. 2-5 отображены результаты вычислений некоторых важных для механики разрушения величин при таких значениях параметров: коэффициент

упрочнения материала $\eta_* = 0,05$, $L = 60$ *мм*, $B = 10$ *мм*, $l_0 = 3$ *мм*; $\Delta t = 0,0005$ *с*, A =2,5 *мм*, $p_{01} = 8$ *МПа*, $p_{02} = 10$ *МПа*, $M = 60$, $N = 77$. Наименьший шаг разбиения был равен 0,02 *мм*, а наибольший − 2,6 *мм* ($\Delta x_{\min} = 0,02$ *мм*, $\Delta y_{\min} = 0,04$ *мм* (только первый слой), $\Delta x_{\max} = 2,6$ *мм*, $\Delta y_{\max} = 0,6$ *мм*), $a = 867$ *МПа*, $b = 975$ *МПа*, $c = 0,0305$ *МПа* K^{-1}, $C_1 = 1,92$, $C_2 = 3,04$, $h = 1,04 \cdot 10^{-2}$ K^{-1}, $A_d = 2,92$, $T = 50$ °C.

Графики рассчитанных зависимостей от КІН K_{I}^e средних напряжений на продолжении оси трещины возле ее острия (ячейка 1 на схеме рис. 1, б) двумерной модели компактного образца (рис. 2) свидетельствуют, что с развитием процесса деформирования образца в случае превышения упругим КІН K_{I}^e уровня $K_{\mathrm{I}}^e = K_{\mathrm{I}*}^e = 129,9$ $МПа\sqrt{м}$ некоторые напряжения (например, σ_{yy}) в этой точке монотонный характер увеличения изменяют на колебательный, а в случае превышения упругим КІН K_{I}^e уровня $K_{\mathrm{I}}^e = K_{\mathrm{I}**}^e =$ 145,1 $МПа\sqrt{м}$ колебания напряжений приобретают большую интенсивность. Сплошная, сплошная с треугольником, сплошная с квадратом, пунктирная, сплошная с крестиком и сплошная с кружочком линии соответствуют напряжениям σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, пределу текучести σ_S и интенсивности напряжений σ_i.

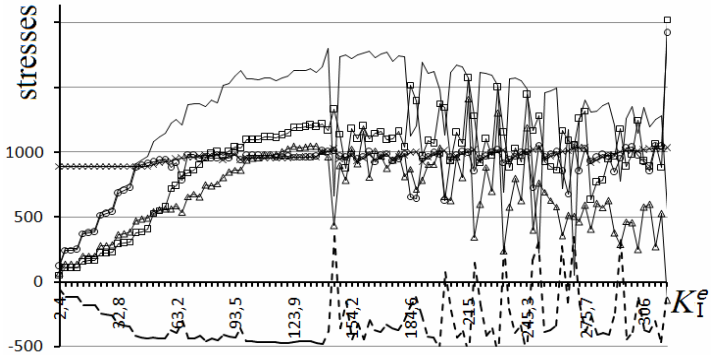


Рис. 2 – **Напряжения в ячейке 1 на продолжении оси трещины**

Вычисления показали, что при температуре образца $T = 50$ °C трещина начинала увеличиваться в случае превышения упругим КІН уровня $K_{\mathrm{I}}^e = K_{\mathrm{Ic}}^e \equiv 87,4$ $МПа\sqrt{м}$. Исследование зависимости длины трещины от K_{I}^e (рис. 3, а) дает возможность утверждать, что когда интенсивность напряжений достигает значения $K_{\mathrm{I}}^e = K_{\mathrm{I}*}^e$, процесс увеличения длины трещины становится более интенсивным (с намного большими приращениями длины) с увеличением K_{I}^e.

После достижения упругим КІН значения $K_{\mathrm{I}}^{e} = K_{\mathrm{I}d}^{e} \equiv 318{,}2 \ \ МПа\sqrt{м}$ напряжения σ_{xx} и σ_{yy} резко уменьшаются (см. рис. 2) и становятся сжимающими (отрицательными). В этот момент монотонное увеличение параметра Одквиста (рис. 3, б) в ячейке 1 замедляется и длина трещины достигает $l = 7{,}87 \ \ мм$. С этого момента, скорее всего, начинается дальнейшее необратимое разрушение образца.

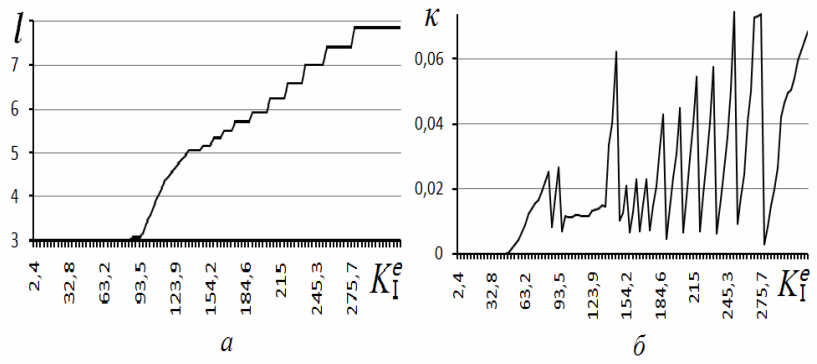


Рис. 3 – **Зависимости: а) длины трещины; б) параметра Одквиста в ячейке 1**

Вычисление зависимости параметра Одквиста κ, характеризующего накопленную в ячейке 1 (непосредственно перед острием трещины) пластическую деформацию, от K_{I}^{e} отражает рис. 3, б. Пока деформирование упругое $\kappa = 0$. Потом в ячейке 1 начинают монотонно накапливаться пластические деформации и в момент, когда трещина делает первый скачок, происходит смена расположения ячейки 1 в зону с меньшими значениями параметра κ (значение κ скачком уменьшается) и снова идет процесс накопления κ. Ввиду этого, при превышении упругим КІН значения $K_{\mathrm{I}c}^{e}$ смена κ, а вместе с этим и величина накопленной в ячейке 1 пластической деформации имеет осцилляционный (немонотонный) характер. В случае, когда $K_{\mathrm{I}}^{e} = K_{\mathrm{I}*}^{e}$ амплитуда осцилляций параметра κ значительно увеличивается, и, как говорилось выше, при $K_{\mathrm{I}}^{e} = K_{\mathrm{I}d}^{e}$ его рост замедляется.

Рис. 4 отображает температурные зависимости среднего напряжения σ и параметра Одквиста κ в ячейке 1, полученные при фиксированном значении $K_{\mathrm{I}}^{e} = K_{\mathrm{I}0}^{e} = 87{,}4 \ \ МПа\sqrt{м} = K_{\mathrm{I}c}^{e}$ в случае учета развития трещины (сплошные линии) при достижении нагрузки такого уровня, а также в предположении, что трещина не меняет своего первоначального размера (штриховые линии).

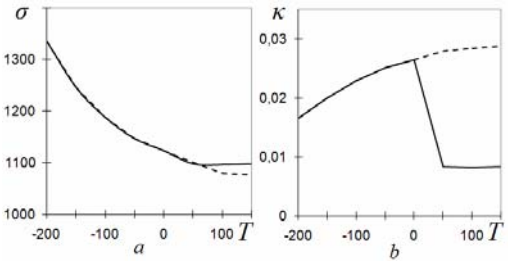


Рис. 4 – **Температурные зависимости в ячейке 1: а) среднего напряжения; б) параметра Одквиста**

В тех случаях, когда величина температуры обеспечивает возможность увеличения размера трещины с заданным $K_{\mathrm{I}}^{e} = K_{\mathrm{I}0}^{e}$ при плоском деформированном состоянии образца с неподвижной трещиной в зоне перед острием трещины, характерен более низкий уровень средних напряжений и более высокий уровень накопленных пластических деформаций. Если же при некоторой температуре (в данном случае это T <50°) уровень напряжений для роста трещины недостаточный, то оба подхода дают одинаковые результаты.

Когда трещина неподвижна и интенсивность напряжений достигает значения $K_{\mathrm{I}}^{e} = 60{,}1 \ \ МПа\sqrt{м} < K_{\mathrm{Ic}}^{e}$ (см. рис. 5), пластические деформации ε_{xx}^{p} возникают перед острием трещины. В этот момент времени трещина неподвижна. При росте трещины в случае достижения интенсивностью напряжений значения $K_{\mathrm{Ic}}^{e} < K_{\mathrm{I}}^{e} = 90{,}5 \ \ МПа\sqrt{м} < K_{\mathrm{I}*}^{e}$, максимальные пластические деформации ε_{xx}^{p} располагаются за острием трещины.

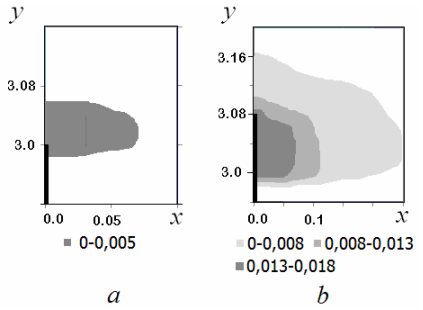


Рис. 5 – **Диаграммы максимальных пластических деформаций в области вершины трещины, когда она: а) неподвижна, б) подрастает**

Более темные зоны на диаграммах соответствуют более высоким значениям деформаций. Заметно, что зоны максимальных пластических деформаций (скорее всего) прилегают к свободной поверхности трещины и ее острие располагается в менее пластично деформированном материале (как бы пытается прорваться в такую зону). Диаграммы пластических деформаций

ε_{yy}^{p} и ε_{xy}^{p} имеют приблизительно такие же форму и размер, что ε_{xx}^{p}, однако пластические деформации ε_{xx}^{p} максимальные по абсолютной величине.

Выводы. Изложена методика решения задачи плоского деформированного состояния. Решение по этой методике задачи плоского деформированного состояния для компактного образца для определения вязкости разрушения в динамической упругопластической формулировке с учетом раскрытия трещины дает возможность намного точнее определять поля пластических деформаций и напряжений, чем при решении квазистатической упругопластической задачи плоского деформированного состояния, а также дает возможность адекватно моделировать процесс распространения трещины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Аркулис Г. Э.*** Теория пластичности / Г. Э. Аркулис , В. Г. Дорогобид.– М.: Металлургия, 1987. – 352 с.

2. ***Богданов В. Р.*** Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану / В. Р. Богданов // Вісн. Київськ. нац. ун-ту. Сер. фізико-математичні науки. – 2008. – Вип. 3. – С. 51-56.

3. ***Богданов В. Р.*** Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини / В. Р. Богданов // Вісн. Київськ. нац. ун-ту. Сер. фізико-математичні науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 51-56.

4. ***Боли Б.*** Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М.: Мир, 1964. – 360 с.

5. ***Зюкина Е. Л.*** Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения / Е. Л. Зюкина // Труды математического центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань. – Т.26. – 2004. – С. 151–160.

6. ***Махненко В. И.*** Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В. И. Махненко. – К.: Наук. думка, 1976. – 320 с.

7. ***Немировский Ю. В.*** Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием / Ю. В. Немировский, Т. П. Романова // Прикл. механика. – 2010. – **46**, №3. – С. 70 – 76.

8. ***Саврук М. П.*** Механика разрушения и прочность материалов.// Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М. П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

9. Сборник: Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. – 460 с.

10. ***Хемминг Р. В.*** Численные методы / Р. В. Хемминг. – М.: Наука, 1972. – 399 с.

11. ***Kubenko V. D.*** Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space / V. D. Kubenko , V. R. Bogdanov // International Applied Mechanics. – 1995.– **31**, № 6. – P. 483–490.

Национальный транспортный университет
Киев, Украина
Львовский национальный университет им. И. Франка
Львов, Украина

Поступила в редколлегию 04.11.2010

В. Р. Богданов, канд. фіз.-мат. наук, Г. Т. Сулим, д-р фіз.-мат. наук

МОДЕЛЮВАННЯ ПІДРОСТАННЯ ТРІЩИНИ НА ОСНОВІ ЧИСЛОВОГО РОЗ'ВЯЗКУ ЗАДАЧІ ПЛОСКОГО ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

З використанням різницевих методів досліджується плоский деформований стан достатньо товстого компактного зразка для визначення в'язкості руйнування (тріщиностійкості) в нестаціонарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладене до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Умовою підростання тріщини вважається локальний критерій крихкого руйнування. Визначені зміни напружень, параметра Одквіста, пластичних деформацій.

Ключові слова: *компактний зразок, пластичні деформації, ріст тріщини.*

V. R. Bogdanov, Associate Professor, G. T. Sulym, Professor

THE CLEAVAGE CRACK SIMULATION BASED ON THE NUMERICAL MODELING OF THE PLANE DEFOFORMATION STATE

On the base of developed method of solving problems of plane deformation state in plastic-elastic non-stationary model the problem of cleavage crack of compact specimen was solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that contact pressure has not changed. The crack is growing by local criteria of destruction. There were determined dependences of stresses, Odquist parameter, plastic deformations.

Keywords: *compact specimen, plastic deformation, crack cleavage.*