

УДК 539.3:519.6

*Э. Л. Гарт, канд. физ.-мат. наук, В. С. Гудрамович, чл.-кор. НАН Украины,  
д-р техн. наук, В. Д. Клименко, С. А. Рябоконеь*

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ РАЗЛИЧНОГО РАЗМЕРА ПРИ УЧЁТЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

Проведено численное исследование распределения напряжений и зон пластических деформаций в прямоугольной пластине с двумя прямоугольными отверстиями разных размеров. Используются вариационные методы теории пластичности и метод переменных параметров упругости в сочетании с проекционно-итерационными схемами реализации метода конечных элементов.

*Ключевые слова:* упругопластическое деформирование, пластины, прямоугольные отверстия, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

**Введение.** Отсеки тонкостенных пластинчато-оболочечных конструкций зачастую имеют отверстия (вырезы, люки) различной конфигурации. Для многих конструкций форма этих вырезов – прямоугольная. Наличие отверстий (вырезов) приводит к концентрации напряжений, что может вызвать преждевременное разрушение элементов конструкций или повлечь появление недопустимых деформаций. Это приводит к невозможности дальнейшей эксплуатации конструкций [12, 18, 23].

Оценка напряженно-деформированного состояния и несущей способности таких отсеков при высоких уровнях нагрузок должна проводиться с учётом пластических деформаций и деформаций ползучести [2, 8, 9, 14, 15]. Вышесказанное говорит о важности проведения соответствующих исследований по прочности и несущей способности элементов конструкций с отверстиями при учёте пластических деформаций.

Пластинчатые элементы с отверстиями с допустимой степенью точности моделируют поведение реальных конструкций, составляющими элементами которых являются пластины и пологие оболочки с вырезами - люками [1, 17, 18].

Одним из наиболее часто используемых методов решения задач прочности различного вида пластинчато-оболочечных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ) [13, 21]. При исследовании многих вопросов, связанных с использованием этого метода, важным является разработка таких вычислительных схем, которые бы уменьшили время расчёта на ПК. Это особенно важно, в частности, при проектировочных расчётах. В теории МКЭ разработаны проекционно-итерационные схемы вычислений, позволяющие значительно снизить затраты времени счёта на ПК [5, 19, 21, 22].

В различных задачах напряженно-деформированного состояния пластин с одним и двумя отверстиями разной конфигурации (прямоугольные, круговые, эллиптические) для упругих и упругопластических постановок было достигнуто уменьшение времени счёта от 5 до 80 раз [4–7, 11]. В [6, 7] рассмотрена пластина с одним отверстием, в [11] – с двумя круговыми или прямоугольными отверстиями одинакового размера.

Важным является выбор формы конечного элемента (КЭ). Здесь большое влияние оказывает степень концентрации напряжений. Показано, что линейные формы таких элементов (треугольные) в зонах локализации напряжений более предпочтительны, чем билинейные аппроксимации (прямоугольные КЭ). Однако применение линейных КЭ с точки зрения времени расчёта менее эффективно. Проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ как для линейных, так и для билинейных аппроксимаций более эффективны по сравнению с расчётом на основе обычного МКЭ [10].

В настоящей работе изучается напряженно-деформированное состояние (НДС) пластинчатых элементов конструкций с двумя различными вырезами прямоугольной формы, находящихся в условиях сжатия, при учёте пластических деформаций, возникающих в конструкции при нагружении. Исследования проводятся на основе использования вариационных методов теории пластичности и метода переменных параметров упругости в сочетании с проекционно-итерационными схемами реализации МКЭ.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача определения НДС прямоугольной пластины с двумя прямоугольными отверстиями разного размера при равномерном сжатии распределенной нагрузкой  $q$ . Центры отверстий отстоят на расстоянии  $l$  друг от друга. Величина нагрузки и параметры пластины таковы, что в пластине возникают пластические деформации. Вид пластины, моделирующей элемент конструкции с отверстиями (вырезами), показан на рис. 1. На этом же рисунке обозначены сечения, где в дальнейшем будут определены распределения напряжений.

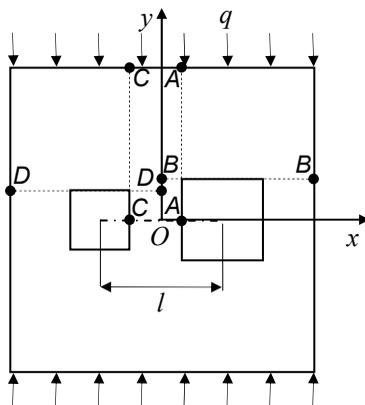


Рис. 1 – Геометрия и схема нагружения пластины

При решении поставленной задачи определяется НДС пластины, которое является существенно неоднородным, и границы между зонами упругих и пластических деформаций.

В процессе исследования изучается вопрос о возможности потери устойчивости пластины [3, 8]. Определяются касательно-модульная и приведено-модульная нагрузки. Заданная величина  $q$  приблизительно в 2 раза меньше, чем касательно-модульная критическая нагрузка, которая является минимальной из двух вышеуказанных. Установлено, что при рассматриваемых размерах пластины потери устойчивости не происходит.

В случае конструктивно неоднородной пластины (например, пластина подкреплена ребрами жёсткости – стрингерами и шпангоутами или отверстия - вырезы имеют окантовку) возможно использование методов, позволяющих построить модели изотропной пластины при учёте неоднородности жёсткости [1, 17].

**Метод решения.** При решении поставленной задачи применяется вариационный метод теории пластичности, на основе которого строится соответствующий функционал. В процессе решения ищутся такие перемещения в пластине, которые сообщают этому функционалу минимальное значение. НДС пластины при пластическом деформировании определяется на основе метода переменных параметров упругости [2]. Этот метод наряду с методом дополнительных нагрузок [14] и методом дополнительных деформаций [2] относится к основным методам решения упругопластических задач [2, 8]. В соответствии с ним строятся схемы последовательных приближений. На каждом шаге таких схем решается неоднородная задача теории упругости. Решение продолжается до совпадения двух соседних приближений с заданной точностью. В функционале, построенном для упругой пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии [11, 20]

$$\Pi = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ \frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\bar{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \frac{\bar{G}}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \int_{-a}^a q v dx, \quad (1)$$

параметры упругости: модуль сдвига  $\bar{G}$  и коэффициент Пуассона  $\bar{\nu}$ , меняются в каждом приближении и зависят от компонент НДС предыдущего приближения (для начального приближения эти параметры совпадают с параметрами упругости материала пластины  $\bar{G} = G$ ,  $\bar{\nu} = \nu$ ).

В (1)  $u$  и  $v$  – перемещения в пластине в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Следуя деформационной теории, переменные параметры упругости записываются следующим образом:

$$\bar{G} = \frac{1}{2\psi}; \quad \bar{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \bar{E} = 2(1 + \bar{\nu})\bar{G}; \quad \psi = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i}.$$

Интенсивность деформаций определяется по формуле [11, 20]

$$\varepsilon_i = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1-\bar{\nu}+\bar{\nu}^2}{3(1-\bar{\nu})^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}.$$

Для конструктивно неоднородной пластины форма функционала (1) изменится. Его конкретный вид зависит от типа жесткостных элементов (подкрепления: стрингеры и шпангоуты, окантовка отверстий и др.).

Схема метода последовательных приближений показана на рис. 2. При этом изображена диаграмма деформирования  $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ . В первом приближении параметры  $\bar{G}$  и  $\bar{\nu}$  равны  $G$  и  $\nu$  для материала пластины. Сначала решается задача теории упругости, по найденным компонентам НДС вычисляется  $\psi$ , далее решается задача теории упругости второго приближения с измененными модулями сдвига  $\bar{G}$ , упругости  $\bar{E}$  и коэффициентом Пуассона  $\bar{\nu}$  и т. д. Процесс продолжается до достижения заданной точности между двумя соседними приближениями.

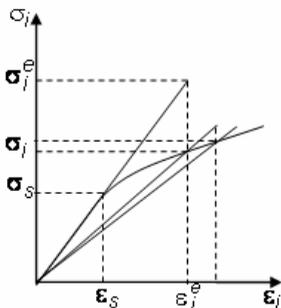


Рис. 2 – Схема метода переменных параметров упругости

На каждом шаге метода последовательных приближений проводится минимизация функционала (1) с использованием проекционно-итерационных схем реализации МКЭ. Значительное уменьшение времени расчёта по сравнению с традиционным МКЭ позволяет построить большее количество приближений, увеличивая при этом точность расчёта.

Напомним основную идею проекционно-итерационных схем МКЭ [5, 21, 22]. Исходная экстремальная задача для функционала (1) аппроксимируется (с помощью МКЭ) последовательностью дискретных экстремальных задач для функций многих переменных. Для решения этих задач применяется некоторый итерационный процесс, например, метод последовательной верхней релаксации [19]. При этом используется методика, предложенная в [16]. Согласно этой методике не требуется хранения матрицы жёсткости в явном виде, а значения перемещений  $u$  и  $v$  в текущем узле выражаются

через узловые значения перемещений четырёх примыкающих к этому узлу конечных элементов. В данном исследовании целесообразно использовать адаптивные сетки [4].

**Результаты численного анализа.** На основе предложенных алгоритмов разработана программа на языке C++. Расчеты проведены на ПК Turing  $64 \times 2$  ( $2 \text{ GHz}$ ,  $2 \times 512 \text{ Kb L2 cache}$ ) с  $2 \text{ Gb}$  оперативной памяти для квадратной пластины размером  $0,3 \times 0,3 \text{ м}$  из материала Д16Т с двумя квадратными отверстиями ( $0,04 \times 0,04 \text{ м}$ ;  $0,06 \times 0,06 \text{ м}$ ), расстояние между центрами которых  $l$ .

Развитие зон пластических деформаций (изображены штриховкой) при увеличении нагрузки  $q$  для разных значений  $l$  показано на рис. 3 (а) – для  $l = 0,08 \text{ м}$ ; б) – для  $l = 0,1 \text{ м}$ ) и рис. 4 (а) – для  $l = 0,12 \text{ м}$ ; б) – для  $l = 0,14 \text{ м}$ ).

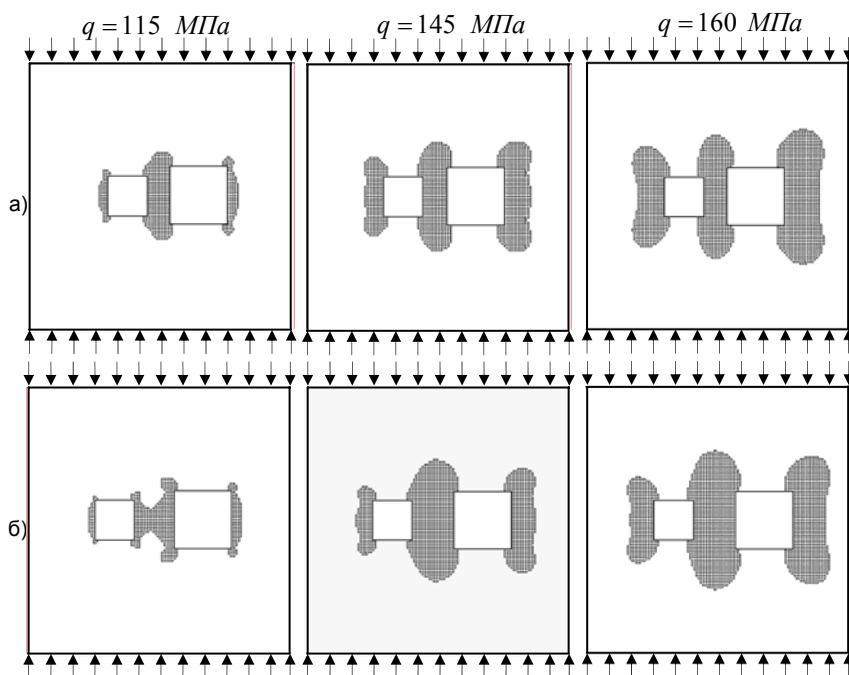


Рис. 3 – Развитие зон пластических деформаций

Пластические деформации появляются в пластинах сначала возле большего отверстия при нагрузках  $40\text{--}50 \text{ МПа}$  в зависимости от величины  $l$ . При значениях  $q$  меньше  $100 \text{ МПа}$  вокруг каждого отверстия развиваются несвязанные зоны пластичности. При увеличении нагрузки образуется общая зона пластических деформаций.

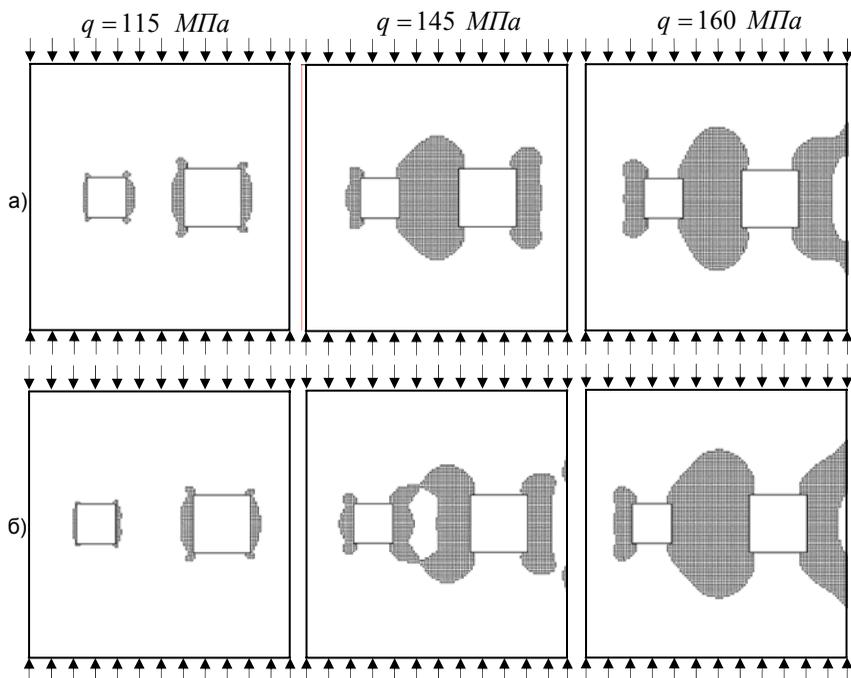


Рис. 4 – Развитие зон пластических деформаций

На рис. 5 показано распределение относительных напряжений в характерных сечениях, обозначенных на рис. 1, при  $q = 145 \text{ МПа}$  и для разных расстояний между отверстиями (линии — для  $l = 0,08 \text{ м}$ , линии - - для  $l = 0,1 \text{ м}$ , линии  $\rightarrow$  для  $l = 0,12 \text{ м}$ , линии  $\blacksquare$  для  $l = 0,14 \text{ м}$ ).

**Выводы.** Разработанные схемы численного моделирования и реализованные вычислительные алгоритмы дают возможность эффективно проводить анализ напряженно-деформированного состояния с учётом пластических деформаций и исследовать взаимовлияние прямоугольных отверстий различных размеров в пластинах при сжатии. Для рассмотренных пластин с отверстиями найдены нагрузки, при которых начинается развитие зон пластических деформаций.

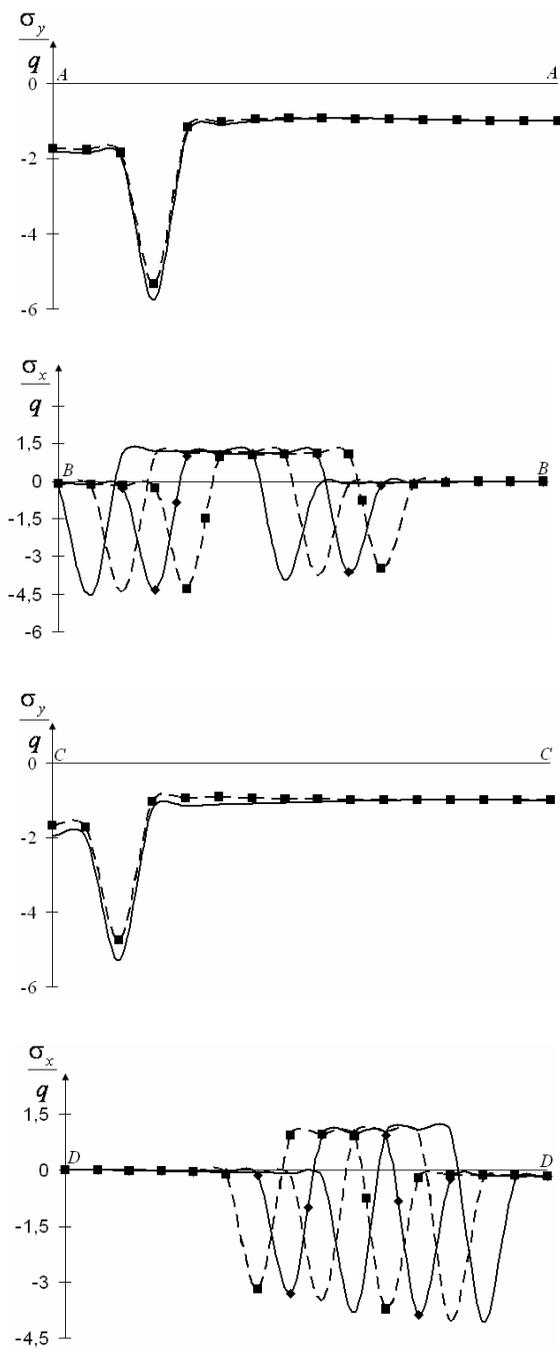


Рис. 5 – Распределение относительных напряжений в сечениях пластины

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Амиро И. Я.** Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – К. : Наук. думка, 1980. – 368 с.
2. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М. : Наука, 1975. – С. 51–73.
3. **Блейх Ф.** Устойчивость металлических конструкций. Пер. с англ. / Ф. Блейх. – М. : Физматгиз, 1959. – 544 с.
4. **Гарт Э. Л.** Проекционно-итерационный вариант метода конечных элементов на последовательности адаптивных сеток / Э. Л. Гарт // Техническая механика. – 2007. – № 2. – С. 92–100.
5. **Гарт Э. Л.** Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56–61.
6. **Гарт Е. Л.** Розв'язування задач пружно-пластичної рівноваги пластин з прямокутним і круговим отворами на основі проекційно-ітераційних схем реалізації методу скінченних елементів / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконь // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2009. – № 3. – С. 52–57.
7. **Гарт Э. Л.** Исследование упругопластического деформирования пластины с прямоугольным отверстием с использованием итерационных схем реализации метода конечных элементов / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконь // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. механіка. – 2009. – Вип. 13, т. 2. – С. 29–35.
8. **Гудрамович В. С.** Устойчивость упруго-пластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.
9. **Гудрамович В. С.** Теория ползучести и ее приложения к расчёту элементов тонкостенных конструкций / В. С. Гудрамович. – К. : Наук. думка, 2005. – 222 с.
10. **Гудрамович В. С.** Вплив форми скінченного елемента на обчислювальну ефективність проекційно-ітераційних методів при розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності / В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт // Вісник Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 4. – С. 53–58.
11. **Гудрамович В. С.** Упругопластическое деформирование прямоугольных пластин с двумя отверстиями различной формы / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконь // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 102–110.
12. **Гузь А. Н.** Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов [и др.]. – К. : Наук. думка, 1980. – 636 с.
13. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 542 с.
14. **Ильюшин А. А.** Пластичность / А. А. Ильюшин. – М. – Л. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.
15. **Качанов Л. М.** Вариационные методы в теории пластичности / Л. М. Качанов // Механика твердого тела: труды II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. – М. : Наука, 1966. – Вып. 3. – С. 177–190.
16. **Кузьменко В. И.** Трёхмерные контактные задачи для многослойного упругопластического пакета / В. И. Кузьменко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 105–112.
17. **Левин В. М.** Железобетонные башенные сооружения. Исследования, расчет / В. М. Левин. – Макеевка : ДонГАСА, 1999. – 230 с.
18. **Преображенский И. Н.** Вырезы в несущих конструкциях / И. Н. Преображенский, И. А. Цурпал. – М. : Машиностроение, 1984. – 112 с.
19. **Самарский А. А.** Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978. – 592 с.
20. **Угодчиков А. Г.** Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек / А. Г. Угодчиков, Ю. Г. Коротких. – К. : Наук. думка, 1971. – 220 с.
21. **Шайдуров В. В.** Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М. : Наука, 1989. – 288 с.
22. **Hart E. L.** Projection-iterative version of the pointwise relaxation method / E. L. Hart // Journ. Mathematic Sci. – 2010. – Vol. 167, N 1. – P. 76–88.

23. **Hudramovich V. S.** Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections / V. S. Hudramovich // Int. Appl. Mech. – 2006. – Vol. 43, N 12. – P. 1323–1355.

*Институт технической механики  
НАН Украины и НКА Украины,  
ГКБ «Южное» им. М. К. Янгеля,  
Днепропетровский национальный университет  
им. Олеся Гончара,  
Днепропетровск, Украина*

*Поступила в редколлегию 01.10.2010*

*Э. Л. Гарт, канд. физ.-мат. наук, В. С. Гудрамович, чл.-кор. НАН Украины,  
д-р техн. наук, В. Д. Клименко, С. А. Рябоконт*

## **НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛАСТИНЧАТИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ З ПРЯМОКУТНИМИ ОТВОРАМИ РІЗНОГО РОЗМІРУ ПРИ ВРАХУВАННІ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ**

Виконано числове дослідження розподілу напружень і зон пластичних деформацій в прямокутній пластині з двома прямокутними отворами різних розмірів. Використані варіаційні методи теорії пластичності і метод змінних параметрів пружності в поєднанні з проекційно-ітераційними схемами реалізації методу скінченних елементів.

*Ключові слова:* пружно-пластичне деформування, пластини, прямокутні отвори, метод скінченних елементів, проекційно-ітераційні схеми.

*E. L. Hart, Associate Professor, V. S. Hudramovich, Corresponding member  
of NAS Ukraine, Professor, V. D. Klymenko, S. A. Ryabokon'*

## **STRESS-AND-STRAINED STATE FOR PLATE ELEMENTS OF THINWALLED STRUCTURES WITH RECTANGULAR HOLES OF DIFFERENT SIZES TAKING ACCOUNT OF PLASTIC DEFORMATIONS**

Numerical investigation of distribution of stresses and plastic deformation zones in rectangular plate with two rectangular holes of different sizes is developed. Variation methods of theory of plasticity and the variable parameters of elasticity method with projective-iterative schemes of finite element method are used.

*Keywords:* elastic-plastic deformation, plates, rectangular holes, finite element method, projective-iterative schemes.