ISSN 2079–1836
2011, вип. 15

УДК 539.3

А. Я. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук,
И. А. Лоза, канд. фіз.-мат. наук

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГО НЕОДНОРОДНОГО ШАРА С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМИ СЛОЯМИ

Исследована задача о собственных осесимметричных колебаниях неоднородных по толщине полых шаров со слоями, поляризованными в радиальном направлении. Исходная задача теории электроупругости в частных производных сводится к краевой задаче на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью представления компонент тензора напряжений, векторов перемещений и электрической индукции, а также электростатического потенциала в ряды по полиномам Лежандра, и решается устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Ключевые слова: *слоистая пьезокерамическая сфера, осесимметричные собственные колебания, спектр собственных частот.*

Введение. Пьезокерамические активные элементы сферической формы находят широкое применение в различных технических устройствах, например, в гидроакустике. Поэтому понятен интерес к исследованию динамических процессов, происходящих в пьезокерамических телах сферической формы. Решение задачи о собственных электроупругих колебаниях толстостенного пьезокерамического шара связано со значительными математическими трудностями. В основном рассматривались одномерные задачи [1, 2, 6, 7]. Для решения задачи об осесимметричных вынужденных колебаниях при механическом способе возбуждения колебаний в [3] использовался метод обобщенных степенных рядов. В [8, 11, 12] для решения задачи о собственных радиальных колебаниях и осесимметричных колебаниях, соответственно, применялся метод степенных рядов. В [9], с применением этого же метода, решена задача о вынужденных осесимметричных колебаниях полого пьезокерамического шара при электрическом способе возбуждения его поверхностей. Для слоистых шаров, кроме удовлетворения решений на ограничивающих тело поверхностях, необходимо также удовлетворять условиям сопряжения, что приводит к повышению порядка систем уравнений. Некоторые аспекты нестационарного электромеханического поведения пьезокерамических тел исследованы на основании численного подхода в работах [16–19]. Для решения задачи, рассматриваемой в настоящей статье, предлагается использовать эффективный численно-аналитический подход, который применялся для решения аналогичных задач для упругих тел [5, 13–15].

Постановка задачи. Основные уравнения. Запишем полную систему уравнений, описывающих данную задачу. Уравнения гармонических колеба-

© А. Я. Григоренко, И. А. Лоза, 2011

ний i -го слоя в сферической системе координат (r,θ,φ) имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma^i{}_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma^i{}_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{2\sigma^i{}_{rr}-\sigma^i{}_{\theta\theta}-\sigma^i{}_{\varphi\varphi}+\sigma^i{}_{r\theta}ctg\theta}{r}+\rho\omega^2 u^i{}_r=0;$$

$$\frac{\partial \sigma^i{}_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma^i{}_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{3\sigma^i{}_{r\theta}+\left(\sigma^i{}_{\theta\theta}-\sigma^i{}_{\varphi\varphi}\right)ctg\theta}{r}+\rho\omega^2 u^i{}_\theta=0; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma^i{}_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma^i{}_{\theta\varphi}}{\partial \theta}+\frac{3\sigma^i{}_{r\varphi}+2\sigma^i{}_{\theta\varphi}ctg\theta}{r}+\rho\omega^2 u^i{}_\varphi=0.$$

Уравнения электростатики для i -того слоя:

$$\frac{\partial D^i{}_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial D^i{}_r}{\partial \theta}+\frac{2D^i{}_r+D^i{}_\theta ctg\theta}{r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D^i{}_\varphi}{\partial \varphi}=0;$$

$$E^i{}_r=-\frac{\partial \psi^i}{\partial r};\ E^i{}_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^i}{\partial \theta};\ E^i{}_\varphi=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi^i}{\partial \varphi}. \qquad (2)$$

Соотношения Коши для i -го слоя:

$$\varepsilon^i{}_{rr}=\frac{\partial u^i{}_r}{\partial r};\ \varepsilon^i{}_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u^i{}_\theta}{\partial \theta}+\frac{u^i{}_r}{r};\ \varepsilon^i{}_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u^i{}_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{u^i{}_\theta}{r}ctg\theta+\frac{u^i{}_r}{r};$$

$$\varepsilon^i{}_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u^i{}_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u^i{}_\theta}{\partial r}-\frac{u^i{}_\theta}{r};\ \varepsilon^i{}_{r\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u^i{}_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial u^i{}_\varphi}{\partial r}-\frac{u^i{}_\varphi}{r}; \qquad (3)$$

$$\varepsilon^i{}_{\theta z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u^i{}_\varphi}{\partial \theta}-\frac{u^i{}_\varphi}{r}ctg\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u^i{}_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Здесь $\sigma^i{}_{jk}$ – компоненты тензора напряжений; ρ^i – плотность материала; ω – круговая частота; $u^i{}_j$ – компоненты вектора перемещений; $D^i{}_j$ – компоненты вектора электрической индукции; $E^i{}_j$ – компоненты вектора напряженности электрического поля; ψ^i – электростатический потенциал; $\varepsilon^i{}_{jk}$ – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для i -го слоя пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид:

$$\sigma^i{}_{rr} = c^i{}_{11}\varepsilon^i{}_{rr} + c^i{}_{13}\varepsilon^i{}_{\theta\theta} + c^i{}_{13}\varepsilon^i{}_{\varphi\varphi} - e^i{}_{11}E^i{}_r;$$
$$\sigma^i{}_{\theta\theta} = c^i{}_{13}\varepsilon^i{}_{rr} + c^i{}_{33}\varepsilon_{\theta\theta} + c^i{}_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} - e^i{}_{31}E^i{}_r;$$
$$\sigma^i{}_{\varphi\varphi} = c^i{}_{13}\varepsilon^i{}_{rr} + c^i{}_{23}\varepsilon_{\theta\theta} + c^i{}_{33}\varepsilon^i{}_{\varphi\varphi} - e^i{}_{31}E^i{}_r;$$
$$\sigma^i{}_{\theta\varphi} = c^i{}_{44}\varepsilon^i{}_{\theta\varphi}; \sigma^i{}_{r\theta} = c^i{}_{55}\varepsilon^i{}_{r\theta} - e^i{}_{53}E^i{}_\theta;$$
$$\sigma^i{}_{r\varphi} = c^i{}_{55}\varepsilon^i{}_{r\varphi} - e^i{}_{53}E_\varphi; D^i{}_r = e^i{}_{11}\varepsilon^i{}_{rr} + e^i{}_{31}\varepsilon^i{}_{\theta\theta} + e^i{}_{31}\varepsilon^i{}_{\varphi\varphi} + \varepsilon^i{}_{11}E^i{}_r; \quad (4)$$
$$D^i{}_\theta = e^i{}_{53}\varepsilon^i{}_{r\theta} + \varepsilon^i{}_{33}E^i{}_\theta; D^i{}_\varphi = e^i{}_{53}\varepsilon^i{}_{r\varphi} + \varepsilon^i{}_{33}E^i{}_\varphi.$$

Здесь $c^i{}_{jk}$ – компоненты тензора модулей упругости; $e^i{}_{jk}$ – компоненты тензора пьезомодулей; $\varepsilon^i{}_{jk}$ – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Материальные соотношения для i-го слоя изотропного слоя:

$$\sigma^i{}_{rr} = \frac{\left(1-\nu^i\right)E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{rr} + \frac{\nu^i E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{\theta\theta} + \frac{\nu^i E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{\varphi\varphi};$$
$$\sigma^i{}_{\theta\theta} = \frac{\nu^i E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{rr} + \frac{\left(1-\nu^i\right)E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu^i E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon_{\varphi\varphi};$$
$$\sigma^i{}_{\varphi\varphi} = \frac{\nu^i E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{rr} + \frac{\nu^i E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\left(1-\nu^i\right)E^i}{\left(1+\nu^i\right)\left(1-2\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{\varphi\varphi}; \quad (5)$$
$$\sigma^i{}_{r\varphi} = 2\frac{E^i}{2\left(1+\nu^i\right)}\varepsilon^i{}_{r\varphi}.$$

Как было показано в [4, 10, 13] для упругого шара, а затем и в [12] для пьезокерамического шара, общая неосесимметричная задача может быть сведена к двум независимым подсистемам, описывающим колебания первого и второго классов. Колебания первого класса являются чисто упругими, в то время как колебания второго класса – связанными электроупругими. Система уравнений, описывающая колебания второго класса, в точности совпадает с аналогичной системой в задаче об осесимметричных колебаниях пьезокерамического (упругого) шара. Рассмотрим эту систему.

Уравнения осесимметричных гармонических колебаний i-го слоя:

$$\frac{\partial\sigma^i{}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma^i{}_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma^i{}_{rr} - \sigma^i{}_{\theta\theta} + \sigma^i{}_{r\theta}ctg\theta}{r} + \rho\omega^2 u^i{}_r = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma^i{}_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma^i{}_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{3\sigma^i{}_{r\theta}+\sigma^i{}_{\theta\theta}ctg\theta}{r}+\rho\omega^2 u^i{}_{\theta}=0. \qquad (6)$$

Уравнения электростатики для i -го слоя:

$$\frac{\partial D^i{}_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial D^i{}_r}{\partial \theta}+\frac{2D^i{}_r+D^i{}_\theta ctg\theta}{r}=0;\ E^i{}_r=-\frac{\partial \psi^i}{\partial r};\ E^i{}_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^i}{\partial \theta}. \qquad (7)$$

Соотношения Коши для i -го слоя:

$$\varepsilon^i{}_{rr}=\frac{\partial u^i{}_r}{\partial r};\ \varepsilon^i{}_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u^i{}_\theta}{\partial \theta}+\frac{u^i{}_r}{r};\ \varepsilon^i{}_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r}\left(u^i{}_\theta ctg\theta+u^i{}_r\right);$$

$$\varepsilon^i{}_{r\theta}=\frac{\partial u^i{}_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u^i{}_\theta}{\partial r}-\frac{u^i{}_\theta}{r}. \qquad (8)$$

На боковых поверхностях шара (при $r=R_0\pm h$) задаются следующие граничные условия:

- поверхности свободны от внешних усилий: $\sigma^i{}_{rr}=\sigma^i{}_{r\theta}=0$ и покрыты электродами, которые закорочены ($\psi=0$);
- на поверхностях контакта $r=r_i$ имеют место условия совместной работы i -го и $(i+1)$ -го слоев без скольжения, отрыва и непрерывности электрического поля:

$$\sigma^i{}_{rr}=\sigma^{i+1}{}_{rr};\ \sigma^i{}_{r\theta}=\sigma^{i+1}{}_{r\theta};\ \psi^i=\psi^{i+1};$$
$$u^i{}_r=u^{i+1}{}_r;\ u^i{}_\theta=u^{i+1}{}_\theta;\ D^i{}_r=D^{i+1}{}_r. \qquad (9)$$

В дальнейшем верхний индекс i будем опускать. Выбираем в качестве основных неизвестных функции, через которые формулируются условия контакта смежных слоев и условия на ограничивающих тело поверхностях. Разрешающая система уравнений для данного класса задач записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}=\frac{2}{r}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta}-1\right)\sigma_{rr}-\Delta_\theta\frac{1}{r}\sigma_{r\theta}+\left(2\frac{\Delta_3}{r^2\Delta}-\Omega^2\right)u_r+\Delta_\theta\frac{\Delta_3}{r^2\Delta}u_\theta-2\frac{\Delta_1}{r\Delta}D_r;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\Delta_2}{\Delta}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta}-\frac{3}{r}\sigma_{r\theta}-\frac{\Delta_3}{r^2\Delta}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\left(\frac{(c_{11}-c_{12})}{r^2}+\frac{\Delta_\theta^2\Delta_4}{r^2\Delta}+\Omega^2\right)u_\theta+\frac{\Delta_1}{r\Delta}D_r;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}=\frac{e_{33}}{\Delta}\sigma_{rr}+2\frac{\Delta_1}{r\Delta}u_r+\frac{\Delta_\theta\Delta_1}{r\Delta}u_\theta-\frac{c_{33}}{\Delta}D_r; \qquad (10)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{\varepsilon_{33}}{\Delta}\sigma_{rr}-2\frac{\Delta_2}{r\Delta}u_r-\frac{\Delta_\theta\Delta_2}{r\Delta}u_\theta+\frac{e_{33}}{\Delta}D_r;$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{c_{55}}\sigma_{r\theta} - \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_\theta - \frac{e_{53}}{rc_{55}}\psi;$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} = -\frac{2}{r}D_r - \Delta_\theta \frac{e_{53}}{rc_{55}}\sigma_{r\theta} + \Delta_\theta \frac{\Delta_5}{r^2 c_{55}}\psi.$$

Здесь введены обозначения:

$$\Delta_\theta * = \frac{\partial *}{\partial \theta} + *ctg\theta\,; \quad \Delta_\theta^2 * = \frac{\partial^2 *}{\partial \theta^2} + ctg\theta\frac{\partial *}{\partial \theta} - *ctg^2\theta;$$

$$\Delta = c_{11}\varepsilon_{11} + {e_{11}}^2\,; \quad \Delta_1 = c_{11}e_{13} - c_{13}e_{11}\,; \quad \Delta_2 = c_{13}\varepsilon_{11} + e_{11}e_{13}\,;$$

$$\Delta_3 = 2e_{13}\Delta_1 - 2c_{13}\Delta_2 + \left(c_{23} + c_{33}\right)\Delta\,; \quad \Delta_4 = e_{13}\Delta_1 - c_{13}\Delta_2 + c_{33}\Delta\,;$$

$$\Delta_5 = c_{55}\varepsilon_{33} + {e_{53}}^2\,.$$

Решение задачи. Для решения поставленной задачи предлагается эффективный численно-аналитический подход. Используя условие замкнутости шара, представим компоненты тензоров напряжения и векторов смещения, электрической индукции и электростатического потенциала в виде рядов по полиномам Лежандра. В результате исходная задача, описываемая уравнениями в частных производных, сводится к краевой задаче на собственные значения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается с использованием метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Решение системы уравнений будем искать в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\sigma_{rr}\left(r,\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sigma_{rr}\left(r\right)P_k\left(\cos\theta\right); \quad \sigma_{r\theta}\left(r,\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sigma_{r\theta}\left(r\right)\frac{dP_k\left(\cos\theta\right)}{d\theta};$$

$$\psi\left(r,\theta\right) = h\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}}\sum_{k=0}^{\infty}\psi\left(r\right)P_k\left(\cos\theta\right); \quad u_r\left(r,\theta\right) = h\sum_{k=0}^{\infty}u_r\left(r\right)P_k\left(\cos\theta\right); \qquad (11)$$

$$u_\theta\left(r,\theta\right) = h\sum_{k=0}^{\infty}u_\theta\left(r\right)\frac{dP_k\left(\cos\theta\right)}{d\theta}; \quad D_r\left(r,\theta\right) = \sum_{k=0}^{\infty}D_r\left(r\right)P_k\left(\cos\theta\right).$$

Индекс k в слагаемых функциях опускаем. Используя разложение (11), систему (10) и граничные условия, получаем краевую задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dR}{dr} = A(x,\Omega)R; \quad B(-1) = 0; \quad B(1) = 0; \quad R = \left\{\sigma_{rr},\sigma_{r\theta},\psi,u_r,u_\theta,D_r\right\}; \qquad (12)$$

$$A = \left\|a_{lm}\right\| \quad \left(l,m = 1,2,...,6\right).$$

Ненулевые элементы матрицы A для $k \geq 1$ равны:

$$a_{11} = 2\tilde{x}\left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1\right);\ a_{12} = k(k+1)\tilde{x};\ a_{14} = \left(\frac{2\tilde{x}^2\Delta_3}{\Delta} - \Omega^2\right);$$

$$a_{15} = -k(k+1)\frac{\tilde{x}^2\Delta_3}{\Delta};\ a_{16} = -\frac{2\tilde{x}\Delta_1}{\Delta};\ a_{21} = -\frac{\tilde{x}\Delta_2}{\Delta};\ a_{22} = -3\tilde{x};$$

$$a_{24} = -\frac{\tilde{x}^2\Delta_3}{\Delta};\ a_{25} = \left(k(k+1)\frac{\Delta_4}{\Delta} + \tilde{c}_{23} - \tilde{c}_{23}\right)\tilde{x}^2 - \Omega^2;\ a_{26} = \frac{\tilde{x}\Delta_1}{\Delta};$$

$$a_{31} = \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta};\ a_{34} = \frac{2\tilde{x}\Delta_1}{\Delta};\ a_{35} = -k(k+1)\frac{\tilde{x}\Delta_1}{\Delta};\ a_{36} = \frac{\tilde{c}_{11}}{\Delta};\ a_{41} = \frac{\tilde{\varepsilon}_{11}}{\Delta};$$

$$a_{44} = -\frac{2\tilde{x}\Delta_2}{\Delta};\ a_{45} = k(k+1)\frac{\tilde{x}\Delta_2}{\Delta};\ a_{46} = \frac{\tilde{e}_{11}}{\Delta};\ a_{52} = \frac{1}{\tilde{c}_{55}};\ a_{53} = -\frac{\tilde{x}\tilde{e}_{53}}{\tilde{c}_{55}};$$

$$a_{54} = -\tilde{x};\ a_{55} = \tilde{x};\ a_{63} = k(k+1)\frac{\tilde{x}\tilde{e}_{53}}{\tilde{c}_{55}};\ a_{64} = -k(k+1)\frac{\tilde{x}^2\Delta_5}{\tilde{c}_{55}};\ a_{66} = -2\tilde{x}.$$

Здесь введены обозначения: $\Omega = \omega h\sqrt{\frac{\rho}{\lambda}};\ \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda};\ \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\lambda}};\ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0};$

$x = \frac{r - R_0}{h};\ \varepsilon = \frac{h}{R_0};\ \tilde{x} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon x},\ h$ – половина толщины шара; ρ – плотность материала шара; R_0 – радиус срединной поверхности; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10}\ H/м^2$.

Граничные условия будут иметь вид

$$B_1 R(-1) = 0,\ B_2 R(1) = 0.$$

Матрицы B_1 и B_2 будут равны

$$B_1 = B_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Анализ результатов и выводы. Ниже приведены результаты численного анализа. На рис. 1 представлена зависимость первых шести частот собственных колебаний от относительной кривизны шара ε, при этом $k = 5$. Шар состоит из трех слоев. Толщина внешних слоев равна по $h/2$, толщина внутреннего слоя равна h. Внешний и внутренний слои – стальные со следующими характеристиками:

$$E = 21\cdot 10^{10}\ H/м^2;\quad \nu = 0,28;\quad \rho_м = 7,85\cdot 10^3\ кг/м^2\ .$$

Внутренний слой – пьезокерамика PZT 4 со следующими характеристиками:

$$c_{11} = 11,5\cdot 10^{10}\ H/м^2;\ \ c_{13} = 7,43\cdot 10^{10}\ H/м^2;\ \ c_{23} = 7,78\cdot 10^{10}\ H/м^2;$$
$$c_{33} = 13,9\cdot 10^{10}\ H/м^2;\ \ c_{55} = 2,56\cdot 10^{10}\ H/м^2;$$
$$e_{11} = 15,1\ K/м^2;\ \ e_{31} = -5,2\ K/м^2;\ \ e_{53} = 12,7\ K/м^2;$$
$$\varepsilon_{33} = 635;\ \ \varepsilon_{11} = 730;\ \ \rho_n = 7,5\cdot 10^3\ кг/м^2.$$

Для кривых введены обозначения, принятые в [7]. Так, для металлической однослойной сферы при $\varepsilon = 0$ имеем следующие формулы для частот:

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_м}} = 0;\ 2,905;\ 5,81;...,\quad n = 0,\ 1,\ 2...;$$

$$W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_м}} = 0;\ 1,606;\ 3,211;...,\quad n = 0,1,2....$$

Для однослойной сферы из пьезокерамики PZT 4:

$$U(2n) = \pi n \sqrt{\frac{1}{\rho_n}\left(c_{11} + \frac{e_{11}^2}{\varepsilon_{11}}\right)} = 0;\ 3,95;\ 7,901;...,\quad n = 0,\ 1,\ 2\ ...$$

$$U(2n+1) = 1,995;\ 6,729;\ ...,\quad n = 0,\ 1,\ 2...;$$

$$W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho_n}} = 0;\ 0,918;\ 1,835;\ ...,\quad n = 0,\ 1,\ 2....$$

Поскольку собственная частота колебаний слоистого шара ограничена сверху соответствующей собственной частотой колебаний сплошного металлического шара, а снизу собственной частотой колебаний сплошного пьезокерамического шара, для слоистого шара будем использовать аналогичные обозначения.

Сплошными линиями изображены значения собственных частот колебаний для слоистого шара, пунктирными – собственных частот колебаний однородного шара такой же толщины из пьезокерамики PZT 4. Из рис. 1 видно, что влияние наличия металлических слоев приводит к увеличению жесткости материала, то есть повышению значения собственных частот. При этом различие в первой собственной частоте для слоистого и однослойного шара незначительно.

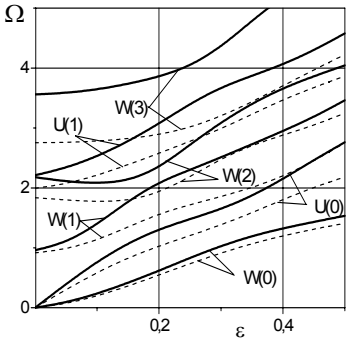


Рис. 1

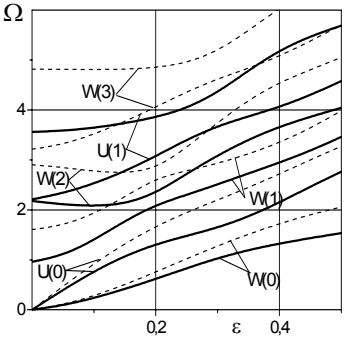


Рис. 2

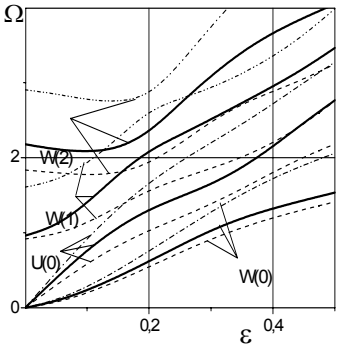


Рис. 3

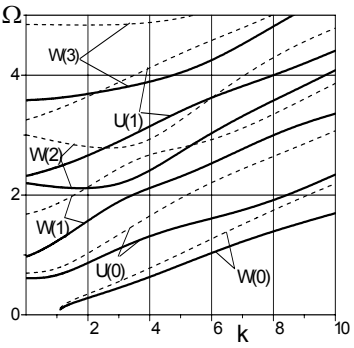


Рис. 4

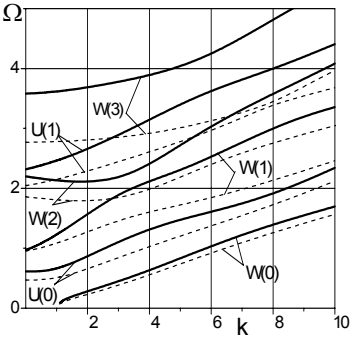


Рис. 5

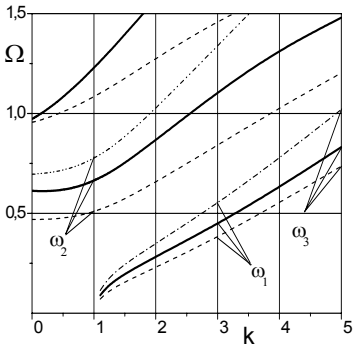


Рис. 6

На рис. 2 сплошными линиями также обозначены собственные частоты колебаний слоистого шара, а пунктирной – собственные частоты колебаний однослойного стального шара. Как видно, в этом случае значения собственных частот колебаний слоистого шара меньше соответствующих частот колебаний стального шара. Следовательно, частота собственных колебаний слоистого шара лежит в некотором "коридоре" между собственной частотой колебаний однослойного шара из пьезокерамики и собственной частотой колебаний однослойного шара из стали. Это иллюстрирует рис. 3, где сплошной линией обозначены собственные частоты колебаний слоистого шара, пунктирной – собственные частоты колебаний шара из пьезокерамики, штрихпунктирной – собственные частоты колебаний шара из стали. Материал и геометрия шара те же.

На рис. 4 и 5 представлена зависимость собственных частот колебаний от числа k. Сплошной линией обозначены собственные частоты колебаний слоистого шара. На рис. 4 и 5 штриховой линией обозначены частоты для сплошного шара из пьезокерамики PZT 4 и частоты колебаний для сплошного шара из стали соответственно. Значение параметра $\varepsilon = 0,25$. Как видно из рис. 4, для первой собственной частоты расхождение в собственных частотах для слоистого и сплошного шара незначительно. Для более высоких частот различие становится существенным.

Анализируя рис. 4 и 5, можно определить собственные частоты колебаний полого шара. Собственные частоты соответствуют нечетным значениям k. Значения первых пяти собственных частот колебаний полого пьезокерамического шара из пьезокерамики PZT 4 приведено в [9]. В этой работе для решения задачи о собственных колебаниях полого однородного пьезокерамического шара использовался метод степенных рядов. Сравнение результатов, полученных в данной работе, с результатами, полученными в работе [9], приведено в табл. 1.

Таблица 1 – **Сравнение результатов для полого шара**

№ частоты	Значение собственной частоты, полученное в данной работе	Значение собственной частоты, полученное в [9]	Относительное расхождение, %
1	0,4768	0,4770	0,04
2	0,7200	0,7200	0,00
3	0,9325	0,9320	0,05
4	1,2250	1,2250	0,00
5	1,4420	1,4420	0,00
1	0,4768	0,4770	0,04

Значения первых пяти частот собственных колебаний полого слоистого шара, а также сравнение с соответствующими частотами собственных колебаний сплошных шаров, приведены в табл. 2.

Таблица 2 – **Сравнение результатов для полого слоистого шара и сплошных шаров**

№ частоты	Многослойный шар	k	Сплошной шар из PZT 4	k	Относительное расхождение с соответствующей частотой слоистого шара, %	Сплошной стальной шар	k	Относительное расхождение с соответствующей частотой слоистого шара, %
1	0,4455	3	0,3800	3	14,7	0,5490	3	23,2
2	0,6692	1	0,5100	1	23,2	0,7770	1	17,0
3	0,8314	5	0,7360	5	11,5	1,0200	5	22,7
4	1,2260	7	1,0420	3	–	1,3390	3	–
5	1,2290	1	1,0850	1	–	1,5100	7	–

Также как и для сплошного шара, первая собственная частота соответствует не первой, а третей форме колебаний. У первых трех частот совпадают формы колебаний для сплошного и слоистого шаров. Для последующих частот формы различаются. Поэтому в табл. 2 приведено относительное расхождение между соответствующими частотами только для собственных частот с совпадающими формами колебаний. Эти частоты представлены на рис. 6.

Как видно из приведенных таблиц и проведенного анализа численных результатов, данная численно-аналитическая методика позволяет эффективно и с большой степенью точности решать задачи о колебаниях неоднородных толстостенных конструктивных элементов сферической формы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Борисейко В. А.*** Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы / В. А. Борисейко, А. Ф. Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1971. – Вып. 11. – С. 86 – 89.
2. ***Борисейко В. А.*** Связанные электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы в сжимаемой жидкости / В. А. Борисейко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1972. – Вып. 12. – С. 111 – 114.
3. ***Борисейко В. А.*** Электроупругие колебания толстостенной пьезокерамической сферы / В. А. Борисейко, А. Ф. Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций.– 1974. – Вып. 14. – С. 121 – 126.
4. ***Григоренко Я. М.*** Статика анизотропных толстостенных оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова. – К.: Вища шк., 1985. – 190 с.
5. ***Григоренко Я. М.*** Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академпериодика, 2006. − 472 с.
6. ***Карнаухов В. Г.*** Термоэлектромеханическое поведение вязкоупругих пьезокерамических тел при гармоническом возбуждении / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1980. – Вып. 20. – С. 6 – 10.
7. ***Лазуткин В. Н.*** Колебания полого пьезокерамического шара / В. Н. Лазуткин // Акуст. журнал. – 1976. – Т. 22, №3. – С. 393 – 396.
8. ***Лоза И. А.*** Осесимметричные колебания пьезокерамического полого шара при радиальной поляризации / И. А. Лоза, Н. А. Шульга // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1984. – Т. 20, № 2. – С. 3 – 8.
9. ***Лоза И. А.*** Вынужденные осесимметричные колебания пьезокерамического полого шара при электрическом способе возбуждения / И. А. Лоза, Н. А. Шульга // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1990. – 26, № 6. – С. 16 – 21.
10. ***Ляв А.*** Математическая теория упругости / А. Ляв. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 675 с.
11. ***Шульга Н. А.*** Радиальные электроупругие колебания пьезокерамического полого шара / Н. А. Шульга // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. – 20 – 25.

12. ***Шульга Н. А.*** Об электроупругих колебаниях пьезокерамического шара с радиальной поляризацией / Н. А. Шульга // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1986. – 22, № 6. – С. 3 – 7.

13. ***Grigorenko Ya. M.*** Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basic of different models / Ya. M. Grigorenko, A. Ya. Grigorenko, G. G. Vlaikov. – K.: Akademperiodika. − 2009. – 549 p.

14. ***Grigorenko A. Ya.*** Stress-strain state of shallow shells with rectangular planform and varying thickness: Refined formulation / A. Ya. Grigorenko, N. P. Yaremchenko // Int. Appl. Mech. – 2007. – Vol. 41, № 10. – P. 1132 − 1141.

15. ***Grigorenko A. Ya.*** Using Spline-Approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of sick-walled orthotropic cylinders / A. Ya. Grigorenko, T. L. Efimova // Int. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 44, №10. – P.1137 − 1147.

16. ***Shul'ga N. A.*** Studying the Electroelastic Deformation of Layer under Mechanical Loading by the Method of Characteristics / N. A. Shul'ga, L. O. Grigorieva // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 1. – P. 82 – 89.

17. ***Shul'ga N.A.*** Radial Electromechanical Non-Stationary Vibrations of a hollow Piezoceramic Cylinder under Elastic Excitation / N. A. Shul'ga, L. O. Grigorieva // Int. Applied Mechanics. – 2009. – 45, № 2 – P. 230 – 235.

18. ***Shul'ga N. A.*** On Electroelastic Non-Stationary Vibrations of a Piezoceramic Layer / N. A. Shul'ga, L. O. Grigorieva // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 3. – P. 373 – 381.

19. ***Shul'ga N. A.*** Radial Elaso-Electrtic Nonstationary Oscillations of Piezoceramic Cylinder under Mechanical Loading / N. A. Shul'ga, L. O. Grigorieva // Int. Appl. Mech. – 2009. – Vol. 45, № 4. – P. 466 – 471.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев, Украина,
Национальный транспортный университет
Киев, Украина

Поступила в редколегію 01.12.2010

О. Я. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук,
І. А. Лоза, канд. фіз.-мат. наук

ВІСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПОРОЖНЬОЇ НЕОДНОРІДНОЇ КУЛІ З П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМИ ШАРАМИ

Досліджена задача про власні осесиметричні коливання неоднорідних по товщині порожнистих куль з шарами, поляризованими у радіальному напрямі. Початкова задача теорії електропружності в частинних похідних зводиться до крайової задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівняннях за допомогою подання компонент тензора напружень, векторів переміщень компонент електричної індукції та електростатичного потенціалу у рядах за поліномами Лежандра і розв'язується стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку.

Ключові слова: *шаруватий п'єзокерамічна сфера, вісесиметричні власні коливання, спектр власних частот.*

A. Ya. Grigorenko, Professor, I. A. Loza, Associate Professor

AXISYMMETRICAL VIBRATIONS OF HOLLOW MULTYLAYERED SPHERE WITH PIZOCERAMIC LAYS

Problem about axisymmetrical natural vibrations of hollow multilayered sphere with piezoceramic lays polarized in radial direction is considered. The initial problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives after expand the stress tensor components displacement vector, electric induction components and electrostatic potential components by Legendre polynomials series is reduced to the boundary value problem for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The problem obtained is solved by stable numerical method of discrete orthogonalisation coupled with the incremental search method.

Keywords: *multilayered piezoceramic sphere, axisymmetrical natural vibrations, natural frequency spectrum.*