ISSN 2079–1836
2011, вип. 15

УДК 539.3

К. И. Шнеренко, д-р техн. наук, В. Ф. Годзула, канд. физ.-мат. наук

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Приведены дискретные аналоги краевых задач двумерной уточненной теории анизотропных оболочек. Изучены зависимости величин коэффициентов концентрации напряжений от размеров отверстий и изменения сдвиговой жесткости.

Ключевые слова: *тонкие оболочки, анизотропия, композит, межслоевой сдвиг, напряженное состояние, концентрация напряжений.*

Постановка задачи. В работах [1 – 3] приведены постановки и методы решения задач о напряженном состоянии тонкостенных оболочечных конструкций в рамках различных расчетных схем [4], учитывающих специфические особенности деформирования композитных материалов. В связи с развитием вычислительной техники возникла необходимость разработки эффективных численных методов решения широкого класса двумерных задач с применением наиболее общих расчетных схем [4, 5].

В качестве разрешающих уравнений для произвольной непологой оболочки из композитного материала можно выбрать следующие [1].

Уравнения равновесия в усилиях и моментах в криволинейной системе координат (α,β), линии которых могут не совпадать с направлениями главных кривизн оболочки

$$-\left\{\frac{\partial BT_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2S_{12}}{\partial\beta}\right\}=ABX,\quad \begin{pmatrix}1,\alpha,A,X\\2,\beta,B,Y\end{pmatrix};$$

$$-\left\{\frac{\partial BG_1}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}G_2+\frac{1}{A}\frac{\partial A^2H_{12}}{\partial\beta}-ABQ_1\right\}=0; \qquad (1)$$

$$-\left\{\frac{\partial BQ_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial AQ_2}{\partial\beta}-AB\left(k_\alpha T_1+k_\beta T_2-2k_{\alpha\beta}S_{12}\right)\right\}=ABZ;$$

$$\begin{pmatrix}1,\alpha,A\\2,\beta,B\end{pmatrix},\quad (\alpha,\beta)\in\Omega.$$

Подстановки

© К. И. Шнеренко, В. Ф. Годзула, 2011

$$\begin{pmatrix}1,\alpha,A,X\\2,\beta,B,Y\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}1,\alpha,A\\2,\beta,B\end{pmatrix}$$

определяют соответственно второе и пятое уравнения системы (1). Здесь Ω – область координатной поверхности оболочки; $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$; Γ – граница области Ω. Остальные обозначения в (1) соответствуют принятым в [1].

Усилия и моменты, входящие в уравнения равновесия, определяются по формулам

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12}; \tag{2}$$

$$G_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12} \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$H_{12} = D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}; \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13} \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Геометрические соотношения имеют вид

$$\varepsilon_{12} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right) - 2k_{\alpha\beta}w;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + k_\alpha w, \quad \begin{pmatrix}1,\alpha,A,u\\2,\beta,B,v\end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}, \quad \begin{pmatrix}1,\alpha,A,u\\2,\beta,B,v\end{pmatrix}; \tag{3}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha} + \frac{\gamma_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}, \quad \begin{pmatrix}1,\alpha,A\\2,\beta,B\end{pmatrix};$$

$$2\chi_{12} = \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\gamma_1}{A}\right) + \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\gamma_2}{B}\right).$$

В (2), (3) коэффициенты B_{ij}, D_{ij}, K_i – обобщенные жесткости; $\vec{\varphi} = \{u, v, w, \gamma_1, \gamma_2\}$ – искомая вектор-функция обобщенных перемещений. Для оболочек, изготовленных из анизотропного материала, обобщенные жесткости могут быть выражены через приведенные упругие константы материала [1, 3].

Метод решения задач. Уравнения дискретной задачи, которая ставится в соответствие задаче (1) – (3) в параметрическом представлении, имеют вид [5]

$$L_i(\vec{\varphi}) \equiv S\sum_{l=1}^{4}\sum_{j=1}^{k}\Lambda_j^i\left(c_j,\varepsilon,\chi,\vec{x}_l\right)-f_i,\quad \left(i=\overline{1,5}\right),\quad k=\begin{cases}8, i=1,2\\ 7, i\neq 1,2\end{cases}. \tag{4}$$

Здесь $\vec{\varphi}=\{u,v,w,\gamma_1,\gamma_2\}$ – искомая сеточная вектор-функция, определенная в области $\overline{w}=\left\{(i,j),\ i=\overline{1,n_1+1},\ j=\overline{1,n_2+1}\right\}$; $\overline{w}$ – множество узлов, образованных пересечением координатных линий $\alpha^{(i)}$ и $\beta^{(j)}$ с шагами h_1, h_2 по направлениям α, β: $\alpha^{(i)}=\alpha^{(i-1)}+h_1$, $\beta^{(j)}=\beta^{(j-1)}+h_2$, $h_1=\left(\alpha^{(n_1)}-\alpha^{(0)}\right)/n_1$, $h_2=\left(\beta^{(n_2)}-\beta^{(0)}\right)/n_2$; ε,χ,f_i – аппроксимации геометрических соотношений (3) и правых частей (1); $\vec{x}=\vec{x}_l(\alpha_1,\alpha_2)$ – вектор с компонентами α_1,α_2, принимающими значения ± 1; операторы Λ_j^i приведены в работе [1], для них используются общепринятые обозначения теории разностных схем [5].

$$\begin{aligned} c_1&=hc_{1111}, \quad c_2=hc_{2222};\\ c_3&=hc_{1212}, \quad c_4=hc_{1122};\\ c_5&=hc_{1112}, \quad c_6=hc_{2212};\\ c_7&=hc_{1313}, \quad c_8=hc_{2323}. \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначения (5) соответствуют принятым в [1] для представления упругого потенциала.

Аппроксимации геометрических соотношений (3) определяются согласно равенств

$$\varepsilon_1=a\frac{u^{\alpha_1}-u}{\alpha_1 h_1}+bv+cw\equiv a_{i,j}\frac{u_{i+\alpha_1,j}-u_{i,j}}{\alpha_1 h_1}+b_{i,j}v_{i,j}+c_{i,j}w_{i,j},$$

где $a=\dfrac{1}{A};\qquad b=\dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial\beta};\quad c=k_\alpha;\quad \chi_{12}=a_1\dfrac{\tilde{\gamma}_2^{\alpha_1}-\tilde{\gamma}_2}{\alpha_1 h_1}+b_1\dfrac{\tilde{\gamma}_1^{\alpha_2}-\tilde{\gamma}_1}{\alpha_2 h_2}$

и $a_1=\dfrac{B}{A};\quad b_1=\dfrac{A}{B};\qquad \tilde{\gamma}_1=\dfrac{\gamma_1}{A};\quad \tilde{\gamma}_2=\dfrac{\gamma_2}{B}.$

Правые части f_i в (4), например, для $i=1$, определяются таким образом – $f_1=ABX$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что: 1) уравнения дискретной задачи (4) аппроксимируют соответствующие им уравнения равновесия и краевые условия (в равномерной метрике, на решении); 2) дискретная задача является самосопряженной, а матрица алгебраической задачи – симметричной. Поэтому для решения алгебраической задачи можно применять эффективные как прямые, так и итерационные численные методы.

Численные результаты. В качестве примера определялось напряженное состояние трансверсально-изотропной сферической оболочки радиуса R, толщиной h с немалым круговым отверстием радиуса r_0. Оболочка нагружена внутренним давлением интенсивности P_0. Полярная геодезическая система координат (ρ,θ) связывалась со срединной поверхностью так, чтобы контур отверстия совпадал с линией $\rho=\rho_0$. Кривизны и коэффициенты Ляме срединной поверхности оболочки равны

$$k_\rho = k_\theta = \frac{1}{R}; \qquad k_{\rho\theta} = 0; \qquad A = 1; \quad B = R\sin\frac{\rho}{R}.$$

Граничные условия на контуре отверстия ($\rho=\rho_0$) представим в виде

$$T_\rho = -\frac{P_0}{2}\left(R - r_0\sin\varphi_0\right); \quad Q_\rho = -\frac{P_0 r_0}{2}\cos\varphi_0; \; S_{\rho\theta} = G_\rho = H_{\rho\theta} = 0, \qquad (6)$$

а вдали от отверстия $\left(\rho=\rho_0+3r_0\right)$ примем [1]

$$u_\rho = u_\theta = w = G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \qquad (7)$$

Здесь φ_0 – угол между направлениями нормалей к поверхности оболочки в центре отверстия и на его контуре.

Значения коэффициентов концентрации окружных усилий K_1 и моментов K_2 на контуре отверстия в оболочке вычисляются по формулам

$$K_1 = 1 + \frac{T_\theta}{P}; \quad K_2 = \frac{6G_\theta}{Ph},$$

где $P = \dfrac{P_0 R}{2}$ – максимальное усилие в оболочке без отверстия.

Расчеты выполнены с помощью вычислительного алгоритма, где при решении систем уравнений (4), (6), (7) использован метод квадратных корней Холецкого [6]. За исходную выбиралась оболочка с параметрами

$$\frac{R}{h} = 30; \quad \frac{r_0}{h} = 1{,}5; \quad \frac{G'}{E} = 0{,}05; \quad \nu = 0{,}3.$$

В табл.1 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений K_1 и K_2 для различных величин $\dfrac{r_0}{h}$. С увеличением размера отверстия концентрация напряжений на его контуре существенно увеличивается. Так,

при изменении $\frac{r_0}{h}$ в 10 раз ($1,5 \le \frac{r_0}{h} \le 15$) наибольшие напряжения возрастают в 2,9 раза.

Таблица 1 – **Зависимость концентрации напряжений от размера отверстия**

$\frac{r_0}{h}$	K_1	K_2
1,5	2,28	0,69
3,0	2,82	0,86
6,0	4,12	1,16
12,0	6,59	1,19
15,0	7,54	1,09
20,0	8,42	0,82
24,0	8,16	0,55

В табл. 2 представлена зависимость напряженного состояния на контуре отверстия в оболочке от изменения сдвиговой жесткости материала. Результаты свидетельствуют о необходимости привлекать уточненные теории оболочек для податливых на сдвиг элементов тонкостенных конструкций из композитных материалов.

Таблица 2 – **Зависимость напряженного состояния от сдвиговой жесткости**

E/G'	10	100	1000
K_1	8,25	9,91	17,90
K_2	0,82	0,81	0,68

Выводы. Развит эффективный численный метод решения двумерных задач о распределении напряжений около отверстий в композитных оболочках. Установлено, что с увеличением размера отверстия в 10 раз концентрация напряжений на его контуре увеличивается в 2,9 раза, а с изменением сдвиговой жесткости материала $\frac{E}{G'}$ от 10 до 1000 – в 2,2 раза.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Гузь А. Н.*** Методы расчета оболочек / А. Н Гузь., И. С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов, Вик. Н. Чехов, К. И. Шнеренко: в 5-ти т. Т.1: Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с.

2. ***Гузь А. Н.*** Тонкие оболочки из композитных материалов, ослабленные отверстиями / А. Н Гузь, К. И. Шнеренко // Механика композит. материалов. – 1979. – №5. – С. 819 – 834.

3. Механика композитов: В 12-ти т. Т.7. Концентрация напряжений / Под. ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского и В. П. Шевченко. – К.: А.С.К, 1998. – 387 с.

4. ***Шнеренко К. И.*** Анализ расчетных схем для оболочек из композитных материалов с отверстиями / К. И. Шнеренко // Прикл. механика. – 1981. – Т.17, №4. – С. 24–30.

5. ***Самарский А. А.*** Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 552 с.

6. ***Годзула В. Ф.*** К задачам статики непологих анизотропных оболочек с отверстиями / В. Ф. Годзула, А. Н. Гузь, К. И. Шнеренко // Прикл. механика. – 1988. – Т.24, №9. – С. 22 – 30.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины
Киев,Украина

Поступила в редколлегию 10.07.2010

К. І. Шнеренко, д-р техн. наук, В. Ф. Годзула, канд. фіз.-мат. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ З КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ З КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРУЖЕНЬ

Наведені дискретні аналоги крайових задач двовимірної уточненої теорії анізотропних оболонок. Вивчені залежності величини коефіцієнтів концентрації напружень від розмірів отворів і зміни зсувної жорсткості.

Ключові слова: *тонкі оболонки, анізотропія, композит, міжшаровий зсув, напружений стан, концентрація напружень.*

K. I. Shnerenko, Professor; V. F. Godzula, Associate Professor

INVESTIGATION OF THE STRESS STATE OF THE SHELL STRUCTURES FROM COMPOSITE MATERIALS WITH STRESS CONCENTRATORS

Discrete analogues of the boundary-value problems for the two-dimensional refined anisotropic shell theory are presented. Dependencies of values of the stress concentration factors on hole sizes and on a change in shear stiffness are studied.

Keywords: *thin shells, anisotropy, composite, interlayer shear, stress state, stress concentration.*