ISSN 2079–1836
2015, вип. 24

УДК 539.3

О. И. Власов, *А. С. Каиров*, *д-р техн. наук*

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ПРИСОЕДИНЁННЫМИ ТВЁРДЫМИ ТЕЛАМИ

Приведены результаты исследований собственных частот и форм свободных колебаний тонких упругих подкреплённых ребрами цилиндрических оболочек вращения с присоединёнными твёрдыми телами. Задача решается в линейной постановке методом Ритца с учётом дискретного размещения рёбер.

Ключевые слова: *свободные колебания, цилиндрические оболочки, подкрепляющие рёбра, присоединённые твёрдые тела***.**

Введение. Тонкостенные оболочечные конструкции широко применяются в современной технике, что вызывает особый интерес к задачам исследования свободных колебаний конструктивно неоднородных оболочек и определяет актуальность рассматриваемой проблемы.

Наличие рёбер жёсткости, присоединённых твердых тел и их дискретное размещение создает локальную инерционную неоднородность оболочечной конструкции и оказывает существенное влияние на её основные динамические характеристики. Учет указанных факторов связан с дальнейшим исследованием свободных колебаний неоднородных оболочечных систем с конструктивными особенностями. Обзор исследований, посвященных данной проблеме, приведен в работах [1, 3, 6].

Целью работы является исследование влияния подкрепляющих рёбер с учетом их дискретного размещения и присоединённых твердых тел на частоты и формы свободных колебаний конструктивно неоднородных оболочек вращения.

Постановка задачи. Динамическое поведение и деформация оболочки рассматриваются на основе линейной теории тонких упругих оболочек и стержней в рамках гипотез Кирхгофа – Лява и Кирхгофа – Клебша.

Рассматриваемая оболочка подкреплена I стрингерами, J шпангоутами и несет на своей поверхности присоединённые твердые тела, массы которых M_υ ($\upsilon = 1, 2, ..., Q$). Начало координат расположено на торце оболочки так, что ось α_1 направлена вдоль образующей, α_2 – по окружности. Система координат подкрепляющих рёбер и оболочки совпадает по направлению с линиями главных кривизн срединной поверхности. Подкрепляющие рёбра рассматриваются как дискретные упругие стержни, обладающие жёсткостью на изгиб в радиальной и продольной плоскостях, на

© О. И. Власов, А. С. Каиров, 2015

растяжение-сжатие и крутильной жёсткостью. Тела расположены на поверхности оболочки в точках $\Omega_v(\alpha_1^{(v)}, \alpha_2^{(v)})$.

Уравнения относительных деформаций оболочки вращения запишутся в виде:

$$e_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} - \frac{u_3}{R_1};\quad e_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \frac{u_3}{R_2};$$

$$e_3 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right);\quad e_4 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}\right); \qquad (1)$$

$$e_5 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}\right);$$

$$e_6 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}\right) + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right).$$

Углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки относительно тангенциальных осей (вокруг касательных к координатным линиям α_1 и α_2) выражаются через компоненты вектора перемещений уравнениями:

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + \frac{u_1}{R_1}\right);\quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{u_2}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Деформации рёбер определяются через перемещения центров тяжести поперечных сечений следующими зависимостями:

$$e_{1i} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_{1i}}{\partial \alpha_1} - \frac{u_{3i}}{R_1};\quad e_{4i} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_{3i}}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{u_{3i}}{R_1^2};\quad e_{6i} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_{\text{кр}1i}}{\alpha_1}; \qquad (3)$$

$$e_{2j} = \frac{1}{A_{2j}}\frac{\partial u_{2j}}{\partial \alpha_2} - \frac{u_{3j}}{R_2};\quad e_{5j} = \frac{1}{A_{2j}^2}\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial \alpha_2^2} + \frac{u_{3j}}{R_2^2};\quad e_{6j} = \frac{1}{A_{2j}}\frac{\partial \theta_{\text{кр}2j}}{\partial \alpha_2}.$$

Деформированное состояние рёбер кроме осевых и нормальных составляющих перемещений и углов поворота определяется также углами закручивания. Согласно принятым гипотезам радиальные прогибы рёбер и обшивки постоянны по высоте сечений, а соответствующие углы поворота нормали к обшивке и закручивания рёбер равны. Условия жёсткого соединения рёбер и обшивки позволяют установить зависимости между компонентами перемещений их нейтральных осей, откуда:

$$u_{1i} = u_1(\alpha_1, \alpha_{2i}) + \eta_{1i}\theta_1(\alpha_1, \alpha_{2i});\quad u_{3i} = u_3(\alpha_1, \alpha_{2i});$$

$$\theta_{1i} = \theta_1(\alpha_1, \alpha_{2i});\quad \theta_{\text{кр}1i} = \theta_2(\alpha_1, \alpha_{2i}); \qquad (4)$$

$$u_{2j} = u_2(\alpha_{1j}, \alpha_2) + \eta_{2j}\theta_2(\alpha_{1j}, \alpha_2);\quad u_{3j} = u_3(\alpha_{1j}, \alpha_2);$$

$$\theta_{2j} = \theta_2(\alpha_{1j}, \alpha_2);\quad \theta_{\text{кр}2j} = \theta_1(\alpha_{1j}, \alpha_2),$$

где $u_1(\alpha_{1j},\alpha_{2i})$, $u_2(\alpha_{1j},\alpha_{2i})$, $u_3(\alpha_{1j},\alpha_{2i})$ – компоненты перемещений срединной поверхности обшивки оболочки на линии контакта ребра; $\theta_1(\alpha_{1j},\alpha_{2i})$, $\theta_2(\alpha_{1j},\alpha_{2i})$ – углы поворота нормали к поверхности оболочки относительно координатных осей α_1 и α_2; $\theta_{кр1i}$, $\theta_{кр2j}$, θ_{1i}, θ_{2j} – углы закручивания рёбер и поворота их поперечных сечений; η_{1i}, η_{2j}, α_{2i}, α_{1j} – эксцентриситеты и координаты линий сопряжения рёбер с обшивкой.

Коэффициенты первой квадратичной формы подкрепляющих рёбер равны соответствующим характеристикам оболочки: $A_{1i}=A_1$ и $A_{2j}=R_j$.

Метод решения. Задача решается методом Ритца. Согласно принципа Остроградского – Гамильтона решение сводится к вариационному уравнению $\delta\Theta=0$, где функционал Лагранжа $\Theta=K-\Pi$ для неоднородной оболочечной системы состоит из суммы составляющих функций обшивки $\Theta^{(0)}$, стрингеров $\Theta^{(1)}$, шпангоутов $\Theta^{(2)}$ и присоединённых твердых тел $\Theta^{(3)}$; K, Π – потенциальная и кинетическая энергии дискретно подкреплённой оболочки с присоединёнными телами.

Составляющие обобщенной функции Лагранжа запишутся в виде:

$$\Theta^{(0)}=\frac{1}{2}\iint_S\left(\omega^2\rho h\sum_{k=1}^{3}u_k^2-\frac{E\,h}{1-\nu^2}\sum_{p=1}^{6}\sum_{q=1}^{6}a_{pq}e_pe_q\right)A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2;$$

$$\Theta^{(1)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{I}\int_{\alpha'}^{\alpha''}\left[\omega^2\rho_{1i}\left(F_{1i}\sum_{k=1}^{3}u_{ki}^2+I_{кр1i}\theta_{кр1i}^2\right)-\sum_{p=1}^{6}\sum_{q=1}^{6}a_{pqi}e_{pi}e_{qi}\right]A_1d\alpha_1; \quad (5)$$

$$\Theta^{(2)}=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{J}\int_0^{2\pi}\left[\omega^2\rho_{2j}\left(F_{2j}\sum_{k=1}^{3}u_{kj}^2+I_{кр2j}\theta_{кр2j}^2\right)-\sum_{p=1}^{6}\sum_{q=1}^{6}a_{pqj}e_{pj}e_{qj}\right]A_2d\alpha_2;$$

$$\Theta^{(3)}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{\upsilon=0}^{Q}\left\{M_\upsilon\sum_{k=1}^{3}\left[u_{k\upsilon}(\Omega_\upsilon)\right]^2\right\}.$$

В соотношениях (1)–(5) приняты следующие обозначения: ω – круговая частота собственных колебаний; S, h – площадь поверхности и толщина оболочки; A_1, A_2, R_1, R_2 – коэффициенты Ляме и главные радиусы кривизны срединной поверхности; F_{1i}, I_{1i}, $I_{кр1i}$ – площади поперечных сечений стрингеров, их моменты инерции относительно окружной координаты, моменты инерции при кручении; F_{2j}, I_{2j}, $I_{кр2j}$ – аналогичные характеристики шпангоутов; a_{pq} – коэффициенты жёсткости оболочки и подкрепляющих рёбер; E, G_{12}, ν, ρ – механические характеристики и плотность материала оболочки; E_{1i}, G_{1i}, ρ_{1i} – механические характеристики и плотность материала стрингеров; E_{2j}, G_{2j}, ρ_{2j} –

аналогичные механические характеристики шпангоутов; $e_{pi}, e_{pj}, e_p, u_{ki}, u_{kj}, u_k$ – компоненты деформаций и перемещений подкрепляющих рёбер и оболочки ($p=\overline{1,6}$; $k=\overline{1,3}$); α', α'' – координаты торцов оболочки; M_υ – массы присоединённых тел.

Для изотропной оболочки и подкрепляющих рёбер коэффициенты жёсткости a_{pqi} и a_{pqj} примут вид:

$$a_{11}=a_{22}=1;\quad a_{12}=a_{21}=\nu;\quad a_{33}=G_{12}(1-\nu^2)/E;$$
$$a_{44}=a_{55}=h^2/12;\quad a_{45}=a_{54}=\nu h^2/12;$$
$$a_{66}=G_{12}h^2(1-\nu^2)/(3E);$$
$$a_{11i}=E_{1i}F_{1i};\quad a_{44i}=E_{1i}I_{1i};\quad a_{66i}=G_{1i}I_{\text{кр}1i};$$
$$a_{22j}=E_{2j}F_{2j};\quad a_{55j}=E_{2j}I_{2j};\quad a_{66j}=G_{2j}I_{\text{кр}2j}.$$

Деформации оболочки и рёбер запишутся в виде

$$e_p^{(\upsilon)}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}C_{mn}^{(k)}\Phi_{(\upsilon)pmn}^{(k)}\quad (p=1,2,\ldots,6;\ \upsilon=0,1,2). \tag{6}$$

Базисные функции деформаций $\Phi_{(\upsilon)pmn}^{(k)}$ зависят от геометрических параметров оболочки и приведены ниже в унифицированной форме:

$$\Phi_{(0)1mn}^{(1)}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(1)}}{d\alpha_1};\quad \Phi_{(0)2mn}^{(1)}=\frac{\varphi_{mn}^{(1)}}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{d\alpha_1};\quad \Phi_{(0)3mn}^{(1)}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(1)}}{d\alpha_2};$$
$$\Phi_{(0)4mn}^{(1)}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{\varphi_{mn}^{(1)}}{R_1}\right);\quad \Phi_{(0)5mn}^{(1)}=\frac{\varphi_{mn}^{(1)}}{A_1A_2R_1}\frac{\partial A_2}{d\alpha_1};\quad \Phi_{(0)6mn}^{(1)}=\frac{1}{A_2R_1}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(1)}}{d\alpha_2};$$
$$\Phi_{(0)1mn}^{(2)}=0;\quad \Phi_{(0)2mn}^{(2)}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(2)}}{d\alpha_2};\quad \Phi_{(0)3mn}^{(2)}=\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{\varphi_{mn}^{(2)}}{A_2}\right); \tag{7}$$
$$\Phi_{(0)4mn}^{(2)}=0;\quad \Phi_{(0)5mn}^{(2)}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial}{d\alpha_2}\left(\frac{\varphi_{mn}^{(2)}}{R_2}\right);\quad \Phi_{(0)6mn}^{(2)}=\frac{A_2}{A_1R_2}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{\varphi_{mn}^{(2)}}{A_2}\right);$$
$$\Phi_{(0)1mn}^{(3)}=-\frac{\varphi_{mn}^{(3)}}{R_1};\quad \Phi_{(0)2mn}^{(3)}=-\frac{\varphi_{mn}^{(3)}}{R_2};\quad \Phi_{(0)3mn}^{(3)}=0;$$
$$\Phi_{(0)4mn}^{(3)}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(3)}}{d\alpha_1}\right);\quad \Phi_{(0)5mn}^{(3)}=\frac{1}{A_2}\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial A_2}{d\alpha_1}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(3)}}{d\alpha_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial^2\varphi_{mn}^{(3)}}{d\alpha_2^2}\right);$$
$$\Phi_{(0)6mn}^{(3)}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(3)}}{d\alpha_2}\right);\quad \Phi_{(1)1mn}^{(1)}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi_{mn}^{(1)}}{d\alpha_1};\quad \Phi_{(1)4mn}^{(1)}=\Phi_{(1)6mn}^{(1)}=0;$$

$$\Phi^{(2)}_{(1)1mn} = \Phi^{(2)}_{(1)4mn} = \Phi^{(2)}_{(1)6mn} = 0; \quad \Phi^{(3)}_{(1)1mn} = -\frac{z^{(1)}}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi^{(3)}_{mn}}{d\alpha_1}\right) - \frac{\varphi^{(3)}_{mn}}{R_1};$$

$$\Phi^{(3)}_{(1)4mn} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\varphi^{(3)}_{mn}}{d\alpha_1}\right) + \frac{\varphi^{(3)}_{mn}}{R_1^2}; \quad \Phi^{(3)}_{(1)6mn} = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{d\alpha_1}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi^{(3)}_{mn}}{d\alpha_2}\right);$$

$$\Phi^{(1)}_{(2)2mn} = \Phi^{(1)}_{(2)5mn} = \Phi^{(1)}_{(2)6mn} = 0; \quad \Phi^{(2)}_{(2)2mn} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\varphi^{(2)}_{mn}}{d\alpha_2};$$

$$\Phi^{(2)}_{(2)5mn} = \Phi^{(2)}_{(2)6mn} = 0; \quad \Phi^{(3)}_{(2)2mn} = -\frac{z^{(2)}}{A_2^2}\frac{\partial^2\varphi^{(3)}_{mn}}{d\alpha_2^2} - \frac{\varphi^{(3)}_{mn}}{R_2};$$

$$\Phi^{(3)}_{(2)5mn} = \frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2\varphi^{(3)}_{mn}}{d\alpha_2^2} + \frac{\varphi^{(3)}_{mn}}{R_2^2}; \quad \Phi^{(3)}_{(2)6mn} = -\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial^2\varphi^{(3)}_{mn}}{d\alpha_1 d\alpha_2}.$$

При выводе базисных функций (7) бесконечно малые величины приняты равными нулю. При расчёте низших частот колебаний ввиду малости деформаций оболочки в окружном направлении ($e_2 \to 0$) для шпангоутов можно принять $a_{22\,j} = 0$.

Перемещения срединной поверхности оболочки аппроксимируются системой базисных функций

$$u_k = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} C^{(k)}_{mn}\,\varphi^{(k)}_{mn} \qquad (k = 1, 2, 3), \tag{8}$$

где $\varphi^{(k)}_{mn} = W^{(k)}_m(\alpha_1)\,\Psi^{(k)}_n(\alpha_2)\cos(\omega t)$ – линейно независимые базисные функции; $W^{(k)}_m(\alpha_1)$, $\Psi^{(k)}_n(\alpha_2)$ – координатные функции перемещений, удовлетворяющие граничным условиям на торцах; $C^{(k)}_{mn}$ – коэффициенты собственных форм.

Сходимость рядов (8) понимается в смысле обобщённых функций конечного порядка. Для подкреплённых оболочек с присоединёнными телами для трех компонентов перемещений в решении удерживалось десять членов ряда по кольцевой координате и пять членов ряда вдоль образующей.

Подставив выражения (6) и (8) в уравнения (3) и применив процедуру Ритца, из условия стационарности функционала Лагранжа получим разрешающую систему однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} C^{(k)}_{mn}\left(A^{(\eta k)}_{mn} - \lambda^2 B^{(\eta k)}_{mn}\right) = 0 \qquad (\eta = 1, 2, 3), \tag{9}$$

где $\lambda^2 = \omega^2\rho h/D$ – частотный параметр; $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – изгибная жёсткость оболочки.

При вычислении собственных чисел λ и векторов системы уравнений (9) применяется обобщенный метод вращений. Алгоритм вычисления интегралов при определении коэффициентов $A_{mn}^{(\eta k)}$ и $B_{mn}^{(\eta k)}$ выполняется численно с использованием квадратурных формул Гаусса.

Подставив найденные коэффициенты $C_{mn}^{(k)}$ в соотношения (8), определяем формы собственных колебаний оболочки, характеризующиеся числом m_1 полуволн в продольном направлении и n_1 волн в окружном направлении.

Результаты численных исследований. Численные исследования колебаний оболочечной системы выполнены для цилиндрической оболочки из стали с относительными геометрическими характеристиками $L/R = 4$, $R/h = 100$ ($h = 1$ *мм*), где R, L, h – радиус, длина и толщина оболочки. Оболочка подкреплена равноотстоящими 36 стрингерами 4x1*мм* и 2 шпангоутами 6x1 *мм* прямоугольного профиля. Для рассматриваемой оболочечной системы принято $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = \theta$. На наружной поверхности в точке с координатами $x_1 = L/2$ и $\theta_2 = 0$ расположено жёстко присоединённое твёрдое тело.

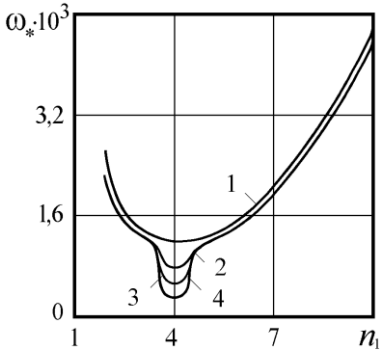


Рис. 1 – **Зависимость частотного параметра ω_* оболочечной системы от массы присоединённого тела**

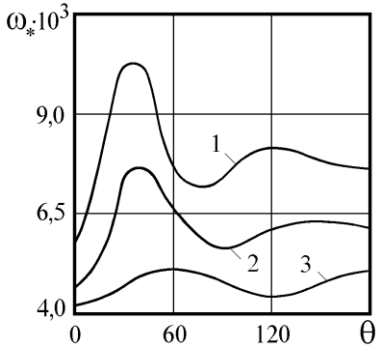


Рис. 2 – **Зависимость частотного параметра ω_* оболочечной системы от угла θ между присоединёнными телами**

На рис. 1 для шарнирно опёртой оболочки приведена зависимость безразмерного частотного параметра $\omega_* = \omega R\sqrt{\rho(1-\nu^2)/E}$, характеризующего низшую частоту колебаний, от окружных волновых чисел n_1 для различных значений массы присоединённого тела, характеризуемой отношением M_1/M_0, где M_1 – масса тела; M_0 – масса оболочки.

Кривая 1 соответствует незагруженной оболочке ($M_1/M_0 = 0$), а кривые 2–4 – отношению M_1/M_0 = 0,1; 0,3; 0,5 соответственно. Необходимо отметить, что соответствующая зависимость для основной

частоты имеет характерные участки. Низшей частоте соответствует изгибная форма с одной полуволной в продольном направлении ($m_1 = 1$).

Из приведенных результатов видно, что жёстко присоединённое тело, даже сравнительно небольшой массы, приводит к понижению и сгущению спектра частот колебаний оболочечной системы. Наибольшее влияние присоединённое тело оказывает на низшую частоту колебаний. Максимальное понижение основной частоты объясняется наибольшими нормальными прогибами u_3 и связанными с ними деформациями оболочки. С увеличением отношения M_1/M_0 низшая частота понижается в большей степени и влияние граничных условий на колебания ослабевает вследствие усиления зависимости основной частоты от локальной жёсткости оболочки в точке крепления тела. При этом высшие частоты изменяются в меньшей степени.

Общей особенностью собственных форм является локализация деформаций несущей поверхности в окрестности расположения присоединённого тела и их затуханием с удалением от него.

На неосновных частотах присоединённое тело в меньшей степени влияет на колебания. Оно демпфирует виброперемещения оболочки в своей окрестности и является гасителем колебаний для части её поверхности. При этом амплитуды колебаний уменьшаются с ростом резонансной частоты и волновых чисел m_1 и n_1. Это подтверждается экспериментальными данными, полученными для оболочек нулевой гауссовой кривизны [4].

Влияние системы присоединённых тел на колебания исследовалось на примере оболочки с двумя присоединёнными телами, расположенными в ее среднем сечении вдоль окружности. Их взаиморасположение характеризуется центральным углом θ между центрами масс присоединённых тел. Продольные координаты крепления присоединённых тел составляют $x_1 = x_2 = L/2$.

На рис. 2 приведена зависимость частотного параметра ω_* от центрального угла θ между присоединёнными телами, массы которых составляют $M_1 = M_2 = 0{,}1 \cdot M_0$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют жёстко закреплённой, шарнирно опёртой и консольно закреплённой оболочкам. Как видно из зависимости $\omega_* = f(\theta)$, при соответствующих граничных условиях, существует такой угол θ между присоединёнными телами, при котором основная частота колебаний достигает своего наибольшего и наименьшего значений.

При малых значениях угла раствора θ влияние присоединённых тел на основную частоту колебаний значительно, но с увеличением расстояния межу точками их крепления к несущей поверхности оно ослабевает. При больших значениях θ присоединённые тела практически не взаимодействуют, а частота примерно равна частоте оболочки с одним присоединённым телом. На характер волнообразования в оболочке наиболее сильно сказывается взаимное расположение присоединённых тел.

Выводы. Полученные на основе уточнённой математической модели численные результаты показывают, что присоединённые твёрдые тела оказывают существенное влияние на собственные частоты и формы колебаний тонкостенных оболочек. Выявлены новые зависимости, закономерности и физико-механические эффекты, обусловленные конструктивными неоднородностями оболочечной системы, имеющие важное практическое значение и позволяющие разработать мероприятия по улучшению её вибродинамических характеристик.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Амиро И. Я.*** Учёт дискретного размещения рёбер при изучении напряженно-деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий // Прикл. механика. − 1998. − Т. 34, № 4. − С. 3–22.
2. ***Андреев Л. В.*** Динамика пластин и оболочек с присоединёнными массами / Л. В. Андреев, А. Л. Дышко, И. Д. Павленко. − М. : Машиностроение, 1988. − 195 с.
3. ***Заруцкий В. А.*** О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек / В. А. Заруцкий // Прикл. механика. − 2001. − Т. 37, № 8. − С. 38–67.
4. ***Каиров А. С.*** О собственных колебаниях подкреплённых оболочек с присоединёнными телами / А. С. Каиров, В. П. Шевченко // Збірник наукових праць Укр. державного морського технічн. ун-ту. − 2000. − № 5 (371). − С.121–130.
5. ***Каиров А. С.*** Свободные колебания подкреплённых рёбрами конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек / А. С. Каиров, О. И. Власов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. − Д. : Ліра, 2011. − Вип. 16. − С. 134–140.
6. Колебания ребристых оболочек вращения / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, В. Н. Ревуцкий [и др.]. − К. : Наук. думка, 1988. − 172 с.

О. І. Власов, *О. С. Каіров*, *д-р техн. наук*

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ПРИЄДИНАНИМИ ТВЕРДИМИ ТІЛАМИ

Приведено результати досліджень власних частот і форм вільних коливань тонких пружних підкріплених ребрами циліндричних оболонок обертання з приєднаними твердими тілами. Задача розв'язується в лінійній постановці методом Рітца з урахуванням дискретного розміщення ребер.

Ключові слова: *вільні коливання, циліндричні оболонки, підкріплюючі ребра, приєднані тверди тіла***.**

O. I. Vlasov, *A. S. Kairov*, *Dr. Sci. (Tech.)*

NUMERICAL INVESTIGATION OF FREE VIBRATION FREQUENCIES AND MODES OF THE SHELLS OF REVOLUTION WITH ATTACHED SOLIDS

The results of thin elastic cylindrical shells with reinforced ribs and attached solid bodies free oscillations frequencies and modes studies are given. The problem solution is solved on the basis of the linear theory and the Ritz method with taking into account a discrete ribs location.

Keywords: *free vibrations, cylindrical shells, reinforcement ribs, attached bodies***.**

The thin shells are widely used as modern technical constructions. That is why the main interest should be attended to the non-homogeneous shells

constructions free oscillations problems solution. Such problems also cause the foregoing work actuality.

The position of different ribs, attached solids and their non-linear location forms the local inertial non-homogeneity and strongly influences the shells construction are the main dynamic characteristics. Taking into consideration all of the above mentioned factors depends on more strict and careful investigations of the shells systems with constructional non-homogeneity.

The main aim of this work is to investigate the influence of reinforcement ribs and attached solid bodies discrete location on the constructional non-homogeneuos rotational shells free oscillation frequencies and modes.

The shells dynamic behavior and deformation are investigated on the base of thin elastic shells linear theory by the usage of Kirchhoff – Love and Kirchhoff – Clebsch hypothesis. The reinforcement ribs are considered as elastic bars that have flexural stiffness in radial and longitudinal planes, and also have stiffness in circumferential direction. Solid bodies are strongly attached to the shells surface.

The foregoing problem should be sold by the Ritz method usage. According to the Ostrogradsky – Hamilton principle the problems solution is reduced to the variational equality. In this equality the Lagrangian for the non-homogeneuos shells system consists of the functions of surface, stringers, frames and attached solid bodies.

The results obtained by the usage of new more correct mathematical model show that reinforcement ribs and attached solid bodies strongly influence on the thin shells free oscillations frequencies and modes. The new dependencies, physics and mechanical effects, caused by the shells constructional non-homogeneity are also received. Such dependencies have an significant practical value and give an opportunity to develop special measures for improvement of shell vibrational and dynamical characteristics.

REFERENCES

1. ***Amiro I. Ya.*** The discrete ribs location accounting for the ribbed shells stress-strain state, oscillations and stability investigation / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutckiy // Applied mechanics. − 1998. − Vol. 34, № 4. − P. 3–22. (in Russian).
2. ***Andreev L. V.*** The shells and plates with attached masses dynamics / L. V. Andreev, A. L. Dyshko, I. D. Pavlenko. − M. : Mashinostroenie, 1988. − 195 p. (in Russian).
3. ***Zarutckiy V. A.*** On the complex experimental investigations of stability and oscillations of structural non-homogeneous shells / V. A. Zarutckiy // Applied mechanics. − 2001. − Vol. 37, № 8. − P. 38–67. (in Russian).
4. ***Kairov A. S.*** The reinforced shells with attached bodies free oscillations / A. S. Kairov, V. P. Shevchenko // The Ukrainian state marine university scientific journal. − 2000. − № 5 (371). − P. 121–130. (in Russian).
5. ***Kairov A. S.*** Free vibrations of structurally nonuniform cylindrical shells with reinforced ribs / A. S. Kairov, O. I. Vlasov // Problems of computational mechanics and strength of structures. − D. : Lira, 2011. − Vol. 16. − P. 134–140. (in Russian).
6. ***Amiro I. Ya.*** The ribbed rotational shells oscillations / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutckiy, V. N. Revutckiy. − K. : Nauk. dumka, 1988. − 172 p. (in Russian).

Национальный университет
кораблестроения им. адмирала Макарова
Николаев, Украина

Поступила в редколлегию 5.05.2015