

УДК 539.3

*А. Я. Григоренко, д-р физ.-мат. наук, И. А. Лоза, д-р физ.-мат. наук,
О. А. Авраменко, канд. физ.-мат. наук*

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЫХ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРАХ

Поставлена задача о распространении вынужденных осесимметричных электроупругих волн в неоднородных по толщине полых цилиндрах. Рассмотрены два вида неоднородности: кусочно-непрерывная и континуальная. Для решения этой задачи предложен эффективный численно-аналитический метод. После применения метода разделения переменных и представления решения в виде бегущих волн по длине цилиндра, начальная задача теории электроупругости в частных производных сводится к неоднородной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: осесимметричные электроупругие волны, кинематический анализ, дискретная ортогонализация.

Введение. Первые наборы частных решений дифференциальных уравнений в частных производных (уравнений Ламе) в цилиндрических координатах были построены в работах Похгамера и Кри [6, 7, 10]. К настоящему времени имеется большое количество работ, посвящённых исследованию волновой картины в бесконечном упругом цилиндре кругового поперечного сечения [2, 4, 11]. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований [3, 5]. Так, для пьезокерамического цилиндра, только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн возможно представление решения через специальные функции. Однако, при численном анализе полученного таким образом решения возникает вопрос программирования функций Бесселя, сходимости степенных рядов и пр. Учёт неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Кусочно-непрерывная неоднородность материала требует сопряжения разрешающих функций на границах раздела сред, что приводит к увеличению числа уравнений. На сегодняшний день всё более широкое применение находят так называемые функционально градиентные пьезоэлектрические материалы (ФГПМ) сочетающие преимущества биморфов и лишённые проблемной зоны – поверхности соединения материалов с различными коэффициентами

температурного расширения. Однако, в этом случае, модули материала являются не константами, а функциями по одной из координат [8, 9]. Это составляет серьезную проблему для применения многих численных методов.

В данной статье для решения задач о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в неоднородных по толщине полых цилиндрах предложен эффективный численно-аналитический подход.

Постановка задачи. Основные уравнения. Осесимметричные продольные уравнения движения i -го слоя в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} = 0; \quad E_r^i = -\frac{\partial \varphi^i}{\partial r}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \varphi^i}{\partial z}. \quad (2)$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} u_r^i; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}. \quad (3)$$

Здесь σ_{jk}^i – компоненты тензора напряжений; ρ^i – плотность материала; u_j^i – компоненты вектора перемещений; D_j^i – компоненты вектора электрической индукции; E_j^i – компоненты вектора напряженности электрического поля; φ^i – электростатический потенциал; ε_{jk}^i – компоненты тензора деформаций. В дальнейшем индекс i будем опускать.

Физические соотношения для пьезокерамического материала, поляризованного в осевом направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{11}E_z; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; \\ \sigma_{rz} &= 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r; \\ D_r &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + e_{11}E_r; \\ D_z &= e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + e_{33}E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь c_{ij} – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij} – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Если материал слоя функционально градиентный, то указанные выше компоненты являются функциями радиальной координаты:

$$c_{ij} = c_{ij}^0 r^n, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 r^n, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 r^n,$$

где c_{ij}^0 , e_{ij}^0 и ε_{ij}^0 значения соответствующих модулей на внешней поверхности цилиндра, а значение n определяется экспериментально и обычно находится в пределах $-2 \leq n \leq 2$.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующие:

– механические граничные условия: поверхности либо свободны от внешних усилий $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$, либо ко внутренней поверхности подведено гармонически изменяющееся давление $\sigma_r|_{r=R-h} = P e^{i(\omega t - kz)}$;

– электрические граничные условия: поверхности цилиндра либо покрыты тонкими электродами, к которым подведена гармонически изменяющаяся разность потенциалов $\varphi|_{r=R \pm h} = \pm V_0 e^{i(\omega t - kz)}$, либо поверхности неэлектродированы, т. е. $D_r = 0$.

Здесь R_0 – радиус срединной поверхности цилиндра; h – половина суммарной толщины цилиндра.

Разрешающий вектор выбираем смешанного типа, в его состав входят те компоненты тензора механических напряжений, векторов механических и электрических перемещений, а также электростатического потенциала, через которые формулируются условия на боковых поверхностях цилиндра и на поверхностях раздела материалов:

$$\mathbf{R} = \{ \sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r \}. \quad (5)$$

Разрешая систему (1)–(4) относительно вектора \mathbf{R} , после ряда преобразований получим:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(\frac{c_{12}}{c_{11}} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_4}{r^2 c_{11}} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\Delta_1}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\frac{\Delta_2}{c_{11}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z; \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{15}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{c_{55}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{c_{11}} \sigma_{rr} - \frac{e_{33}}{c_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{c_{12}}{rc_{11}} u_r - \frac{c_{13}}{c_{11}} \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{e_{11}}{\Delta} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{\Delta} D_r; \\
\frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{13}}{c_{11}} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} + \frac{\Delta_6}{c_{11}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\Delta_5}{rc_{11}} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\Delta_3}{c_{11}} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r.
\end{aligned} \tag{6}$$

Решение задачи. Решение будем искать в виде волн, бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r, z, t) &= i\lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad \sigma_{rz}(r, z, t) = \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\
\varphi(r, z, t) &= h\sqrt{\lambda/\varepsilon_0} \varphi(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad u_r(r, z, t) = ihu_r(r) e^{i(kz - \omega t)}; \\
u_z(r, z, t) &= hu_z(r) e^{i(kz - \omega t)}; \quad D_r(r, z, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz - \omega t)}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Используя представление (7), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных можно свести к краевой задаче [1] для уравнения

$$\frac{dR}{dx} = A(x, k, \Omega) R \tag{8}$$

с неоднородными граничными условиями

$$B_i R(-1) = C_i, \quad B_j R(1) = C_j, \tag{9}$$

где векторы C_i и C_j имеют вид:

$$C_1^T = \{P, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad C_2^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \quad C_3^T = \{0, 0, -1, 0, 0, 0\}, \quad C_4^T = \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}.$$

Здесь были введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^0}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}^0}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h},$$

где h – половина толщины цилиндра; ρ – плотность материала цилиндра; R_0 – радиус срединной поверхности; ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10} \text{ H/m}^2$.

Решение задачи (8), (9) может быть найдено с помощью метода дискретной ортогонализации.

Результаты численного анализа. В качестве примера рассматривается трехслойный цилиндр, два внешних слоя которого являются стальными ($\nu = 0,28$, $E = 210 \text{ ГПа}$), а средний слой – пьезокерамическим (из пьезокерамики PZT 4), параметр кривизны принят $\varepsilon = 0,25$. Толщина внешних слоев равна h , толщина среднего слоя – $2h$.

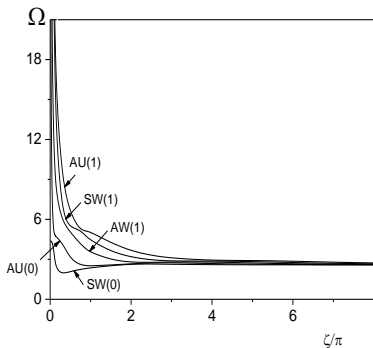


Рис. 1 – Фазовые скорости

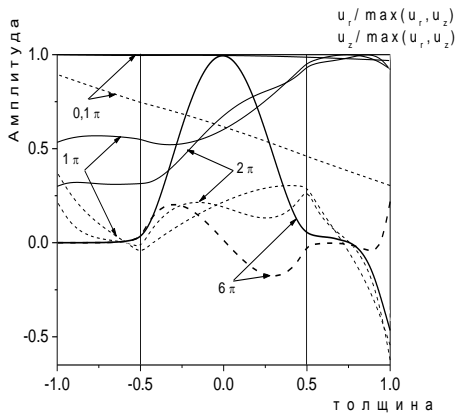


Рис. 2 – Распределение амплитуд перемещений по толщине в волне $SW(0)$

На рис. 1 представлены фазовые скорости для первых пяти волн. Используются обозначения для волн, принятые в [7]. Маркировка $SW(0)$ означает, что волна рождается ($k = 0$) в результате симметричных продольных колебаний (волны расширения-сжатия), $AU(0)$ – в результате антисимметричных (изгибных) радиальных колебаний.

На рис. 2 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в первой волне $SW(0)$ для различных значений длин волн. Сплошной линией обозначены амплитуды радиальных перемещений u_r , штриховой – продольных u_z . Жирными линиями указано распределение амплитуд перемещений в коротковолновой области. В случае длинных волн распределение амплитуд перемещений происходит практически по линейному закону. С уменьшением длины волны перемещения сосредотачиваются в более мягком пьезокерамическом слое. При дальнейшем уменьшении длины волны распределение

перемещений начинает принимать характер волны типа Рэлея, бегущей вдоль внешней боковой поверхности.

На рис. 3 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине во второй волне $AU(0)$. Также можно отметить, что для случая длинных волн распределение амплитуд перемещений по толщине носит почти линейный характер. С уменьшением длины волны перемещения локализуются во внутреннем, более мягком слое. С дальнейшим уменьшением длины волны распределение перемещений по толщине принимает вид, характерный для волн Рэлея, распространяющихся так же вдоль внешней поверхности цилиндра.

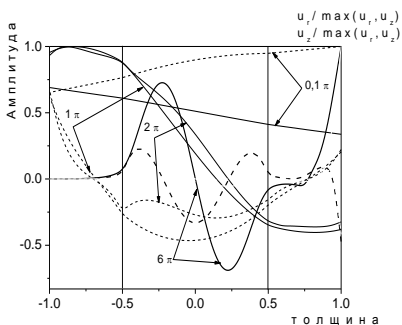


Рис. 3 – Распределение амплитуд перемещений по толщине в волне $AU(0)$

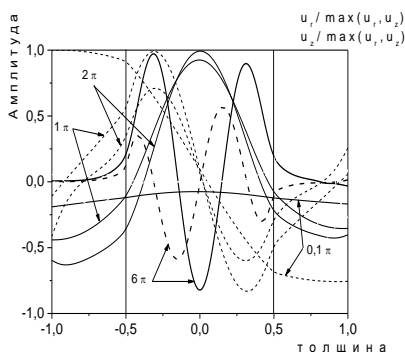


Рис. 4 – Распределение амплитуд перемещений по толщине в волне $AW(1)$

На рис. 4 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в третьей волне $AW(1)$. В этом случае, даже для длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не носит линейный характер. С уменьшением длины волны перемещения сосредотачиваются в более мягком пьезокерамическом слое, в то время как стальные слои является практически не деформированным.

Анализ результатов. Так же, как и в случае однородного материала цилиндра, первая и вторая ветви в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Для последующих, более высоких ветвей, наблюдается увеличение числа полуволн в более мягком пьезокерамическом слое. Более жесткие стальные слои с уменьшением длины волны становятся практически не деформируемыми.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Григоренко А. Я.** Распространение осесимметричных волн в пьезокерамическом полом цилиндра/ А. Я. Григоренко, И. А. Лоза, Н. А. Шульга // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 3. – С. 34–37.
2. **Гринченко В. Т.** Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наук. думка, 1981. – 283 с.
3. **Гринченко В. Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга; отв. ред. А. Н. Гузь; АН УССР Ин-т механики. – К. : Наук. думка, 1989. – 280 с.
4. **Кольский Г.** Волны напряжений в твердых телах/ Г. Кольский. – М. : ИЛ, 1955. – 192 с.
5. Физическая акустика / под ред. У. Мэзона., Р. Терстона. – М. : Мир, 1966. – Т. 7. – 663 с.
6. **Cree C.** Longitudinal vibration of circular bar/ C. Cree //Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – 21, № 83/84. – P. 287–298.
7. **Cree C.** The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application/ C. Cree // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Vol. III. – P. 250–369.
8. **Dai H. L.** Analytical solution for electromagnetothermoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder/ H. L. Dai, L. Hong, Y. M. Fu, X. Xiao // Appl. Math. Modeling. – 2010. – Vol. 34. – P. 343–357.
9. **Khoshgoftar M. J.** Thermoelastic analysis of thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric materials/ M. J. Khoshgoftar, A. Ghorbanpour, M. Arefi // Smart Mater. Struct. – 2009. – P. 18.
10. **Pochhammer L.** Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder/ L. Pochhammer // J. Reine Angew. Math. – 1876. – 81, No 4. – P. 324–336.
11. **Thurston R. N.** Elastic waves in rods and clad rods/ R. N. Thurston // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – 64, No 1. – P. 1–37.

*О. Я. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук, І. А. Лоза, д-р фіз.-мат. наук,
О. А. Авраменко, канд. фіз.-мат. наук*

КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЕЛЕКТРОПРУЖНИХ ХВИЛЬ У НЕОДНОРІДНИХ ПОРОЖНИСТИХ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ЦИЛІНДРАХ

Постановлена задача про поширення вимушених осесиметричних електропружних хвиль у неоднорідних по товщині порожнистих циліндрах. Розглядаються два види неоднорідності: кусково-неперервна та континуальна. Для розв'язування задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Після розділення змінних та представлення розв'язку у вигляді біжучих хвиль по довжині циліндра, початкова задача теорії електропружності у частинних похідних зводиться до неоднорідної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: осесиметричні акустоелектричні хвилі, кінематичний аналіз, дискретна ортогоналізація.

KINEMATIC ANALYSIS OF AXISYMMETRICAL ELASTOELECTRIC WAVES DISTRIBUTION IN HOLLOW PIEZOCERAMICS CYLINDERS

The problem of kinematic analysis of axisymmetric elastoelectric wave propagation in the hollow layered cylinder from metal and piezoceramic layers polarized in radial direction is considered. The numerical and analytical method is offered for solving this problem. The initial problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives after expand the stress tensor components, displacement vector, electric induction components and electrostatic potential components by progressing wave in axial direction is reduced to the non-homogeneous boundary value problem for the system of ordinary differential equations for the radial coordinate. The obtained problem is solved by stable numerical method of discrete orthogonalization.

Keywords: kinematic axisymmetrical elastoelectric waves, kinematic analysis, discrete orthogonalisation.

Solution of inhomogeneous boundary problem about forced acoustoelectric waves in inhomogeneous on the thickness cylinders connected with serious mathematic difficulties. There are coupling of electric field with fields of mechanic displacements and stresses, significant anisotropy of material and curved face boundary. Besides, there is sectional continuity of physical and mechanical proprieties of material. Last thing requires conjugation solving functions on the face boundary resulting in expansion in the number of equations.

The work proposes an effective analytical and numerical method to solving the problem. Solving vector is chosen in combined form, consists of such components as mechanical displacements and stresses as electric and induction. Such choice of solving vector simplifies solving system of equations. Make use of representations of solution by the way of propagation waves which is mathematically equivalent to representation solving vector in Fourier series. Eventually such representation we can pass on from initial system of partial equations theory of elasoelectricity to inhomogeneous boundary problem of ordinary differential equations:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, k, \Omega) \mathbf{R} ;$$
$$B_1 \mathbf{R}(-1) = C_1, B_1 \mathbf{R}(1) = C_j.$$

A stable numerical method of discrete orthogonalization is using for integrating of obtained boundary problem. It allowed to take a result with accuracy of analytical methods.

By way of example let consider a three layer cylinder. Two external layers are from steel ($\nu = 0,28$; $E = 21$) and inner layer is piezoceramic from PZT 4. Parameter of curvature is $\varepsilon = 0,25$. External layer thickness is h and internal – is $2h$.

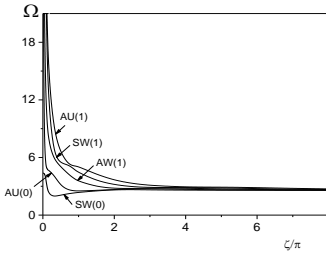


Fig. 1 – Phase velocities

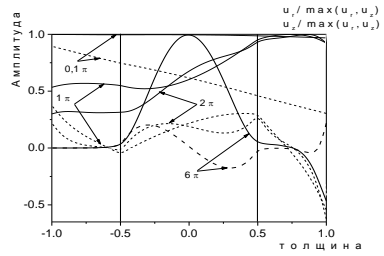


Fig. 2 – Distribution of displacement amplitudes over the thickness in wave $SW(0)$

First five branches of phase velocities are presented on Fig. 1. At that figure assumed denotations the same as in [7]. Labeling $SW(0)$ is meaning that wave is arising as a symmetric longitudinal oscillation. Labeling $AU(0)$ is meaning that wave is arising as an asymmetric flexural oscillation. The distribution of displacement amplitudes over the thickness in wave $SW(0)$ is presented on Fig. 2. The radial displacement u_r is marked off by the solid line. The longitudinal displacement u_z is marked off by the dashed line. The distribution of displacement amplitudes in short-wave region is marked off by the solid line. In case of long waves distribution amplitudes of displacement over the thickness take place almost in linear fashion. As the length of wave is reduced, displacements collect in soft piezoceramic layer. Further reducing the length of wave trigger to motions like Rayleigh waves which propagations along external surface of cylinder. The distribution of displacement amplitudes over the thickness in wave $AU(0)$ is presented on Fig. 3. Also in case of long waves distribution amplitudes of displacement over the thickness takes place almost in linear fashion

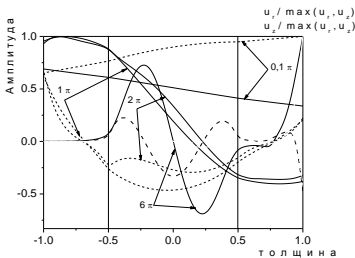


Fig. 3 – Distribution amplitudes of displacement over the thickness in wave $AU(0)$

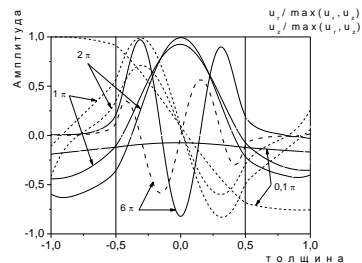


Fig. 4 – Distribution amplitudes of displacement over the thickness in wave $AW(1)$

The distribution of displacement amplitudes over the thickness in wave $AW(l)$ is presented on Fig.4. In this case, even though of long waves, distribution of displacement amplitudes over the thickness does not take place in linear fashion. As the length of wave is reduced, displacements collect in soft piezoceramic layer. While steel layers stay almost non-distorting.

REFERENCES

1. **Grigorenko A. Ya.** Propagation of axisymmetrical waves in piezoceramic hollow cylinder / A. Ya. Grigorenko, I. A. Loza, N. A. Shulga // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1983. – No 3. – P. 34–37. (in Russian).
2. **Grinchenko V. T.** Harmonically vibrations and waves in solids / V. T. Grinchenko, V. V. Meleshko. – K. : Nauk. dumka, 1981. – 283 p. (in Russian).
3. **Grinchenko V. T.** Mechanics of coupled fields in elements of constructions. Vol. 5. Electroelasticity / V. T. Grinchenko, A. P. Ulitko, N. A. Shulga; executive editor: A. N. Guz // AN USSR In-t Mechanics. – K. : Nauk. dumka, 1989. – 280 p. (in Russian).
4. **Kolsky G.** Waves of stresses in solid bodies/ G. Kolsky. – M. : IL, 1955. – 192 p. (in Russian).
5. Physical acoustics / Edited by W. Meson, R. Thurston. – M. : Mir, 1966. – Vol. 1– Vol. 7. – 663 p. (in Russian).
6. **Cree C.** Longitudinal vibration of circular bar / C. Cree // Quart. J. Pure and Appl. Math. – 1886. – 21, No 83/84. – P. 287–298.
7. **Cree C.** The equation of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application/ C. Cree // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1889. – Pt III. – P. 250–369.
8. **Dai H. L.** Analytical solution for electromagnetothermoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder/ H. L. Dai, L. Hong, Y. M. Fu, X. Xiao // Appl. Math. Modeling. – 2010. – 34. – P. 343–357
9. **Khoshgoftar M. J.** Thermoelastic analysis of thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric materials / M. J. Khoshgoftar, A. Ghorbanpour, M. Arefi // Smart Mater. Struct. – 2009.
10. **Pochhammer L.** Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiszyylinder/ L. Pochhammer // J. Reine Angew. Math. – 1876. – 81, No 4. P. 324–336.
11. **Thurston R. N.** Elastic waves in rods and clad rods/ R. N. Thurston // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – 64, No 1. – P. 1–37.

*Інститут механіки
ім. С. П. Тимошенка
НАН України,
Національний транспортний університет,
Київ, Україна*

Надійшла до редколегії 29.04.2015