ISSN 2079–1836
2015, вип. 24

УДК 539.3

Ю. В. Мастиновский, канд. техн. наук

НЕСТАНЦИОНАРНОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕГО ТЕЛА, ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассматривается воздействие магнитного поля на связанные термоупругие волновые процессы. Цель работы состоит в создании удобной для использования в инженерной практике математической модели магнитотермоупругого движения среды и оценке относительного влияния объёмных сил, вызванных действием электромагнитного поля и термоупругих составляющих на процесс деформирования электропроводящего неферромагнитного тела. Скорость распространения тепла конечна. Введены допущения, упрощающие полностью связанную систему магнитотермоупругих уравнений и позволяющие для получения конкретных результатов применить численное решение с использованием метода характеристик.

Ключевые слова: *магнитное поле, термоупругость, напряжения, метод характеристик.*

Введение. Во многих прикладных задачах, где влияние магнитного поля существенно сказывается на деформации различных конструкций, возникает необходимость оценки относительного влияния объемных сил, вызванных вихревыми токами, на процесс образования термоупругих напряжений. Такие проблемы возникают при проектировании радиоэлектронной аппаратуры, решении задач магнитоаэроупругости, индукционном нагреве тел, магнитной штамповке, разрушении тел под действием импульсных электромагнитных полей и др.

Данная работа нацелена на разработку математической модели, позволяющей исследовать термоупругие напряжения в токопроводящем теле, возбуждаемые нестационарным магнитным полем. Задача магнитотермоупругости сформулирована для одномерного полупространства. Считается, что материал обладает конечной проводимостью без магнитной или электрической поляризации. Скорость распространения тепла конечна.

Постановка задачи. Рассматривается линейно-термоупругое электропроводящее пространство ($x \geq 0$), в котором в любой момент времени отсутствует электрическая или магнитная поляризация. В области $x < 0$ создается нестационарное магнитное поле, параллельное плоскости $x = 0$. Считаем, что поле известно при $x = 0$, $t > 0$. Таким образом, все неизвестные величины будут зависеть только от x и t и, соответственно, возникнут лишь напряжения $\sigma_{xx} \equiv \sigma_x(x,t)$, перемещения $u_x \equiv u(x,t)$ и температура $T \equiv T(x,t)$. Составляющие магнитного и электрического полей при $x > 0$ имеют проекции на оси x, y, z: $\overrightarrow{B} = (0,0,B(x,t))$ и $\overrightarrow{E} = (0,E(x,t),0)$.

Исходной системой уравнений [3, 9–11] являются уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома для определения электромагнитного поля, закон Дюамеля – Неймана для упругого поля и обобщенное уравнение теплопроводности Фурье для определения температурного поля. Эти уравнения образуют замкнутую систему и являются основными уравнениями магнитотермоупругости.

Обзор литературы. В современных публикациях, например [6, 9, 10], отмечается, что при решении многих прикладных задач, в частности, при создании импульсных соленоидальных катушек, различных типов магнитокумулятивных генераторов, при управлении движением плазмы и др., необходимо учитывать влияние нестационарного магнитного поля на упругую деформацию, обусловленную нагревом тела. Таким образом, кроме упругого и электромагнитного полей, необходимо рассматривать еще и возникающее температурное поле. Эти поля взаимодействуют между собой и влияют на общую деформацию тела. Магнитотермоупругие задачи рассматривались [5, 9–11] при различных допущениях о связности упругого, электромагнитного и температурного полей, чаще всего для полубесконечных тел и тел со сферической или цилиндрической симметрией. Решения получены, в основном, с помощью интегральных преобразований. Известны [2, 6, 7] несколько приближенных решений инженерных задач, касающихся термоупругих решений в пластинках и стержнях.

Анализ публикаций по нестационарной магнитотермоупругости показывает, что при моделировании процесса «магнитной деформации» обычно пренебрегают термоупругими напряжениями, а в задачах о деформациях при действии лазера рассматривают лишь эффекты термоупругости и абляции [9, 11].

Имеющиеся в литературе аналитические решения динамических термоупругих задач часто настолько громоздки, что без численных расчетов не представляется возможным провести оценку напряженного состояния конструкции. Обзор публикаций по обозначенной проблеме показывает, что связанные с ней вопросы разработаны еще недостаточно, в частности, отсутствует удобная для использования в инженерной практике модель и методика расчета прикладных магнитотермоупругих задач.

Математическая модель. Основные уравнения для поставленной задачи, а также соответствующие определяющие соотношения имеют вид [3, 5, 11]:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = f \ ;$$

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha T_0 \left(3\lambda + 2\mu\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = g \ ;$$

$$\sigma_x = \left(\lambda + 2\mu\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha \left(3\lambda + 2\mu\right) T \ ; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \ ; \qquad -\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 J \ ;$$

$$J = \sigma_0 \left(E - B \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Здесь x, t – осевая координата и время соответственно; u – осевое перемещение; σ_x – напряжение; T_0 – начальная температура; T – приращение температуры; c_v – удельная теплоемкость при постоянной деформации; κ – теплопроводность; α – температурный коэффициент линейного расширения; μ_0 – магнитная проницаемость; σ_0 – удельная электрическая проводимость; J – плотность электрического тока; λ, μ – упругие постоянные Ляме; ρ – плотность; f – составляющая объемной силы; g – объемная плотность теплового потока.

Проведем некоторые преобразования и упрощения системы (1). Обобщённое уравнение теплопроводности Фурье получено при неявном предположении, что скорость распространения тепла является бесконечно большой. При исследованиях высокоскоростных нестационарных процессов, например, при тепловых ударах необходимо учитывать, что тепло распространяется хоть и с очень большой, но конечной скоростью V [1]:

$$V = \left(\kappa / \left(c_v \rho \tau_0\right)\right)^{1/2},$$

где τ_0 – время релаксации теплового потока (постоянная времени).

Подставляя значение плотности теплового потока

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_0 \frac{\partial q_x}{\partial x}$$

в уравнение баланса тепла для одномерной задачи

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial t} + W \ , \qquad (2)$$

получим гиперболическое уравнение переноса тепла. Если удельная мощность источников тепла $W = 0$, то уравнение (2) запишется так:

$$c_v \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} .$$

Сравнивая с классическим законом теплопроводности Фурье, видим, что при конечной скорости распространения тепла в уравнении теплопроводности следует заменить $\frac{\partial T}{\partial t}$ на сумму $\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$.

В результате система уравнений (1), связывающая σ_x, T, , принимает вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = \alpha\rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{\partial^2 B^2}{\partial x^2}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{a}(1+\varepsilon) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha T_0}{\kappa} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} + \frac{1}{\kappa \mu_0 \sigma_0} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2; \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{5}$$

Здесь $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ – квадрат скорости упругой волны; $a = \kappa / c_v$ – коэффициент температуропроводности;

$$V^2 = a/(\rho \tau_0); \ \varepsilon = \frac{\alpha^2 T_0 (3\lambda + 2\mu)^2}{c_v (\lambda + 2\mu)} = \frac{(1+\nu)\alpha^2 E T_0}{(1-\nu)(1-2\nu) c_v}$$

– коэффициент связности; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; τ_0 – время релаксации теплового потока.

Для упрощения системы связанных уравнений (3)–(5) опустим нелинейный член в уравнении Максвелла для магнитной индукции (5). Такое упрощение справедливо, если B не зависит от деформаций и температуры. Таким образом, магнитная индукция удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \sigma_0 \mu_0 \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) известно [2], и для случая ступенчатого задания на границе

$$B(0,t) = \begin{cases} B_0, \ t \geq 0; \\ 0, \ t < 0, \end{cases}$$

магнитная индукция в полупространстве $x \geq 0$ определяется выражением

$$B(x,t) = B_0 \operatorname{erfc}(mx), \tag{7}$$

где $m = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \sigma_0 / t\right)^{1/2}$.

Для функции ошибок, входящей в (7), известны [2] следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2}\, dz,\ \operatorname{erf}(\infty) = 1,\ \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z), \\ \operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-z^2}\, dz,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left(\operatorname{erf}(z)\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}. \end{gathered} \tag{8}$$

Используя (7), (8), найдем $\partial B / \partial x$ и $\partial^2 B^2 \big/ \partial x^2$, входящие в уравнения (3), (4). Так,

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2 B_0 m}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-m^2 x^2}.$$

Таким образом, магнитная индукция в данной модели превращается в источник возмущений в связанных уравнениях термоупругости.

Вводя в уравнения (3), (4) безразмерные величины:

$$\xi = \frac{cx}{a};\ \tau = \frac{c^2 t}{a};\ \Theta = \alpha T;\ \sigma = \frac{(1-2\nu)\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_x}{3\lambda + 2\mu};\ \beta = \frac{B}{B_0};$$

$$\gamma = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cdot \frac{1-2\nu}{E};\ \phi = \frac{\alpha B_0^2}{k c_\nu},\ k = a \mu_0 \sigma_0;\ c_1^2 = 1;\ c_2^2 = \frac{V^2}{c^2},$$

получаем для рассматриваемой задачи следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} + \gamma \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial \xi^2}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c_2^2} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \tau^2} = (1+\varepsilon)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \phi \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi}\right)^2 \tag{10}$$

с начальными условиями

$$\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = 0 \text{ при } \tau = 0,\ \xi > 0 \tag{11}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0, \quad \beta = \begin{cases} 1, & \tau \ge 0; \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \text{ при } \xi = 0. \tag{12}$$

В общем случае температурное поле должно удовлетворять условиям конвекции. Однако, в данной работе конвекция на поверхности $\xi = 0$ принята равной нулю. Магнитная индукция, входящая в уравнения (9), (10), определяется с помощью выражений

$$\beta = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{\tau}} \right), \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\sqrt{\frac{k}{\pi \tau}} \exp\left(-\frac{k}{4} \cdot \frac{\xi}{\tau} \right).$$

Метод решения. Аналитические решения динамических задач термоупругости настолько громоздки [2, 7, 9], что без численных расчетов провести оценку напряженного состояния исследуемого объекта становится невозможно. В данной работе для решения системы гиперболических уравнений второго порядка (9), (10) применяется прямое численное решение с использованием метода характеристик. В замкнутом виде получены уравнения характеристик и характеристические соотношения. Семейства характеристик системы (9), (10) и соотношения на них определяются следующими равенствами:

– вдоль $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \pm 1$ выполняются соотношения

$$\pm d\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} \right) \pm \gamma \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial \xi^2} d\xi - d\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right) = 0;$$

– вдоль $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \pm c_2$ выполняются соотношения

$$d\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \right) \mp c_2 d\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) \pm c_2 \left((1+\varepsilon) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \phi \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^2 \right) d\xi = 0 .$$

С подробностями численного интегрирования вдоль сетки характеристик можно ознакомиться в работах [4, 8].

Результаты расчетов. Для апробации математической модели и вычислительной схемы проведены расчеты поставленной задачи для тела с механическими и теплофизическими свойствами, соответствующими алюминию: $c = 6{,}32 \cdot 10^3$ *м/с*, $\tau_0 = 10^{-11}$ *с*, $\varepsilon = 3{,}56 \cdot 10^{-2}$, $k = 4{,}13 \cdot 10^{-3}$, $n = 2\alpha(3\lambda + 2\mu) / (\sigma_0 \mu_0 \kappa) = 800$.

Расчеты показали, что вихревые токи в алюминии вызывают сжимающие напряжения, а термоупругие напряжения распространяются в виде волн растяжения-сжатия. Термоупругие волны вызывают скачок напряжений, связанный со скачком температуры на границе. Решения для полупространства по связанной и несвязанной теориям в начальные моменты времени мало отличаются друг от друга. Лишь с течением времени влияние термического взаимодействия становится заметным.

Нестационарное магнитное поле при проникании в тело вызывает две волны. Одна из них, обусловленная величиной $\overrightarrow{J} \times \overrightarrow{B}$, вызывает объемные силы в результате давления вихревого тока. Другая, возникающая от джоулевого нагрева, пропорционального $\overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{J}$, создает термоупругую волну. Следует отметить, что повышение температуры на поверхности твердого тела может вызвать напряжения большие, чем магнитное давление, однако такие напряжения быстро затухают при распространении вглубь от поверхности. А волна, вызванная давлением вихревых токов, распространяется в твердом теле почти без затухания.

Выводы. Предложенная математическая модель и методика расчета термоупругого деформирования конструкций, вызванного действием нестационарного магнитного поля, позволяют, не меняя вычислительной схемы для внутренних узлов сетки, получить конкретные результаты для различных начальных и граничных условий, т. е. проводить численные эксперименты.

Результаты численных расчетов для частных случаев согласуются с данными, полученными другими методами [5, 8, 11].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Беляев Н. М.*** Методы теории теплопроводности. В 2-х ч. / Н. М. Беляев, А. А. Рядно. – М. : Высш. Школа,1982. – 237 с.

2. ***Коваленко А. Д.*** Термоупругость / А. Д. Коваленко. – К. : Вища школа, 1975. – 216 с.

3. ***Партон В. З.*** Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 588 с.

4. ***Сагамонян А. Я.*** Волны напряжений в сплошных средах / А. Я. Сагамонян. – М. : Изд-во МГУ, 1985. – 416 с.

5. ***Селезов И. Т.*** Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах / И. Т. Селезов, С. В. Корсунский. – К. : Наук. думка, 1991. – 200 с.

6. ***Шамровский А. Д.*** Термоупругие волны и скорость их распространения в динамической задаче взаимосвязанной термоупругости / А. Д. Шамровский, Г. В. Меркотян // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Вып. 7 (53), т. 5. – С. 41-45.

7. ***Bala Kiran*** A Review of Two-Temperature Thermoelasticity / Kiran Bala // International Journal of Modern Engineering Research (IJMER). – 2012. – Vol. 2, Is. 6. – P. 4224-4227.

8. ***Chou P. C***. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics / P. C. Chou, R. W. Mortimer // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34, No. 3. – P. 745–750.

9. ***El-Bary A. A.*** Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanic Shock Problem / A. A. El-Bary // Commutational Methods in Science and Technology. – 2006. – Vol. 12 (2). – P. 101–108.

10. ***Ezzat M.*** Generalized magneto-thermo-elasticity in a perfectly conducting mediem / M. Ezzat, H. Youssef // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – Vol. 42. – P. 6319–6334.

11. ***Moon F. C.*** Magnetically induced stress waves in a conducting solid – theory and experiment / F. C. Moon, S. Chattopadhyay // Transactions of the ASME 41. – 1974. – Ser. E, № 3. – P. 641–646.

Ю. В. Мастиновський, канд. техн. наук

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОГО ТІЛА, СПРИЧИНЕНЕ ДІЄЮ МАГНІТНОГО ПОЛЯ

Розглядається вплив магнітного поля на пов'язані термопружні хвильові процеси. Метою даної роботи є створення зручної для використання в інженерній практиці математичної моделі магнетотермопружного руху середовища і оцінка відносного впливу об'ємних сил, спричинених дією електромагнітного поля і термопружних складових на процес деформації електропровідного неферомагнітного тіла. Швидкість розповсюдження тепла скінченна. Введені припущення, що спрощують повністю пов'язану систему магнето термопружних рівнянь і дозволяють для отримання конкретних результатів застосовувати числові розв'язання з використанням методу характеристик.

Ключові слова*: магнітне поле, термопружність, напруження, метод характеристик.*

Y. V. Mastinovsky, PhD (Tech.)

NONSTATIONARY THERMO-ELASTIC DEFORMATION OF CONDUCTIVE BODY CAUSED BY MAGNETIC FIELD EFFECT

The effect of magnetic field on the coupled thermo-elastic wave processes is considered. The goal of the paper is to create a mathematical model of magneto-thermo-elastic medium motion useful for engineering purposes and estimation of relative impact of volume forces caused by the action of electromagnetic field and thermo-elastic components on conductive ferromagnetic body deformation. Velocity of heat propagation is finite. The assumptions simplifying completely coupled system of magneto-thermal-elastic equations and allowing use of numerical solution by means of method of characteristics for getting concrete results have been introduced.

Keywords*: magnetic field, thermo-elasticity, stresses, method of characteristics*.

Introduction. In many applications where the influence of the magnetic field significantly affects the deformation of different structures, there is a need to assess the relative influence of volume forces induced by eddy currents on the process of thermo-elastic stresses. Such problems arise in the design of electronics, solving magneto-aero-elasticity problems, induction heating of bodies, magnetic punching, destruction of bodies under the influence of pulsed electromagnetic fields and others.

This work aims to develop a mathematical model to investigate the thermo-elastic stresses in the conductive body, excited by non-stationary magnetic field. Magneto-thermo-elasticity problem is formulated for one-dimensional half-space. It is believed that the material has a finite conductivity without magnetic or electrical polarization. The speed of heat propagation is finite.

Formulation of the problem. The initial system of equations [9–11] are the Maxwell equations and the generalized Ohm's law for determination of the electromagnetic field, the law Duhamel-Neuman for the elastic field and the generalized Fourier heat conduction equation for the determination of the temperature field. These equations form a closed system and are basic equations of magneto-thermo-elasticity.

The published analytical solutions of dynamic thermo-elastic problems are often so cumbersome and lengthy that without numerical calculations the structural assessment of the stress state of the structure is hardly possible.

Mathematical model. After the conversion and the simplification of the basic equations for the problem under consideration, namely, bringing the level of thermal conductivity to the hyperbolic form and neglecting nonlinear term in Maxwell equations for magnetic induction, we obtain the following system of equations in the dimensionless form:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi^2}-\frac{1}{c_1^2}\cdot\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau^2}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\tau^2}+\gamma\frac{\partial^2\beta^2}{\partial\xi^2}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}-\frac{1}{c_2^2}\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial\tau^2}=\left(1+\varepsilon\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}+\phi\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2. \qquad (2)$$

with initial

$$\sigma=\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}=\Theta=\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=0 \text{ at } \tau=0,\ \ \xi>0 \qquad (3)$$

and boundary conditions

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}=0;\ \ \beta=\begin{cases}1, & \tau\ge 0,\\ 0, & \tau<0\end{cases} \text{ at } \xi=0. \qquad (4)$$

Dimensionless quantities are defined by the equations:

$$\xi=\frac{cx}{a};\ \tau=\frac{c^2t}{a};\ \Theta=\alpha T;\ \sigma=\frac{\left(1-2\nu\right)\sigma_x}{E}=\frac{\sigma_x}{3\lambda+2\mu};\ \beta=\frac{B}{B_0};$$

$$\gamma=\frac{B_0^2}{2\mu_0}\cdot\frac{1-2\nu}{E};\ \phi=\frac{\alpha B_0^2}{kc_v},\ k=a\mu_0\sigma_0;\ c_1^2=1;\ c_2^2=\frac{V^2}{c^2}.$$

Magnetic induction entering into the equations (1), (2) is determined by the expressions

$$\beta=\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi}{2}\cdot\sqrt{\frac{k}{\tau}}\right);\quad \frac{\partial\beta}{\partial x}=-\sqrt{\frac{k}{\pi\tau}}\exp\left(-\frac{k}{4}\cdot\frac{\xi}{\tau}\right).$$

Procedure of the solution. To solve the second order hyperbolic equations (1), (2) direct numerical solution using the method of characteristics is applied. In the closed form the equations of characteristics and characteristic relations are obtained. Set of characteristics of the system (1), (2) and their correlation are defined by the following equations:

along $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \pm 1$ the correlations are:

$$\pm d\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\right) \pm \gamma \frac{\partial^2 \beta^2}{\partial \xi^2} d\xi - d\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \tau}\right) = 0 ,$$

along $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \pm c_2$ the correlations are:

$$d\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \tau}\right) \mp c_2 d\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right) \pm c_2 \left((1+\varepsilon)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \phi\left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi}\right)^2 \right) d\xi = 0 .$$

Calculation results and discussion. To test the mathematical model and computational scheme calculations of the problem for the bodies with mechanical and thermal physical properties applicable to aluminum are carried out.

Calculations showed that the eddy currents in the aluminum cause compressive stresses and thermo-elastic stresses are distributed in the form of stress-strain waves. Thermo-elastic waves were caused by the stresses jump associated with the temperature jump on the boundary. Solutions for the half-space according to the coupled and decoupled theories at the initial instants of time differ little from each other. Only in the course of time the effect of the thermal interaction becomes noticeable.

Stresses damp rapidly when propagated deep from the surface. But the wave caused by the pressure of the eddy currents is distributed in a solid body almost without attenuation.

Conclusions. The proposed mathematical model and method of calculating the thermal elastic deformation of structures caused by the influence of non-stationary magnetic field allow to get concrete results for different initial and boundary conditions, i.e. to conduct numerical experiments, without changing the computing model for internal nodes of the grid.

The numerical results for the particular cases are consistent with those obtained by other methods [5, 8, 11].

REFERENCES

1. ***Belyaev N. M***. Methods of the theory of heat conductivity. In 2 parts / N. M. Belyaev, A. A. Ryadno. – M. : Vyssh. Shkola, 1982. – 237 p. (in Russian).
2. ***Kovalenko A. D.*** Thermo-elasticity / A. D. Kovalenko. – K. : Vyscha shkola. – 1975. – 216 p. (in Russian).
3. ***Parton V. Z.*** Methods of mathematical theory of elasticity / V. Z. Partonю. – M. : Nauka, 1981. – 588 p. (in Russian).
4. ***Sagamonyan A. Y.*** Stress waves in continuous media / A. Y. Sagamonyan. – M. :Izd-vo MGU, 1985. – 416 p. (in Russian).
5. ***Selezov I. T.*** Transient and nonlinear waves in the electrically conductive media / I. T. Selezov, S. V. Korsunsky. – K. : Nauk. dumka. – 1991. – 200 p. (in Russian).

6. ***Shamrovsky A. D.*** Thermo-elastic waves and the speed of their propagation in dynamic problem of coupled thermo-elasticity / A. D. Shamrovsky, G. V. Maekotyan // Eastern European Journal of advanced technologies. – 2011. – Is. 7 (53), vol. 5. – P. 41–45. (in Russian).

7. ***Bala Kiran*** A Review of Two-Temperature Thermoelasticity / Kiran Bala // International Journal of Modern Engineering Research (IJMER). – 2012. – Vol. 2, is. 6. – P. 4224-4227.

8. ***Chou P. C***. A Unified Approach One-Dimensional Elastic Waves by the Method of Characteristics / P. C. Chou, R. W. Mortimer // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34, No. 3. – P. 745–750.

9. ***El-Bary A. A.*** Numerical Solution of Electro-magneto-thermo-mechanic Shock Problem / A. A. El-Bary // Commutational Methods in Science and Technology. – 2006. – Vol. 12 (2). – P. 101–108.

10. ***Ezzat M.*** Generalized magneto-thermo-elasticity in a perfectly conducting mediem / M. Ezzat, H. Youssef // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – Vol. 42. – P. 6319–6334.

11. ***Moon F. C.*** Magnetically induced stress waves in a conducting solid – theory and experiment / F. C. Moon, S. Chattopadhyay // Transactions of the ASME 41. – 1974. – Ser. E, № 3. – P. 641–646.

Запорожский национальный
технический университет,
Запорожье, Украина

Поступила в редколлегию 5.07.2015