ISSN 2079–1836
2015, вип. 24

УДК 539.3

А. Є. Шевельова, канд. фіз.-мат. наук

АНАЛІЗ ЗОН ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ДЛЯ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У ПОЛІ ЗСУВНИХ НАПРУЖЕНЬ

Досліджено міжфазну тріщину з зонами передруйнування, яка знаходиться під дією зсувних напружень на віддаленні від неї. Сформульована крайова задача Діріхле, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. Знайдені відносні довжини зон передруйнування, стрибки переміщень у залежності від інтенсивності зсувного напруження на нескінченності і механічних властивостей матеріалів.

***Ключові слова**: міжфазна тріщина, зона передруйнування, кусково-аналітична функція, стрибки переміщень.*

Вступ. Широке використання композитних матеріалів у сучасній техніці призводить до необхідності розробки нових і вдосконалення існуючих методів розрахунку напружено-деформованого стану та оцінки тріщиностійкості конструкційних матеріалів. Міжфазні тріщини, які виникають і поширюються на межі поділу різних матеріалів (інтерфейсі), є однією з основних причин руйнування композитів, зварних та клейових з'єднань, гірських порід тощо.

Однією з моделей міжфазної тріщини, що дозволяє встановити можливість її розвитку, є модель, яка заснована на відомому методі Леонова – Панасюка – Дагдейла [9, 2]. Вона була запропонована стосовно тріщини в однорідному матеріалі. Розвиток цієї моделі на випадок міжфазної тріщини проведений у [10, 11] для тріщини між двома ізотропними та анізотропними матеріалами відповідно. У цих роботах був врахований стрибок нормального і дотичного переміщень. При аналізі цієї ж проблеми в [4, 5] враховувався стрибок тільки нормального переміщення в областях передруйнування міжфазної тріщини. Моделювання зон передруйнування, аналогічне [10, 11], використано також в [1], де вирази для стрибків переміщень у вершинах тріщини були знайдені через гіпергеометричні функції. У [8] досліджено задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів при наявності тріщини на цій межі.

В даній роботі проводиться узагальнення δ_k-моделі для міжфазної тріщини у випадку зсувного навантаження, а також пропонується відповідний критерій руйнування композитних матеріалів з міжфазними тріщинами.

Постановка задачі. Розглянемо узагальнений плоский напружений стан нескінченної пластинки, що складається з двох спаяних півплощин

© А. Є. Шевельова, 2015

$y>0$ та $y<0$ (рис. 1) з модулями зсуву та константами Мусхелішвілі μ_1, κ_1 ($y>0$) і μ_2, κ_2 ($y<0$) відповідно. На нескінченності на пластинку діє постійне зсувне навантаження τ_0.

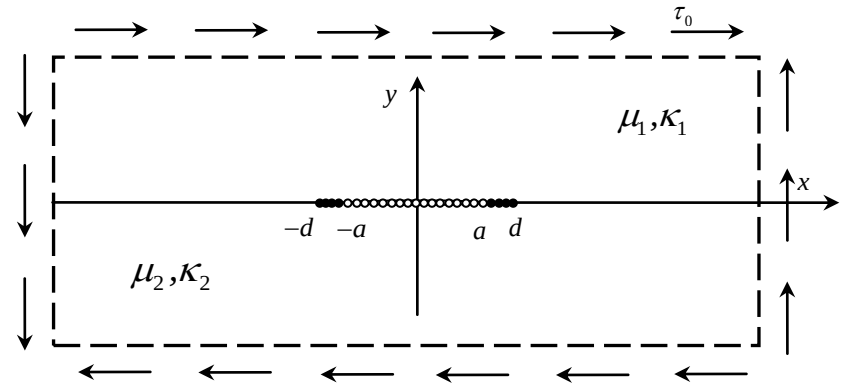


Рис. 1 – **Міжфазна тріщина з зонами передруйнування в полі зсувних напружень**

Припускаємо, що на інтервалі $(-a,a)$ границі поділу матеріалів розташована тріщина, а на відрізках $(-d,-a)$ та (a,d) мають місце зони передруйнування, в яких $\sigma_{xy}(x,y)=\tau_s$.

Віднімемо від НДС сформульованої задачі однорідний напружений стан $\sigma_{xx}(x,y)=\sigma_{yy}(x,y)=0$, $\sigma_{xy}(x,y)=\tau_0$. Тоді отримаємо деякий доповнюючий (допоміжний) напружено-деформований стан, який зникає на нескінченності. На поверхні поділу матеріалів цей стан визначається такими граничними умовами:

$$\sigma_{xy}^{(i)}(x,0)=\tau(x),\ \langle u_2(x,0)\rangle=0,\ -d<x<d, \tag{1}$$

де

$$\tau(x)=\begin{cases}-\tau_0, & |x|<a,\\ \tau_s-\tau_0, & a<|x|<d.\end{cases} \tag{2}$$

Тут і в подальшому через $\langle u_i(x,0)\rangle$ позначено стрибок переміщень $\dfrac{\partial u_i^{(1)}(x,0)}{\partial x}-\dfrac{\partial u_i^{(2)}(x,0)}{\partial x}$.

Аналітичне дослідження. У [6] для двох півнескінчених скріплених пружних ізотропних пластин з дефектами в області розділу матеріалів були наведені такі вирази для стрибків переміщень і напружень в області розділу матеріалів:

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0)-i\,\sigma_{xy}^{(1)}(x,0)=g\left(F_1^{+}(x)+\gamma F_1^{-}(x)\right), \tag{3}$$

$$\left\langle u_1'(x)\right\rangle + i\left\langle u_2'(x)\right\rangle = F_1^+(x) - F_1^-(x), \tag{4}$$

де $g = \dfrac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}$, $\gamma = \dfrac{\mu_1 + \mu_2\kappa_1}{\mu_2 + \mu_1\kappa_2}$.

Функція $F_1(z)$ є аналітичною у всій площині за винятком інтервалу $(-d, d)$.

Задовольняючи за допомогою (3), (4) граничним умовам (1), (2), маємо

$$\mathrm{Im}\left(F_1^+(x) + \gamma F_1^-(x)\right) = \frac{\tau(x)}{g}, \ \mathrm{Im}\left(F_1^+(x) - F_1^-(x)\right) = 0 \ \text{для} \ -d < x < d.$$

Останні два співвідношення еквівалентні задачі Діріхле для кусково-аналітичної функції $F_1(z)$:

$$\mathrm{Re}\left(i\,F_1^{\pm}(x)\right) = -\frac{\tau(x)}{g(1+\gamma)} \ \text{для} \ -d < x < d \tag{5}$$

за умови на нескінченності

$$F_1(x)\big|_{x\to\infty} = 0. \tag{6}$$

На підставі формул Келдиша – Сєдова [3], обмежена на обох кінцях функція $i\,F_1(z)$ має вигляд

$$i\,F_1(z) = -\frac{\sqrt{(z-d)(z+d)}}{2\pi i\, g(1+\gamma)} \int_{-d}^{d} \frac{\tau(t)\,dt}{(t-z)\sqrt{(t-b)(t+b)}} \tag{7}$$

за додаткової умови

$$-\frac{2}{g(1+\gamma)} \int_{-d}^{d} \frac{\tau(t)\,dt}{\sqrt{(t-d)(t+d)}} = 0. \tag{8}$$

Для функції $\tau(x)$, яка задана в граничній умові (1), з (8) випливає

$$\int_{-d}^{d} \frac{\tau(t)\,dt}{\sqrt{(t-d)(t+d)}} = \left(\int_{-d}^{-a} + \int_{a}^{d}\right) \frac{(\tau_0 - \tau_s)\,dt}{\sqrt{(t-d)(t+d)}} + \int_{-a}^{a} \frac{\tau_0\,dt}{\sqrt{(t-d)(t+d)}} = 0.$$

Обчислюючи інтеграли, отримуємо

$$(\tau_0 - \tau_s)\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{a}{d}\right) + \tau_0 \arcsin\frac{a}{d} = 0. \tag{9}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд $d = a / \sin\left(\frac{\pi(\tau_s - \tau_0)}{2\tau_s}\right)$.

Поле напружень і стрибок переміщення. На підставі формули (3), із урахуванням $F_1^+(x) = F_1^-(x) = F_1(x)$ для $|x| > d$, напруження на продовженні тріщини визначимо за формулою

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\,\sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = g(1+\gamma)F_1(x). \tag{10}$$

З урахуванням (7), після обчислення інтегралів, маємо

$$\sigma_{yy}^{(1)}(x,0) - i\,\sigma_{xy}^{(1)}(x,0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2-d^2}}\left\{\pi(\tau_0-\tau_s)\left(x-\sqrt{x^2-d^2}\right) + 2\tau_s \arcsin\frac{a}{d} + \right.$$
$$\left. + \tau_s\sqrt{x^2-d^2}\left(\arcsin\frac{d^2-ax}{d(x-a)} - \arcsin\frac{d^2+ax}{d(x+a)}\right)\right\}. \tag{11}$$

Похідні від зсуву (стрибка дотичних переміщень) берегів на підставі формули (4) та з використанням формул Сохоцького – Племеля [7], визначимо як

$$\langle u_1'(x)\rangle + i\langle u_2'(x)\rangle = = \frac{\sqrt{x^2-d^2}}{\pi g(1+\gamma)}\int_{-d}^{d}\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)\sqrt{t^2-d^2}}. \tag{12}$$

Тоді, обчислюючи інтеграл, отримуємо

$$\langle u_1'(x)\rangle = \frac{-\tau_s}{4\pi(1+\gamma)g}\left(\Gamma(x,a,d) - \Gamma(x,-a,d)\right),$$

де $\Gamma(x,t,d) = \ln\dfrac{d^2 - t\,x + \sqrt{\left(d^2-t^2\right)\left(d^2-x^2\right)}}{d^2 - t\,x - \sqrt{\left(d^2-t^2\right)\left(d^2-x^2\right)}}$.

Виконуючи інтегрування, стрибок переміщення $u_1(x,0)$, з використанням [5], визначимо за формулою

$$\langle u_1(x)\rangle = \frac{-\tau_s}{4\pi(1+\gamma)g}\left((x-a)\Gamma(x,a,d) - (x+a)\Gamma(x,-a,d)\right). \tag{13}$$

При $x = 0$ маємо

$$\delta_0 = \langle u_1(0)\rangle = \frac{a\,\tau_s}{\pi(1+\gamma)g}\ln\frac{d+\sqrt{d^2-a^2}}{a}. \tag{14}$$

При $x = a$ одержуємо

$$\delta_a = \langle u_1(a) \rangle = \frac{a\,\tau_s}{\pi(1+\gamma)g} \ln \frac{d}{a}. \qquad (15)$$

Слід відзначити, що аналогічно деформаційному критерію руйнування, сформульованому для тріщини типу I, знайдена величина δ_a може бути використана як параметр, що визначає можливість розвитку тріщини.

Результати чисельного аналізу. Розглядалися сталь 1045 з $E_1 = 1,7 \cdot 10^{11}$ *Па*, $\nu_1 = 0,28$, $\mu_1 = 6,64063 \cdot 10^{10}$ *Па*, $\gamma_s = 0,0025$ (верхній матеріал) та іридій з $E_2 = 5,28 \cdot 10^{11}$ *Па*, $\nu_2 = 0,26$, $\mu_2 = 2,09524 \cdot 10^{11}$ *Па* (нижній) та біматеріал, скомпонований з епоксіда з характеристиками $\mu_1 = 1,12$ *ГПа*, $\kappa_1 = 1,84$ (верхня півплощина) і скла з характеристиками $\mu_2 = 29,92$ *ГПа*, $\kappa_2 = 2,12$ (нижня). Тріщина вважалась розташованою на проміжку $(-10,10)$ *мм*. Дотичне напруження на нескінченності задавалось як $\tau_0 = \alpha\,\tau_s$, де $\alpha \in (0,1)$.

В табл. 1 наведені значення відносних довжин зон передруйнування $\eta = (d-a)/a$ і розкриття тріщини у вершині (точці a). З одержаних результатів видно, що зона передруйнування присутня для усіх наведених значень α. При цьому для великих дотичних напружень на нескінченності ця зона стає істотно великою.

Таблиця 1 – **Відносні довжини зон передруйнування η і розкриття у вершині a для епоксиду-скла з $a = 0,01$ *м* при різних значеннях дотичного напруження на нескінченності τ_0**

α	η	$\delta_a \cdot 10^6$ *м*
0,1	0,124651	0,90485
0,3	0,122326	8,42931
0,5	0,414214	25,3144
0,6	0,701302	38,8141
0,9	5,39245	135,502

На рис. 2 наведено графіки розкриття тріщини $u_1(x,0) \cdot 10^7$ *м* на проміжку $[-d,d]$ для сталі-іридія для $\alpha =$ 0,1; 0,3; 0,5; 0,6, а на рис. 3 подано відповідні графіки розкриття тріщини $u_1(x,0) \cdot 10^6$ *м* для епоксиду-скла в зоні контакту берегів тріщини $[a,d]$. На рис. 4 показані графіки дотичного напруження $\left(\sigma_{xy}^{(1)}(x,0) - \tau_0\right) \cdot 10^{-7}$ *Па* при $x > d$ для пари матеріалів сталь-іридій.

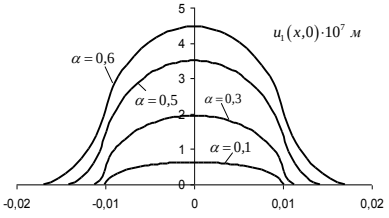


Рис. 2 – **Зсувне розкриття тріщини** $u_1(x,0)\cdot 10^7$ **на проміжку** $[-d,d]$ **для сталі-іридію**

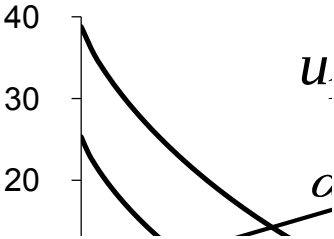


Рис. 3 – **Зсувне розкриття тріщини** $u_1(x,0)\cdot 10^6$ **на проміжку** $[a,d]$ **для епоксиду-скла**

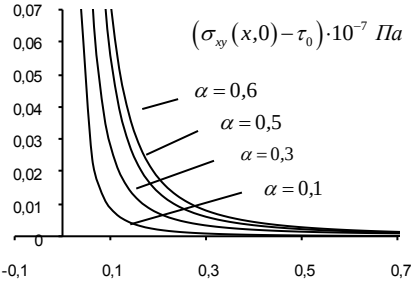


Рис. 4 – **Дотичне напруження** $\left(\sigma_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau_0\right)\cdot 10^{-7}$ *Па* **для** $x > d$

Висновки. Розглянута тріщина між двома матеріалами під дією зсувних напружень на віддаленні від неї. З використанням представлень переміщень та напружень через одну кусково-аналітичну функцію поставлена проблема зведена до крайової задачі Діріхле, для якої виписано точний аналітичний розв'язок. З цього розв'язку отримано вирази для напружень та стрибків переміщень на лінії поділу матеріалів, визначено довжину зони передруйнування. Проведений чисельний аналіз отриманих аналітичних результатів.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Бакиров В. Ф.*** Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для трещины на границе соединения материалов / В. Ф. Бакиров, Р. В. Гольдштейн // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 1. – С. 170–179.

2. ***Витвицкий П. М.*** Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения (обзор) / П. М. Витвицкий, В. В. Панасюк, С. Я. Ярема // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.

3. ***Гахов Ф. Д.*** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука. – 1977. – 640 с.

4. ***Каминский А. А.*** О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 63–68.

5. ***Лобода В. В.*** Определение зон предразрушения у края трещины между двумя упругими ортотропными материалами / В. В. Лобода, Шевелёва А. Е. // Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 76–82.

6. ***Лобода В. В.*** Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил та моментів / В. В. Лобода, І. В. Харун // Мат. методи та фізико-механічні поля – 2002. – Т. 45, № 2. – С 103–113.

7. ***Мусхелишвили Н. И.*** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М. : Наука. – 1966. – 707 с.

8. ***Николишин М. М.*** Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля її вершин / М. М. Николишин, В. К. Опанасович, Л. Р. Куротчин // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4. – С. 101–108.

9. ***Панасюк В. В.*** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк – К. : Наук. думка, 1968. – 248 с.

10. ***Шевельова А. Є.*** Про моделювання зони руйнування міжфазної тріщини / А. Є. Шевельова // Машинознавство. – 1999. – №4 (22). – С. 46–50.

11. ***Шевельова А. Є.*** Про моделювання привершинних зон тріщини між двома анізотропними матеріалами / А. Є. Шевельова // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2000. – № 2. – С. 33–40.

А. Е. Шевелёва, канд. физ.-мат. наук

АНАЛИЗ ЗОН ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПОЛЕ СДВИГОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Исследована межфазная трещина с зонами предразрушения, которая находится под действием сдвиговых напряжений на удалении от неё. Сформулирована краевая задача Дирихле, для которой выписано точное аналитическое решение. Найдены относительные длины зон предразрушения, скачки перемещений в зависимости от интенсивности сдвигового напряжения на бесконечности и механических свойств материалов.

Ключевые слова: *межфазная трещина, зона предразрушения, кусочно-аналитическая функция, скачки перемещений.*

A. E. Sheveleva, PhD (Phys.-Math.)

ANALYSIS OF PRE-FRACTURE ZONES FOR INTERFACE CRACK IN THE FIELD OF SHEAR STRESSES

An interface crack with pre-fracture zones under remote shear loading is considered. The Dirichlet boundary value problem is formulated for a piecewise analytic function and its exact analytical solution is presented. The numerical values of relative lengths of pre-fracture zones, the jumps of displacements and shear stress in it are found depending on the external load and the mechanical properties of the materials.

Keywords: *interface crack, pre-fracture zone, piecewise analytic function, jumps of displacements.*

One of the models of interface cracks which allowing to establish the possibility of its development is a model that is based on the famous method of Leonov – Panasyuk – Dugdale [9, 2]. The development of this

model for interface crack was performed in [10, 11] for the crack between isotropic and anisotropic materials, respectively. In the analysis of the same problems in [4, 5] only the jump of normal displacement in pre-fracture zone of interface crack was taken into account. Modeling of pre-fracture zones similar to [10, 11], was also used in [1], where the expressions for displacement jumps of the crack tip were found through hypergeometric functions. The problem of biaxial stretching of piecewise homogeneous isotropic plate with rectilinear boundary of materials with a crack in an interface was studied in [8].

In the present paper the generalization of δ_k-model to the case of interface cracks under of the shear load is considered. Also corresponding fracture criterion of composite materials with interface cracks is offered.

The plane stress problem of infinite plate which consists of two bonded half-plane $y>0$ and $y<0$ is considered. The half-plane has mechanical properties μ_1, κ_1 ($y>0$) and μ_2, κ_2 ($y<0$). The shear load τ_0 acts on the plate at infinity. It is assumed that an interface crack occurs on the interval $(-a,a)$ and pre-fracture zones on the intervals $(-d,-a)$ and (a,d) with $\sigma_{xy}(x,y)=\tau_s$ in these zones take place.

Let uniform stress state $\sigma_{xx}(x,y)=\sigma_{yy}(x,y)=0$, $\sigma_{xy}(x,y)=\tau_0$ is subtracted. Then it gets a complementary strain-stress state which disappears at infinity. This state is characterized at the interface of materials by the following boundary conditions:

$$\sigma_{xy}^{(i)}(x,0)=\tau(x),\ \langle u_2(x,0)\rangle=0,\ -d<x<d, \tag{1}$$

where

$$\tau(x)=\begin{cases}-\tau_0, & |x|<a,\\ \tau_s-\tau_0, & a<|x|<d,\end{cases}. \tag{2}$$

Here and later $\langle u_i(x,0)\rangle$ means the jump of displacement $\dfrac{\partial u_i^{(1)}(x,0)}{\partial x}-\dfrac{\partial u_i^{(2)}(x,0)}{\partial x}$.

The Dirichlet boundary value problem is formulated for a piecewise analytic function and its exact analytical solution is presented. The lengths of pre-fracture zones and the analytical expressions for the jump of the displacement are found. The shear stress on the extensions of these zones is obtained. The numerical values of relative lengths of pre-fracture zones, the jumps of displacements and shear stress in it are found depending on the external load and the mechanical properties of the materials.

REFERENCES

1. ***Bakirov V. F.*** Leonov – Panasyuk – Dugdale model for cracks in the boundary of the compound materials / V. F. Bakirov, R. V. Goldstein // Applied Mathematics and Mechanics. – 2004. – Vol. 68. – Is. 1. – P. 170–179. (in Russian).

2. ***Vitvitskii P. M.*** Plastic deformations around crack and fracture criteria / P. M. Vitvitskii, V. V. Panasyuk, S. Ya. Yarema // Problems of Strength. – 1973. – No 2. – P. 3–18. (in Russian).

3. ***Gakhov F. D.*** Boundary value problems / F. D. Gakhov – M. : Nauka, 1977. – 640 p. (in Russian).

4. ***Kaminskii A. A.*** About Dugdale model for the crack on interface of different materials / A. A. Kaminskii, L. A. Kipnis, V. A. Kolmakova // Applied Mechanics. – 1999. – Vol. 35, No 1. – P. 63–68. (in Russian).

5. ***Loboda V. V.*** Determination of pre-fracture zones near the crack surfaces of the crack between two elastic orthotropic materials / V. V. Loboda, A. E. Sheveleva // Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, No 5 – P. 76–82. (in Russian).

6. ***Loboda V. V.*** Interface cracks with contact zones in the field of concentrated forces and moments / V. V. Loboda, I. V. Harun // Mathematical methods and physical-mechanical fields – 2002. – Vol. 45, No 2. – P. 103–113. (in Ukrainian).

7. ***Muskhelisvili N. I.*** Some basic problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelisvili – M. : Nauka. – 1966. – 707 p. (in Russian).

8. ***Nykolyshyn M. M.*** Biaxial stretching of piecewise homogeneous isotropic plate with a crack on a straight-line material interface based on plastic zones near its tips / M. M. Nykolyshyn, V. K. Opanasovych, L. R. Kurotchyn // Applied Problems of Mechanics and Mathematics – 2006. – Is. 4. – P. 101–108. (in Ukrainian).

9. ***Panasyuk V. V.*** Limit equilibrium of brittle bodies with cracks / V. V. Panasyuk. – K. : Nauk. Dumka, 1968. – 248 p. (in Russian).

10. ***Sheveleva A. E.*** On the modeling of fracture zone of interface crack / A. E. Sheveleva // Mashinoznavstvo. – 1999. – No 4 (22). – P. 46–50. (in Ukrainian).

11. ***Sheveleva A. E.*** On modeling near crack tip zones for the crack between two anisotropic materials / A. E. Sheveleva // Physical and chemical mechanics of materials. – 2000. – No 2. – P. 33–40. (in Ukrainian).

Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара
Дніпропетровськ, Україна

Надійшла до редколегії 17.06.2015