

УДК 539.3

Е. Л. Гарт, д-р фіз.-мат. наук, В. С. Бейцун

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН У ДВОХФАЗНОМУ КОМПОЗИЦІЙНОМУ МАТЕРІАЛІ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ПЕРЕХІДНОГО ШАРУ МІЖ ВКЛЮЧЕННЯМ І МАТРИЦЕЮ

Здійснено комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану плоского елемента пружного неоднорідного середовища з пружним еліптичним включенням і двома спряженими до нього круговими та еліптичними отворами при використанні пакету скінченно-елементного аналізу. Досліджено вплив розмірів перехідного шару між включенням і матрицею у двохфазному композиційному матеріалі на напружено-деформований стан плоского елемента середовища.

Ключові слова: пружне неоднорідне середовище, двохфазний композиційний матеріал, включення, спряжені отвори, перехідний шар, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів.

Вступ. Вивчення напружено-деформованого стану (НДС) тіл з включеннями і порами важливо для різних технологічних процесів виготовлення матеріалів (порошкова металургія, керамічне виробництво та ін.) [12 – 14]. Включеннями моделюють смугасті утворення в мікроструктурі металів, що виникають за попереднього пластичного деформування [9]. Процеси деформування в матеріалах можуть призвести до фазових перетворень, наприклад, формування мартенситних структур в аустенітних сталях [12]. Особливим видом включень можна вважати дискретне зміцнення матеріалу [8], що є одним з перспективних напрямків матеріалознавства та технології конструкційних матеріалів.

Включення суттєво впливають на процеси деформування, призводять до концентрації напружень, виникнення дефектів форми або викликають локальне руйнування [3 – 6]. Особливу увагу слід приділяти вивченню процесу утворення тріщин при фазових перетвореннях, що обумовлює початок руйнування матеріалу [1].

Вивченню впливу включень на НДС елементів конструкцій в композиційних матеріалах, широко застосовуваних в будівництві та техніці, присвячено багато робіт, зокрема [1, 6, 7]. Проблема використання композитів, що представляють собою неоднорідні суцільні матеріали, які складаються з двох або більше компонентів, пов'язана з тим, що внаслідок різних значень фізико-механічних характеристик межі між матрицею та включеннями, а також у перехідній зоні між покриттям та основою виникають великі напруження. Проте вдалий підбір співвідношення складових може сприяти зменшенню цих напружень, підвищенню працездатності деталей та конструкції у цілому.

У даній роботі проводиться дослідження НДС плоского елемента пружного неоднорідного середовища з пружним еліптичним включенням і двома спряженими до нього круговими та еліптичними отворами за заданих граничних умов у напруженнях (одновісний розтяг) за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ). Досліджується вплив на НДС вибору матеріалу включення, геометричних характеристик отворів (пор) і розмірів перехідного шару між включенням і матрицею у двохфазному композиційному матеріалі.

Постановка задачі. Розглянемо неоднорідний плоский елемент Ω розмірами $L_1 \times L_2$ пружного середовища Ω_1 (матриці) з пружним включенням Ω_2 (a – більша піввісь, b – менша піввісь еліпсу), спряженими до нього двома круговими отворами (радіусів r_1 і r_2) (рис. 1, а) та двома еліптичними отворами (a_1, a_2 – більші піввісі, b_1, b_2 – менші піввісі еліпсів відповідно) ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$). Розміри елемента такі, що граничні умови не впливають на НДС поблизу включення.

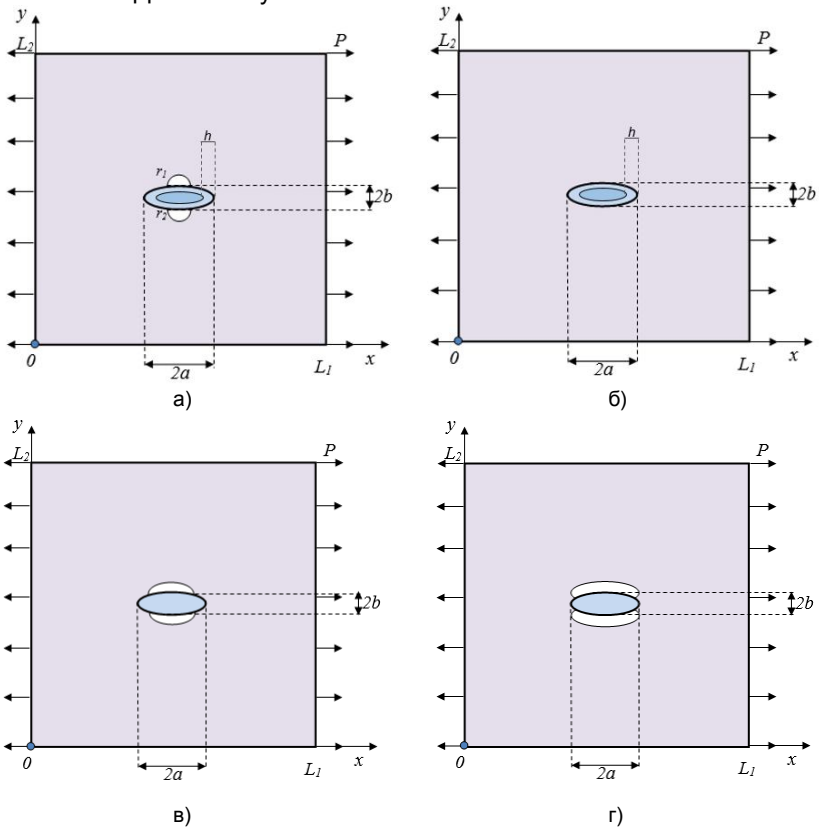


Рис. 1 – Геометрія та схема навантаження плоского елемента:
 а) з включенням і круговими отворами; б) без отворів;
 в), г) з включенням і еліптичними отворами

На границі γ області Ω ($0 \leq y \leq L_2, x = 0$ та $0 \leq y \leq L_2, x = L_1$) задані навантаження одновісного рівномірного розтягу $P(x, y) = (P_x(x, y), P_y(x, y))^T$, де $P_x(x, y) = P = const$, $P_y(x, y) = 0$. Інша частина границі області Ω ($0 \leq x \leq L_1, y = 0$ та $0 \leq x \leq L_1, y = L_2$) вільна від навантаження (рис. 1).

Необхідно визначити НДС плоского елемента (матриці) з включенням та спряженими до нього отворами; дослідити вплив на його НДС механічних характеристик включень і геометричних параметрів отворів (трансформації кругових отворів в еліптичні); вплив товщини h перехідного шару та його механічних властивостей на НДС елемента.

Як відомо, за допомогою моделей плоских задач можна виявити головні особливості НДС, зокрема при деформації середовищ з урахуванням їх взаємодії з включеннями різної форми [5, 10, 11, 13, 14].

У варіаційній постановці вихідна задача призводить до мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії деформації системи [2]:

$$\begin{aligned}
 I[u, v] = & \int_{\Omega_1} \left\{ 2\mu_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \\
 & + \sum_{i=2}^{n+1} \int_{\Omega_i} \left\{ 2\mu_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{\gamma} (P_x u + P_y v) dy, \quad (1)
 \end{aligned}$$

де λ_1, μ_1 – константи Ляме матеріалу пружного середовища (матриці) Ω_1 ; λ_i, μ_i – константи Ляме матеріалу $(i-1)$ -го включення Ω_i ($i = \overline{2, n+1}$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ – область визначення x та y .

Метод розв'язування. Задачу розв'язували за допомогою МСЕ [14, 15]. Як відомо, основна ідея МСЕ полягає у дискретизації області неперервної зміни аргументів шуканої функції (переміщення, температура, тиск і т. п.) сукупністю скінченного числа підобластей – скінченних елементів, і апроксимації неперервної функції в межах кожного скінченного елемента деяким поліномом. У результаті вихідну варіаційну задачу замінюють дискретної моделлю – системою лінійних або нелінійних алгебричних рівнянь з невідомими значеннями шуканої функції у вузлах скінченноелементної сітки.

У розрахунках використовували трикутні (шестивузлові) лагранжеві скінченні елементи другого ступеня, при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимували квадратичним поліномом. В областях концентрації напружень, на межі вклю-

чення і матриці, матриці і отворів, у перехідному шарі між включенням і матрицею використовували адаптивну сітку.

Результати числового аналізу. Числові результати розв'язуваної задачі одержані на персональному комп'ютері Intel (R) Celeron (R) i5-3337U (1,80 GHz) з 8 GB оперативної пам'яті. Для визначеності при комп'ютерному моделюванні процесу деформування плоского елемента середовища із двохфазного композиційного матеріала (рис. 1, а та рис. 1, б) розглядали сполучення двох матеріалів: алюміній ($E = 70 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,36$, $\sigma_{0,2} = 90 \text{ МПа}$, $\sigma_B = 190 \text{ МПа}$.) і легована сталь ($E = 210 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,32$, $\sigma_{0,2} = 440 \text{ МПа}$, $\sigma_B = 676 \text{ МПа}$.). Розміри плоского елемента: $L_1 \times L_2 = 400 \times 400 \text{ мм}$, розміри включення: більша піввісь еліпсу $a = 30 \text{ мм}$, менша піввісь $b = 10 \text{ мм}$, радіуси спряжених до включення кругових отворів $r_1 = r_2 = 10 \text{ мм}$.

Вважалося, що перехідний шар (кільце) має усереднені механічні властивості матриці і включення, а його товщина варіювалась у межах $h = b/4$ та $h = b/8$ (b – менша піввісь еліптичного включення). Для зручності проведення числового аналізу було введено величину – коефіцієнт відносної жорсткості включення за правилом $k_{ж} = E_{вкл}/E_{матр}$ ($E_{вкл}$ – модуль пружності включення, $E_{матр}$ – модуль пружності матриці), і у подальшому під термінами «м'яке» та «жорстке» включення розумілося пружне включення, для якого $k_{ж} < 1$ та $k_{ж} > 1$ відповідно.

Проведено дослідження впливу поєднання матеріалів матриці та включення, наявності кругових отворів, що спряжені до включення, та товщини перехідного шару між включенням та матрицею на НДС плоского елемента неоднорідного пружного середовища. Отримані графічні інтерпретації полів напружень, деформацій та переміщень. У табл. 1 наведено ККН для досліджуваних варіантів сполучень матеріалів.

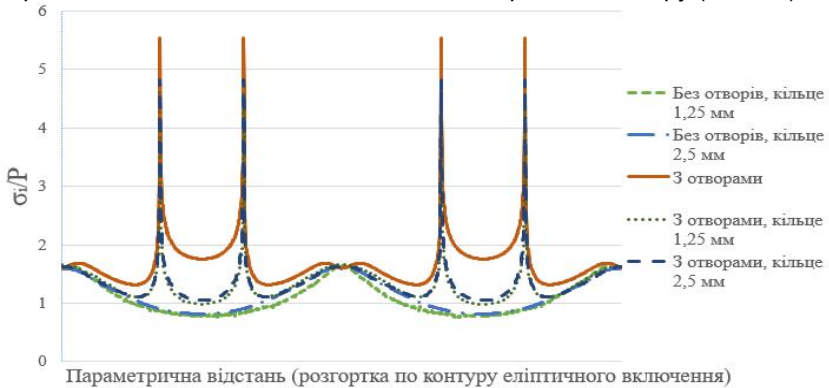
Таблиця 1 – Порівняльна таблиця ККН для задач з урахуванням перехідного шару

Тип задачі	Товщина перехідного шару	ККН		% відхилення у порівнянні з плоским елементом середовища без перехідного шару	
		$k_{ж} < 1$	$k_{ж} > 1$	$k_{ж} < 1$	$k_{ж} > 1$
Без отворів	-	1,34	1,66	-	-
	b/8	1,34	1,71	0%	3,0%
	b/4	1,31	1,75	-2,2%	5,4%
З отворами	-	3,71	5,54	-	-
	b/8	4,56	4,61	22,9%	-16,8%
	b/4	4,58	4,82	23,5%	-13,0%

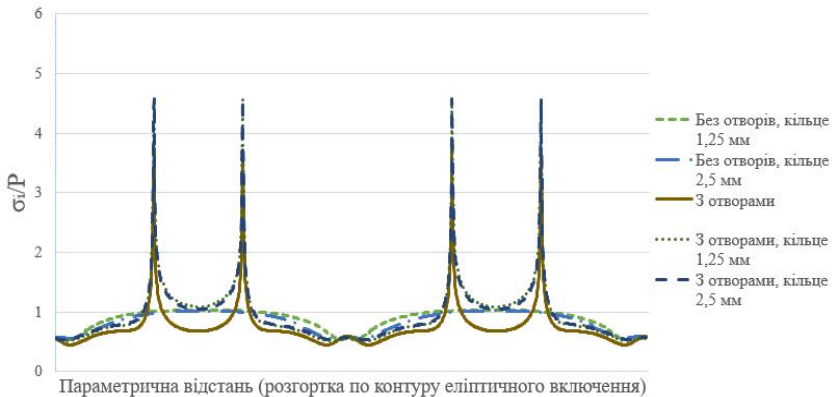
На рис. 2 наведено розподіл відносної інтенсивності напружень в плоскому елементі середовища для $k_{ж} > 1$ (рис. 2, а) та $k_{ж} < 1$

(рис. 2, б). В обох випадках концентрація напружень має місце на межі між матрицею, перехідним шаром та отворами.

Розглянуті варіанти величини товщини перехідного шару для даної моделі двохфазного композита і обраної конфігурації включення без наявності отворів значного впливу на зменшення або збільшення напружень в елементі не чинять (для $k_{ж} < 1$ відхилення $\sim 2\%$, для $k_{ж} > 1$ – не більше 5%). Але за наявності спряжених до включення отворів врахування перехідного шару відіграє важливу роль: його наявність значно впливає на величину ККН. Так, у плоскому елементі середовища з $k_{ж} < 1$ максимальні напруження у місцях їх концентрації зростають на $\sim 23\%$, а в елементі з $k_{ж} > 1$ – зменшуються на $\sim 17\%$ у порівнянні з випадком для елемента без перехідного шару (табл. 1).



а)



б)

Рис. 2 – Розподіл відносної інтенсивності напружень по розгортці контуру еліптичного включення в плоскому елементі середовища:

а) для $k_{ж} > 1$; б) для $k_{ж} < 1$

Комп'ютерне моделювання процесу деформування плоского двохфазного композиту здійснено також для іншої моделі включення і спря-

жених до нього отворів (рис. 1, в та рис. 1, г). Розглянуто вплив трансформації кругових отворів в еліптичні різних розмірів та сполучення інших матеріалів матриці і включення на НДС у композиті. Розрахунки проведені для двох варіантів матеріалу включень – мідь ($E=110 \text{ ГПа}$, $\nu=0,37$, $\sigma_{0,2} = 259 \text{ МПа}$, $\sigma_B=394 \text{ МПа}$) і молібден ($E=320 \text{ ГПа}$, $\nu=0,38$, $\sigma_{0,2} = 325 \text{ МПа}$, $\sigma_B=500 \text{ МПа}$). Матеріал матриці елемента – легована сталь. Вибір матеріалів носить умовний характер. Тут вивчали випадки: $k_{ж} > 1$ ($k_{ж} = 1,52$) і $k_{ж} < 1$ ($k_{ж} = 0,52$). Розміри отворів: $a_1 = a_2 = 2b$, $b_1 = b_2 = b$, $a = 3b$ (рис. 1, в); $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$, $a = 3b$ (рис. 1, г) (a – більша піввісь, b – менша піввісь еліптичного включення; a_1, a_2 – більші піввісі, b_1, b_2 – менші піввісі еліптичних отворів відповідно).

На рис. 3 подано результати розрахунків для розглянутих випадків.

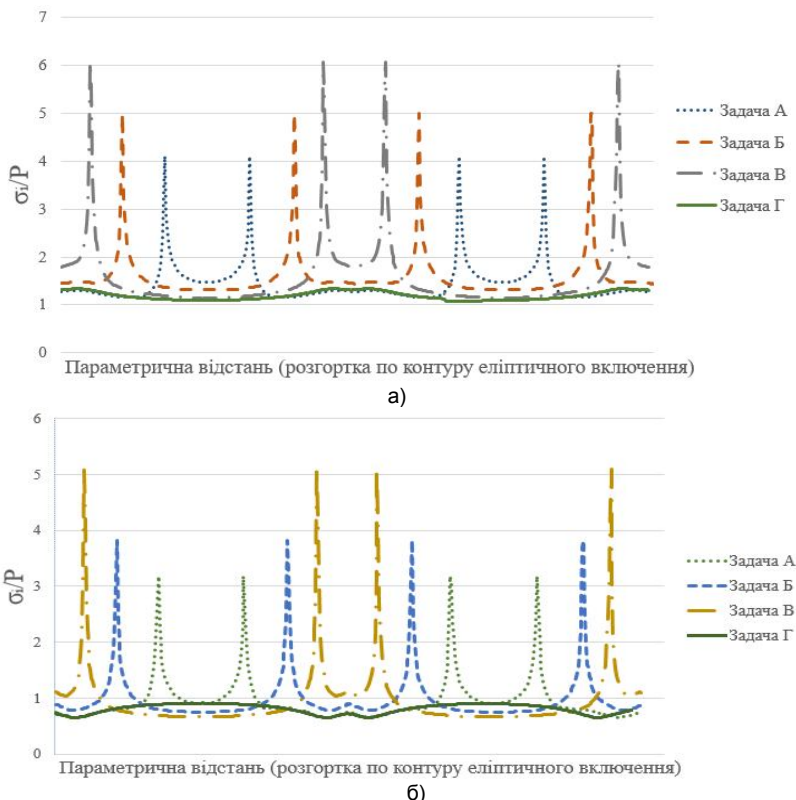


Рис. 3 – Розподіл відносної інтенсивності напружень по розгортці контуру еліптичного включення в плоскому елементі середовища:
а) для $k_{ж} > 1$; б) для $k_{ж} < 1$

Тут під задачами А – Г розуміються: Задача А – плоский елемент з включенням і двома круговими отворами (рис. 1, а), Задача Б і Задача В – плоский елемент з включенням і двома еліптичними отворами (рис. 1, в

та рис. 1, г відповідно), Задача Г – плоский елемент з включенням без отворів (рис. 1, б).

Для задач А–В у обох випадках «м'якого» і «жорсткого» включень спостерігається концентрація напружень у місцях спряження отворів з матрицею і включенням. Збільшення півосей еліптичних отворів в 1,5 рази призводить до зростання ККН в плоскому елементі середовища у середньому на ~30% для «м'якого» включення і на ~20% для «жорсткого» включення. У задачі Г (без отворів) концентрація напружень розподіляється вздовж границі області плавного переходу матеріалів (у випадку «м'якого» включення ККН=1,2, у випадку «жорсткого» ККН=1,3) (табл. 2).

Таблиця 2 – Порівняльна таблиця ККН для задач без урахування перехідного шару

Задача для порівняння ККН	ККН		
	Задача А	Задача Б	Задача В
	$k_{ж} = 1,52$		
ККН=1,30	ККН=4,10 > 3,2 разів	ККН=5,00 > 3,9 разів	ККН=6,06 > 4,7 разів
	$k_{ж} = 0,52$		
ККН=1,21	ККН=3,18 > 2,6 разів	ККН=3,81 > 3 рази	ККН=5,10 > 4,2 разів

Порівнюючи ККН в плоскому елементі середовища у задачах А–В з ККН в елементі у задачі Г для обох випадків «м'якого» і «жорсткого» включень, отримаємо, що максимальні напруження зростають в залежності від розмірів отворів у середньому у 3-4 рази.

Висновки. За результатами проведеного комп'ютерного моделювання і низки обчислювальних експериментів стосовно дослідження напружено-деформованого стану плоского елемента пружного неоднорідного середовища з пружним еліптичним включенням і двома спряженими до нього круговими та еліптичними отворами встановлено, що наявність отворів (пор) значно збільшує ККН у порівнянні з елементом середовища без них.

Перехідні шари малих розмірів між включенням і матрицею у двохфазному композиційному матеріалі незначно впливають на НДС плоского елемента середовища без отворів, проте у випадку наявності отворів здатні знижувати напруження у місцях їх концентрації для $k_{ж} > 1$ та збільшувати у випадку $k_{ж} < 1$. Введення прошарків з певними властивостями між матрицею і включенням може бути корисним і сприяти зменшенню напружень в місцях їх концентрації, підвищенню працездатності деталей та конструкції у цілому.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов. К.: Наукова думка, 1985. 302 с.
2. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
3. **Гарт Э. Л., Гудрамович В. С.** Численное моделирование поведения плоско деформируемых упругих сред с щелевидными отверстиями и включениями // Совре-

менные достижения в науке и образовании: сб. тр. X Междунар. науч. конф. (9–16 сент. 2015 г., Нетания, Израиль). Хмельницкий: ХНУ, 2015. С. 57–60.

4. **Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Клименко Д. В., Рябоконт С. А.** Взаимное влияние вырезов на прочность оболочечных конструкций при пластическом деформировании // Проблемы прочности. 2013. №1. С. 5–16.

5. **Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А.** Моделирование процесса деформирования пластины с упругими протяжёнными включениями на основе метода конечных элементов // Техническая механика. 2014. № 2. С. 12–23.

6. **Киндрачук М. В., Душек Ю. Я., Лучка М. В.** Локальный характер напряженно-деформированного состояния композиционного материала, нагруженного силами трения // Порошковая металлургия. 1994. № 9–10. С. 56–61.

7. **Корнієнко А. О.** Напружено-деформований стан у композиційному матеріалі при терті за підвищених температур // Проблеми тертя та зношування. 2013. Т. 2. Вип. 61. С. 88–91.

8. **Ляшенко Б. А., Кузема Ю. А., Дугам М. С.** Упрочнение поверхности металлов покрытиями дискретной структуры с повышенной адгезионной и когезионной стойкостью. К.: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 1984. 58 с.

9. **Морозов Н. Ф., Фрейдин А. Б.** Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1998. Вип. 223. С. 220–223.

10. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.

11. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

12. **Штерн М. Б., Рудь В. Д.** Механічні та комп'ютерні моделі консолідації гранульованих середовищ на основі порошоків металів і кераміки при деформуванні та спіканні / під ред. В. В. Скорохода. Луцьк: Луцьк. нац. техн. ун-т, 2010. 232 с.

13. **Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.** Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. 2017. Vol. 52, Iss. 6. P. 768–774.

14. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No. 1. P. 55–69.

15. **Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

УДК 539.3

Э. Л. Гарт, д-р физ.-мат. наук, В. С. Бейцун

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ДВУХФАЗНОМ КОМПОЗИЦИОННОМ МАТЕРИАЛЕ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕХОДНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ВКЛЮЧЕНИЕМ И МАТРИЦЕЙ

Проведено компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния плоского элемента упругой неоднородной среды с упругим эллиптическим включением и двумя сопряженными к нему круговыми и эллиптическими отверстиями при использовании пакета конечноэлементного анализа. Исследовано влияние размеров переходного слоя между включением и матрицей в двухфазном композиционном материале на напряженно-деформированное состояние плоского элемента среды.

Ключевые слова: упругая неоднородная среда, двухфазный композиционный материал, включение, сопряженные отверстия, переходный слой, напряженно-деформированное состояние, коэффициент концентрации напряжений, метод конечных элементов.

UDC 539:3

E. L. Hart, Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. S. Beitsun

STRESS-STRAIN STATE IN A TWO-PHASE COMPOSITE MATERIAL, TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF THE TRANSITION LAYER BETWEEN THE INCLUSION AND THE MATRIX

Computer simulation of stress-strain states of a flat element of an elastic inhomogeneous medium with elastic elliptic inclusion and two conjugate circular and elliptical holes when using a finite element package analysis is implemented. The influence of the size of the transition layer between the inclusion and the matrix in a two-phase composite material on the stress-strain state of a flat element of the medium is investigated.

Keywords: elastic inhomogeneous medium, two-phase composite material, inclusion, conjugate holes, transition layer, stress-strain state, stress concentration factor, finite element method.

Introduction. Research of the stress-strain states (SSS) of solids with inclusions and holes is important for different technological processes of production of materials (powder metallurgy, ceramic production, etc.). The special type of inclusions can be considered discrete hardening of material, which is one of the perspective directions of materials science and technologies of structural materials [8 – 14].

Inclusions significantly influence deformation processes, result in concentration of tension, appearance of defects of a form and cause local destruction [3 – 5]. Research of emergence of cracks, which lead to the beginning of destruction of an object, is especially important [1].

Many works are devoted to studying of SSS in composite materials, which widely use in construction and the equipment, in particular [6, 7]. According to international experience, it is known that the good choice of components for composite material can reduce tension in a detail or strengthen it.

Formulation of the problem. In this paper, SSS of elastic inhomogeneous medium with elliptic elastic inclusion and two circular and elliptical conjugate holes is investigated. The flat elastic medium modeled by an elastic non-uniform plate with the sides L_1 , L_2 . On the plate boundary the uniaxial stretching efforts are set. It is necessary to define SSS with different variations of mechanical characteristics of inclusions and geometrical parameters of openings and also influence of thickness of a transitional layer and its mechanical characteristics on SSS of the plate.

The finite element method [15] of the influence of the size of conjugate holes, the forms of inclusions and transition layer and their mechanical properties on the plate's SSS in the places of stress concentration factors is implemented.

A comparative analysis of the obtained results with solutions for the plate without holes and transitional layer is carried out. The influence of the size of the transition layer between the inclusion and the matrix in a two-phase composite material on SSS of a flat element of the medium is investigated.

Conclusions. On the basis of the conducted finite-element analysis of the behavior of an elastic rectangular plate with various types of elastic inclusions with the conjugated two circular and two elliptic openings, we can draw the following conclusions regarding the influence of a form of openings, inclusions, their mechanical properties and influence of thickness of a transitional layer on SSS of the plate in places of the stresses concentration.

In cases of «soft» and «hard» inclusions concentration of tension in places of a joint of openings with a matrix and inclusion is observed. Increase in semi-axes of elliptic openings by 1,5 times leads to increase of stress concentration factor in a flat element on average in ~30% for «soft» and in ~20% for «hard» inclusion. Comparing stress concentration factors for plates to «soft» and «hard» inclusion it is possible to notice that the maximum tension increases on average in 3-4 times, depending on the sizes of openings.

Transitional layers between the matrix and inclusion in plates without openings have no considerable impact on SSS of the plate. But these layers can reduce tension in plates with «hard» inclusion and increase it in plates with «soft» inclusion.

REFERENCES

1. **Vanin G. A.** Micromechanics of composites. Kiev: Naukova dumka, 1985. 302 p. (in Russian).
2. **Washizu K.** Variation methods in the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Mir, 1987. 544 p. (in Russian).
3. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Numerical model operation of behavior plainly deformable elastic mediums with the slotted opening and inclusions // The modern achievements in science and education: Col. of sci. art. of the International scient. conf. (9–16.09.2015, Netanya, Israel). Hmelniitskiy: HNU, 2015. P. 57–60. (in Russian).
4. **Hudramovich V. S., Hart E. L., Klimenko D. V., Ryabokon S. A.** Mutual influence of cuts on durability of the shell designs at plastic deformation // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. 2013, No.1. P. 5–16. (in Russian).
5. **Hudramovich V. S., Hart E. L., Strunin K. A.** Modeling of the deformation process of a plate with elastic long inclusions on the basis of the finite element method // Techn. Mechanics. – 2014. No. 2. P. 12–24. (in Russian).
6. **Kindrachuk M. V., Dushkek Yu. Ya., Luchka M. V.** The local nature of an intense strained state of the composite loaded with frictional force // Powder metallurgy. 1994. No. 9–10. P. 56–61. (in Russian).
7. **Kornienko A. O.** Stress-deformed state in composite material at friction at elevated temperatures // Friction and wear problems. 2013. Iss. 2, Vol. 61. P. 88–91. (in Ukrainian).
8. **Lyashenko B. A., Kuzema Yu. A., Digam M. S.** Hardening of a surface of metals coverings of discrete structure with the increased adhesive and cohesive firmness. Kiev: G.S. Pisarenko's Institute of strength problems of NAS of Ukraine, 1984. – 58 p. (in Russian).
9. **Morozov N. F., Freydin A. B.** Zones of phase changes and phase changes of elastic bodies at different types of a stressed state // Works of V.A. Steklov's Mathematical Institute. 1998. Vol. 223. P. 220–223. (in Russian).

10. **Savin G. N.** Stress distribution around holes. Kiev: Naukova dumka, 1968. 888 p. (in Russian).
11. **Timoshenko S. P., Goodier J.** Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1975. 576 p. (in Russian).
12. **Shtern M. B., Rud V. D.** Mechanical and computer models of consolidation of granulated environments based on powdered metals and ceramics in deformation and sintering / Edited by V. V. Skorohod. Lutsk: Lutsk nat. techn. Univ., 2010. 232 p. (in Ukrainian).
13. **Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.** Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. 2017. Vol. 52. Iss. 6. P. 768–774.
14. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No. 1. P. 55–69.
15. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

*Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 10.09.2018