УДК 539.3

Д. Д. Грищак[1]

ДО ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СУПУТНИКА В ПЛОЩИНІ ЕЛІПТИЧНОЇ ОРБІТИ

Надається числовий аналіз математичної моделі нелінійних коливань супутника в площині еліптичної орбіти на базі застосування гібридного асимптотичного методу, який є комбінацією методу збурення за параметром нелінійної складової рівняння і методу фазних інтегралів за параметром при старшій похідній. Аналізується основне диференціальне рівняння нелінійних коливань супутника за двома підходами: за розкладом у ряд нелінійної складової рівняння та застосування асимптотичного підходу до наявної нелінійної функції.

Ключові слова: *супутник, еліптична орбіта, асимптотичний розв'язок, нелінійна задача.*

Вступ. Проблемі дослідження періодичного руху супутника у площині еліптичної орбіти присвячена значна кількість публікацій. Не ставлячи за мету надати повний огляд сучасного стану цієї проблеми, посилаємося на [1 – 3, 5 – 7], де аналізується основне рівняння, яке є предметом даного дослідження та оглядову публікацію у напрямку досліджень нелінійних коливань [8]. У [1] викладено метод дослідження суттєво нелінійних задач, який іменується локальним. Для дослідження сингулярних збурень цей метод застосовано у [6]. Необхідно зазначити, що порівняльний аналіз застосування асимптотичних методів інтегрування рівняння площинних коливань з аналізом ефектів обертання супутника на основі методу усереднення з незалежними малими параметрами при явищах резонансу надано у [4]. Метою даної роботи є порівняльний числовий аналіз наближених аналітичних розв'язків сингулярної нелінійної проблеми коливань супутника в площині еліптичної орбіти із застосуванням асимптотичних підходів, запропонованих у [9, 10].

Постановка задачі. У припущенні, що супутник рухається у центральному гравітаційному полі так, що його центр мас рухається у площині еліптичної орбіти, основне нелінійне диференціальне рівняння проблеми із змінними коефіцієнтами має вигляд [1]

$$\left(1+e\cos\nu\right)\frac{d^2\delta}{d\nu^2}-2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu}+\mu\sin\delta=4e\sin\nu\ , \tag{1}$$

де δ – подвійний кут між радіус-вектором центру мас і віссю інерції, відносно якої моменті інерції дорівнює C; $\mu=3\left(A-C\right)/B$; e – ексцентриситет орбіти; ν – кутова відстань радіус-вектору від перигею орбіти (істинна аномалія); B – момент інерції відносно головної вісі інерції супутника, перпендикулярної площині орбіти; A – момент інерції відносно третьої головної осі інерції.

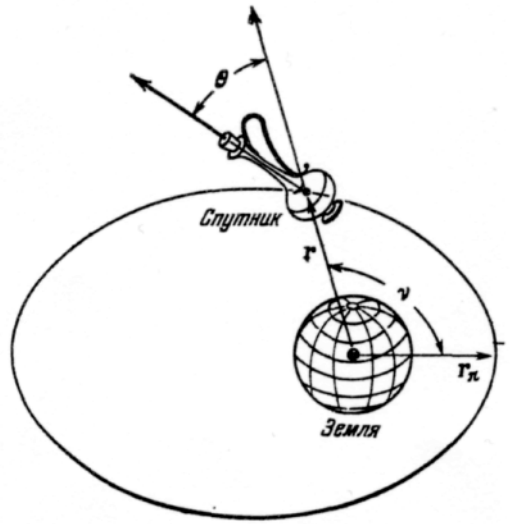

Рис. 1 – **Схема розміщення супутника на орбіті [6]**

Поділяючи (1) на коефіцієнт при старшій похідній, одержуємо

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\delta}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + b(\nu)\sin\delta = F(\nu), \qquad (2)$$

де

$$a(\nu) = \frac{1}{\mu^2}\frac{2e\sin\nu}{1+e\cos\nu}; \quad b(\nu) = \frac{1}{1+e\cos\nu}\cdot\frac{1}{\mu};$$

$$F(\nu) = \frac{1}{\mu^2}\frac{4e}{1+e\cos\nu}\sin\nu; \quad \delta = 2\theta; \quad \mu = \frac{A-C}{B}; \qquad (3)$$

$\varepsilon^2 = \dfrac{1}{\mu^2}$ – параметр при старшій похідній.

При цьому параметри системи змінюються в інтервалах

$$-3 \le \mu \le 3; \quad 0 \le e \le 1. \qquad (4)$$

Перший підхід до отримання наближеного аналітичного розв’язку рівняння (1). Одним із поширених аналітичних підходів до розв’язку рівняння (1) є розкладання нелінійної складової рівняння, тобто функції $\sin\delta$, в ряд Тейлора

$$\sin\delta = \delta - \frac{\delta^3}{6} + \frac{\delta^5}{120} + \ldots \tag{5}$$

і, утримуючи два члена ряду (5), початкове рівняння нелінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами (1) приводиться до вигляду

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\delta}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + b(\nu)\left(\delta - \frac{\delta^3}{6}\right) = F(\nu). \tag{6}$$

Для знаходження наближеного аналітичного розв'язку сингулярного нелінійного неоднорідного диференціального рівняння (6) зі змінними коефіцієнтами скористаємось гібридним асимптотичним методом [9].

Відповідно до запропонованого підходу на першому етапі використовується метод збурення за параметром при нелінійній складовій:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\delta}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta}{d\nu} + b(\nu)\delta - \lambda\bar{b}(\nu)\delta^3 = F(\nu), \tag{7}$$

де

$$\lambda = \frac{1}{6\mu}; \quad \bar{b}(\nu) = \mu b(\nu); \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{6}; \tag{8}$$

$$\delta = \delta_0 + \lambda\delta_1 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \delta_i. \tag{9}$$

Підставляючи (9) в (7) і утримуючи два члени в (5), отримуємо рівняння у формі

$$\varepsilon^2\left[\frac{d^2\delta_0}{d\nu^2} + \lambda\frac{d^2\delta_1}{d\nu^2}\right] - a(\nu)\left[\frac{d^2\delta_0}{d\nu} + \lambda\frac{d^2\delta_0}{d\nu}\right] + b(\nu)\left[\delta_0 + \lambda\delta_1\right] -$$

$$-\lambda\bar{b}(\nu)\left[\delta_0 + \lambda\delta_1\right]^3 = F(\nu). \tag{10}$$

Порівняння коефіцієнтів при однакових степенях параметру λ в рівнянні (10), приводить до системи сингулярних лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\lambda^0: \quad \varepsilon^2 \frac{d^2\delta_0}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta_0}{d\nu} + b(\nu)\delta_0 = F(\nu); \tag{11}$$

$$\lambda^1: \quad \varepsilon^2 \frac{d^2\delta_1}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta_1}{d\nu} + b(\nu)\delta_1 = \bar{b}(\nu)\delta_0^3. \tag{12}$$

Використовуючи алгоритм, запропонований, зокрема, у [9, 10], наближений аналітичний розв'язок рівняння (7) у двох ВКБ-наближеннях[2] дається у формі:

$$\delta(\nu)=\left[\frac{E(\nu)}{Q_1(\nu)^{0.25}}\right]\left\{\sin I_1(\nu)\left[s_1+\int\frac{F(\nu)y_{21}(\nu)}{A_1^2(\nu)I_1'(\nu)}d\nu+\lambda\int\frac{\bar{b}(\nu)\delta_0^3y_{21}(\nu)}{A_1^2I'(\nu)}d\nu\right]-\right.$$

$$\left.-\cos I_1(\nu)\left[s_1+\int\frac{F(\nu)y_{11}(\nu)}{A_1^2(\nu)I_1'(\nu)}d\nu+\lambda\int\frac{\bar{b}(\nu)\delta_0^3y_{11}(\nu)}{A_1^2I'(\nu)}d\nu\right],\right. \qquad (13)$$

де s_1, s_2 – довільні сталі; $\delta_0(\nu)$ – загальний розв'язок лінійного рівняння при заданих початкових умовах:

$$I_1(\nu)=\int^{\xi}\varepsilon^{-1}Q_1(\nu)^{1/2}\,d\xi;\ Q_1(\nu)=\frac{1}{2}\left[a'(\nu)-\frac{a^2(\nu)}{2\varepsilon^2}+b(\nu)\right];\ \bar{a}(\nu)=\frac{a(\nu)}{\varepsilon^2};$$

$$\bar{b}(\nu)=\frac{b(\nu)}{\varepsilon^2};\ (\ )'=\frac{d}{d\nu};\ E(\nu)=\exp\int^{\xi}+\frac{\bar{a}(\nu)}{2}d\xi;\ A_1(\nu)=\frac{E(\nu)}{Q_1(\nu)^{0.25}};$$

$$y_{11}(\nu)=\left[\frac{E(\nu)}{Q_1(\nu)^{0.25}}\right]\sin\left[I_1(\nu)\right],\quad y_{21}(\nu)=\left[\frac{E(\nu)}{Q_1(\nu)^{0.25}}\right]\cos\left[I_1(\nu)\right], \qquad (14)$$

$$\delta_0(\nu)=\left[\frac{E(\nu)}{Q_1(\nu)^{0.25}}\right]\left\{s_1\sin\left[I(\nu)\right]+s_2\cos\left[I(\nu)\right]\right\}. \qquad (15)$$

Другий підхід до отримання наближеного аналітичного розв'язку рівняння (1). За другим підходом рівняння (2) подається у вигляді

$$\varepsilon^2\frac{d^2\delta}{d\nu^2}-a(\nu)\frac{d\delta}{d\nu}=F(\nu)-\lambda\tilde{b}(\nu)\sin[\delta], \qquad (16)$$

де

$$\tilde{b}(\nu)=\frac{6}{1+e\cos\nu}. \qquad (17)$$

Застосовуючи розкладання (9) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметру λ, отримаємо систему рівнянь:

---

[2]ВКБ-наближення – квазікласичне наближення відоме також, як метод ВКБ (Вентцеля – Крамерса – Бріллюена)

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\delta_0}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta_0}{d\nu} = F(\nu), \tag{18}$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\delta_1}{d\nu^2} - a(\nu)\frac{d\delta_1}{d\nu} = -\tilde{b}(\nu)\sin[\delta_0], \tag{19}$$

розв'язок яких отримується у двох ВКБ-наближеннях:

$$\delta(\nu) = \left[\frac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}\right]\left\{\sin I_2(\nu)\left[s_1 + \int \frac{F(\nu)\,y_{22}(\nu)}{A_2^2(\nu)\,I_2'(\nu)}d\nu + \lambda\int \frac{\overline{b}(\nu)\sin[\delta_0]\,y_{22}(\nu)}{A_2^2 I_2'(\nu)}d\nu\right] - \right.$$
$$\left.\cos I_2(\nu)\left[s_1 + \int \frac{F(\nu)\,y_{12}(\nu)}{A_2^2(\nu)\,I_2'(\nu)}d\nu + \lambda\int \frac{\overline{b}(\nu)\sin[\delta_0]\,y_{12}(\nu)}{A_2^2 I_2'(\nu)}d\nu\right]\right., \tag{20}$$

де

$$A_2(\nu) = \frac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}, \quad y_{12}(\nu) = \frac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}\sin\left[I_2(\nu)\right],$$

$$y_{22}(\nu) = \frac{E(\nu)}{Q_2(\nu)^{0.25}}\cos\left[I_2(\nu)\right],$$

$$N(\nu) = \tilde{b}(\nu)\sin\left[\delta_0(\nu)\right], \qquad Q_2(\nu) = \frac{1}{2}\left[a'(\nu) - \frac{a^2(\nu)}{2\varepsilon^2}\right],$$

$$I_2(\nu) = \int^{\xi} \varepsilon^{-1} Q_2(\nu)^{1/2}\, d\xi. \tag{21}$$

Аналіз числових результатів за двома підходами. Порівняння двох підходів здійснюється за параметрами:

$$e = 0.5, \quad \mu = 2, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{\mu^2} = 0.25, \quad \lambda = \frac{\varepsilon}{6} = 0.0833. \tag{22}$$

За початкових умов

$$\delta_0(0) = 1, \qquad \delta_0'(0) = 0 \tag{23}$$

розв'язок лінійної задачі за першим підходом

$$0.25\frac{d^2\delta_0}{d\nu^2} - \frac{0.25\sin[\nu]}{1+0.5\cos[\nu]}\frac{d\delta_0}{d\nu} + \frac{0.5}{1+0.5\cos[\nu]}\delta_0 = 0 \tag{24}$$

має вигляд

$$\delta_0(\nu) = \frac{1.225\cos[2\nu]}{(1 + 0.5\cos[\nu])^{0.5}}. \tag{25}$$

У зв'язку із громіздкістю нелінійних розв'язків надається лише графічне їх представлення (залежностей $\delta=\delta(\nu)$ у радіанах) на рис. 2 – 5.

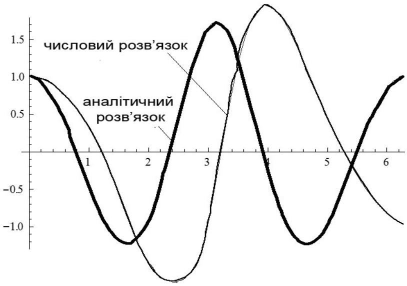

Рис. 2 – **Співставлення аналітичного (за першим підходом) та числового розв'язків однорідної лінійної задачі** $\delta=\delta(\nu)$

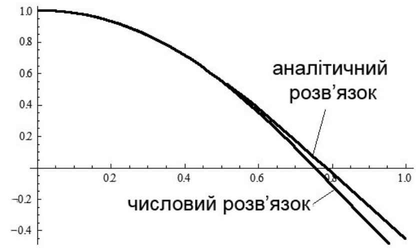

Рис. 3 – **Співставлення аналітичного (за першим підходом) та числового розв'язків однорідної нелінійної задачі** $\delta=\delta(\nu)$

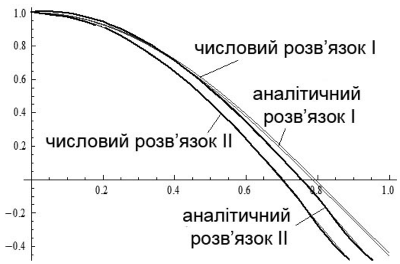

Рис. 4 – **Співставлення аналітичного (за першим і другим підходами) та числового розв'язків однорідної нелінійної задачі** $\delta=\delta(\nu)$

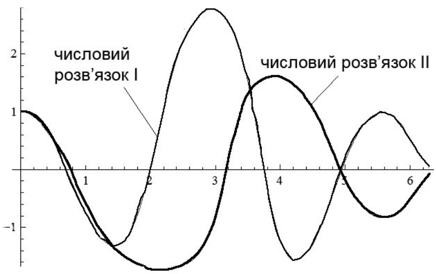

Рис. 5 – **Співставлення числових (за першим і другим підходами) розв'язків однорідної нелінійної задачі** $\delta=\delta(\nu)$

Висновки. Надано порівняльний аналіз двох підходів до вирішення нелінійної проблеми динаміки супутника в площині еліптичної орбіти на базі гібридного асимптотичного методу. Проблема зводиться до необхідності інтегрування сингулярних нелінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Співставлення наближених аналітичних і прямих числових розв'язків основних рівнянь динаміки дозволяють зробити висновок про можливість застосування запропонованих підходів на начальній стадії зміни параметру ν. Для значних величин параметру перевага надається другому підходу.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Белецкий В. В.*** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле / В. В. Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975.

2. ***Брюно А. Д.*** Вычисление периодических колебаний спутника / А. Д. Брюно, В. Ю. Петрович // Математическое моделирование. – 1997. – Т. 9, № 6. – С. 82–94.

3. ***Брюно А. Д.*** Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. – М.: Наука, 1979. – 256 с.

4. ***Красильников П. С.*** Малые плоские колебания спутника на эллиптической орбите. / П. С. Красильников // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 671–696.

5. ***Садов С. Ю.*** Нормальная форма уравнения колебаний спутника в сингулярном случае / С. Ю. Садов // Математические заметки. – 1995. – Т.58, № 5. – С. 785–789.

6. ***Сарычев В. А.*** Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты / В. А. Сарычев, В. В. Сазонов, В. А. Златоустов // Космические исследования. – 1977. – Т.15, № 6. – С. 809–834.

7. ***Bruno A. D.*** Limit problems for the equation of oscillation of a satellite / A. D. Bruno, V. P. Varin // Celestial Mechanics. – 1977. – Vol. 66, No 1. – P. 17–68.

8. ***Kerschen G.*** Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. / G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, J.-C. Golinval. // Jnt. J. Mechanical Systems and Signal Processing. – 2006. – Vol. 20. – P. 505–592.

9. ***Gristchak V. Z.*** Hybrid asymptotic method. Theory and applications / V. Z. Gristchak, D. D. Gristchak, Yu. A. Fatieieva // Zaporizhzhye. -2016. – P. 107.

10. ***Gristchak V. Z.*** More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. / V. Z. Gristchak, D. D. Gristchak // Proc. 4-th Int. Conf. «Nonlinear Dynamics», Sevastopol, 19-22 June, 2013. – P. 46–50.

УДК 539.3

Д. Д. Грищак

К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ СПУТНИКА В ПЛОСКОСТИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЫ

Проведен численный анализ математической модели нелинейных колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты на базе применения гибридного асимптотического метода, который является комбинацией метода возмущений по параметру нелинейной составляющей уравнения и метода фазовых интегралов по параметру при старшей производной. Анализируется основное дифференциальное уравнение нелинейных колебаний спутника в соответствии с двумя подходами: с учетом разложения в ряд нелинейной составляющей уравнения и применения асимптотического подхода к явной нелинейной функции.

Ключевые слова: *спутник, эллиптическая орбита, асимптотическое решение, нелинейная задача.*

UDC 539.3

D. D. Gristchak

TO NUMERICAL ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL FOR NONLINEAR SATELLITE VIBRATION IN THE PLANE OF ELLIPTICAL ORBIT

Paper deals with numerical analysis of mathematical model for nonlinear satellite vibration in the plane of elliptical orbit on the basis of hybrid asymptotic method that is combination of perturbation method with respect to nonlinear parameter at the nonlinear constituent of equation and phase integral method with respect to parameter at highest derivative. Basic differential equation of satellite nonlinear vibrations in accordance with two approaches: taking into account decomposition in

the series of nonlinear constituent of equation and application of the asymptotic approach to an explicit nonlinear function.

Keywords: *satellite, elliptical orbit, asymptotic solution, nonlinear problem.*

A two-step hybrid perturbation – WKB (or phase-integral) method is presented for the solution of a satellite nonlinear vibration problem in the plane of elliptic orbit. This analytical approach is effective for the solution of a variety of singular nonlinear differential equations which involve scalar parameters. The resulting (an approximate) analytical solutions has a form of a sum where each term consists of the product of two functions according to perturbation (on parameter at nonlinear term) and WKB (on singular parameter) methods. Unlike existent approaches, where a nonlinear trigonometric function is represented usually as a series decomposition function, in proposed approach the nonlinear term of initial second order singular differential equation with variable coefficients is taking into account without series presentation.

Comparison of results with using of proposed solutions and direct numerical integration of initial equations are given.

REFERENCES

1. ***Belecky V. V.*** Satellite movement with respect to center of mass in gravitational field / V. V. Belecky. – M.: Publ. MGU, 1975. (in Russian).

2. ***Bruno A. D.*** Calculationg of periodic satellite vibtrations Вычисление периодических колебаний спутника / A. D. Bruno, D. Yu. Petrovich // Mathematical modelling. – 1997. – V. 9, No 6. – P. 82–94. (in Russian).

3. ***Bruno A. D.*** Local method of nonlinear analysis for differential equations / A. D. Bruno. – M.: Nauka, 1979. – 256 p. (in Russian).

4. ***Krasilnikov P. S.*** Satellite small flat vibrations on elliptical. / P. S. Krasilnikov // Nonlinear Dynamics. – 2013. – Vol. 9, No 4. – P. 671–696. (in Russian).

5. ***Sadov S. Yu.*** Normal formed of satellite vibration in singular case / S. Yu. Sadov // Mathematical Notes. – 1995. – Vol. 58, No 5. – P. 785–789. (in Russian).

6. ***Sarichev V. A.*** Satellite periodic vibrations in the plane of elliptical / V. A. Sarichev, V. V. Sazonov, V. A. Zlatoustov // Space Researches. – 1977. – Vol. 15, No 6. – P. 809–834. (in Russian).

7. ***Bruno A. D.*** Limit problems for the equation of oscillation of a satellite / A. D. Bruno, V. P. Varin // Celestial Mechanics. – 1977. – Vol. 66, No 1. – P. 17–68.

8. ***Kerschen G.*** Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. / G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis, J.-C. Golinval. // Jnt. J. Mechanical Systems and Signal Processing. – 2006. – Vol. 20. – P. 505–592.

9. ***Gristchak V. Z.*** Hybrid asymptotic method. Theory and applications / V. Z. Gristchak, D. D. Gristchak, Yu. A. Fatieieva // Zaporizhzhye. – 2016. – P. 107.

10. ***Gristchak V. Z.*** More Precise Analytical Solution for Satellite Nonlinear Vibration Problem in the Plane of Elliptical Orbit. / V. Z. Gristchak, D. D. Gristchak // Proc. 4-th Int. Conf. «Nonlinear Dynamics», Sevastopol, 19–22 June, 2013. – P. 46–50.

Центральний науково-дослідний
Інститут озброєння то військової
техніки Збройних Сил України,
Київ, Україна

Надійшла до редколегії 20.02.2017