

DOI: 10.15421/4219028
УДК 539.3

В. И Заяц¹, канд. техн. наук, П. А. Иващенко²

ФОРМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Предлагается новая форма решения пространственных задач теплопроводности и теории упругости в виде трех наборов полиномов, связанных определяющим соотношением температура – термоупругий потенциал перемещений. Приводятся результаты для напряжений в прямоугольной призме, нагруженной по граням тепловым потоком.

Ключевые слова: термоупругий потенциал перемещений, форма решения, ультрасферические многочлены, базисные функции, граничные условия, тепловые напряжения.

Введение. Элементы многих машин и аппаратов, а также строительных конструкций работают в условиях неравномерного нестационарного нагрева, что приводит к возникновению тепловых напряжений. Определение температурных полей и обусловленных ими напряжений необходимы для анализа прочности и правильного функционирования конструкций. В некоторых случаях объект исследования необходимо рассматривать как трехмерное тело конечных размеров. Большинство полученных результатов относятся либо к осесимметричным задачам, либо к задачам для полупространства [2, 3, 7 – 9].

Эффективным методом определения тепловых перемещений $u_i^{(T)}$ в упругом теле, находящемся в температурном поле Θ , является представление $u_i^{(T)}$ через термоупругий потенциал перемещений ϕ как [7]

$$u_i^{(T)} = \frac{\partial \phi}{\partial i}, \quad i = x, y, z. \quad (1)$$

Выражение (1) соответствует частному решению системы уравнений равновесия теории термоупругости в перемещениях. В этом случае соотношение, связывающее потенциал с температурным полем Θ , имеет вид

$$\nabla^2 \phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T \Theta, \quad (2)$$

где ν и α_T – коэффициенты Пуассона и линейного расширения, соответственно.

Таким образом, первым этапом является решение задачи теплопроводности, которое позволяет по известному термоупругому потенциалу перемещений согласно (1) найти температурные перемещения $u_i^{(T)}$ и далее определить компоненты тепловых напряжений $\sigma_{ij}^{(T)}$ [8] как

$$\sigma_{ij}^{(T)} = 2G \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial i \partial j} - \delta_{ij} \nabla^2 \phi \right), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = x, y, z, \quad (3)$$

где G – модуль сдвига.

На втором этапе строится решение трехмерной задачи теории упругости u_i^*, σ_{ij}^* , которое позволяет удовлетворить заданным граничным условиям

$$u_i = u_i^{(T)} + u_i^*, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(T)} + \sigma_{ij}^*.$$

В этом подходе основным моментом является определение функций, удовлетворяющих соотношению (2). В [6] для построения решения (2) предлагаются функции, представленные через ультрасферические многочлены $P_n^{(\lambda)}(t)$ [2] следующим образом:

$$\eta_n = \frac{1}{n!} \rho^n P_n^{(\lambda)}(t), \quad \lambda = \frac{1}{2}, \quad \nabla^2 \eta_n = 0, \quad \nabla^2 \eta_n = 0, \quad (4)$$

$$\psi_n = \frac{1}{n!} \rho^n (1-t^2) P_{n-2}^{(\lambda)}(t_\beta), \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad \nabla^2 \psi_n = 2\eta_{n-2}, \quad (5)$$

$$\Phi_n = \frac{3}{n!} \rho^n (1-t^2)^2 P_{n-4}^{(\lambda)}(t_\beta), \quad \lambda = \frac{5}{2}, \quad \nabla^2 \psi_n = 4\psi_{n-2}. \quad (6)$$

Здесь $t = t_\beta = \frac{\beta}{\rho}$, $\beta = x, y, z$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Согласно (4) – (6) строятся два решения для температуры θ в функциях η_n и ψ_n

$$\Theta = \sum_{n=0}^N a_n \eta_n \quad \text{и} \quad \Theta = \sum_{m=2}^M b_m \psi_m.$$

На основе этих решений из (2) получаются два представления для термоупругого потенциала перемещений, выраженные через функции ψ_n и Φ_n соответственно

$$\varphi = \sum_{n=0}^N a_n \psi_{n+2} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{C}{2} \sum_{m=2}^M b_m \Phi_{m+2}, \quad C = \frac{1}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T.$$

Каждая из функций (4) – (6) соответствует осесимметричному решению относительно оси β . Поэтому решения пространственных задач теплопроводности и термоупругости, построенные как сумма этих функций, в частности

$$\psi = \sum_q \sum_{n=2}^N a_{nq} \psi(t_\beta), \quad \beta = x, y, z,$$

накладывает существенные ограничения симметрии как на геометрические характеристики упругих тел, так и на распределение нагрузок.

Построение формы решения. Если функцию ψ_n в соотношении (5) записать в виде

$$\psi_n(t_z) = \frac{1}{n!} (x^2 + y^2) \rho^{n-2} P_{n-2}^{(\lambda)}(t_z) = F_{xn} + F_{yn}, \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad (7)$$

то из этой формулы следует, что $\psi_n(t_z)$ представляет собой сумму двух функций, каждая из которых является бигармонической, но не будет являться решением осесимметричных задач.

Найдем для F_{xn} , определенной согласно (7), две функции f_{xn} и Π_{xn} , которые удовлетворяют условиям типа (4) и (6), т.е.

$$\nabla^2 F_{xn} = C f_{xn-2}, \quad \nabla^2 \Pi_{xn} = K F_{xn-2}, \quad (8)$$

где C и K – некоторые константы.

Очевидно, что для любой функции $S = S(x, y, z)$ справедливо равенство

$$\nabla^2 (x^2 S) = S + 4x \frac{\partial S}{\partial x} + 4x^2 \nabla^2 S. \quad (9)$$

При помощи соотношения для ультрасферических многочленов [10]

$$(1-t^2) \frac{d}{dt} P_n^{(\lambda)}(t) = -n t P_n^{(\lambda)}(t) + (n+2\lambda-1) P_{n-1}^{(\lambda)}(t)$$

можно показать, что $\frac{\partial}{\partial \beta} \rho^n P_n^{(\lambda)}(t_\beta) = (n+2\lambda-1) P_{n-1}^{(\lambda)}(t_\beta)$.

Если в качестве $S = S(x, y, z)$ в (9) взять функцию

$$S_n^{(2\lambda)} = \frac{1}{(n+2\lambda-1)!} \rho^n P_n^{(\lambda)}, \quad (10)$$

то получаем достаточно компактную формулу для производных

$$\frac{\partial}{\partial \beta} S_n^{(2\lambda)}(t_\beta) = S_{n-1}^{(2\lambda)}(t_\beta), \quad \beta = x, y, z. \quad (11)$$

При вычислении других производных, в частности при $t = t_z$, применяя последовательно соотношения [10]

$$nP_n^{(\lambda)}(t) = t \frac{d}{dt} P_{n+1}^{(\lambda)}(t) - \frac{d}{dt} P_{n-1}^{(\lambda)}(t), \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} P_n^{(\lambda)}(t) = 2\lambda P_{n-1}^{(\lambda+1)}(t), \quad (13)$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n^{(2\lambda)}(t_z) = -2\lambda x S_{n-2}^{(2\lambda+2)}(t_z). \quad (14)$$

С помощью формул (11), (14), а также дифференциального уравнения для ультрасферических многочленов [10]

$$(1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_n^{(\lambda)}(t) - (2\lambda+1)t \frac{d}{dt} P_n^{(\lambda)}(t) + n(n+2\lambda)P_n^{(\lambda)}(t) = 0$$

получаем, что результат применения оператора Лапласа к функции (10) имеет вид

$$\nabla^2 S_n^{(2\lambda)} = 2\lambda(2\lambda-1)S_{n-2}^{(2\lambda+2)}. \quad (15)$$

Тогда выражение (9) для функции $S = S_{n-2}^{(2\lambda)}$ запишется так

$$\nabla^2 [x^2 S_{n-2}^{(2\lambda)}] = 2 \{ S_{n-2}^{(2\lambda)} + \lambda(2\lambda-5)x^2 S_{n-4}^{(2\lambda+2)} \}. \quad (16)$$

Определим функцию F_{xn} в (7) как

$$F_{xn}(t_z) = x^2 S_{n-2}^{(3)}(t_z). \quad (17)$$

При $\lambda = 3/2$ формула (16) примет вид

$$\nabla^2 F_{nx}(t_z) = 2(S_{n-2}^{(3)} - 3x^2 S_{n-4}^{(5)}). \quad (18)$$

Если для правой части (18) ввести обозначение

$$f_{xn}(t_z) = S_n^{(3)} - 3x^2 S_{n-2}^{(5)}, \quad (19)$$

то соотношения (18) запишется в форме, связывающей бигармоническую $F_{xn}(t_z)$ и гармоническую $f_{xn}(t_z)$ функции,

$$\nabla^2 F_{xn}(t_z) = 2f_{xn}(t_z). \quad (20)$$

Результат $\nabla^2 f_{xn}(t_z) = 0$ непосредственно следует из соотношений (15) и (18), вычисленных при $2\lambda = 3$ и $2\lambda = 5$ соответственно.

Для нахождения функции Π_{xn} из (8) отметим, что в принятых обозначениях (10) выражение $\nabla^2 \psi_n = 2\eta_{n-2}$ из (5) запишется так

$$\nabla^2 (x^2 + y^2) S_{n-2}^{(3)} = 2S_{n-2}^{(1)},$$

а (16) при $\lambda = 1/2$ примет вид

$$\nabla^2 x^2 S_{n-2}^{(1)} = 2(S_{n-2}^{(1)} - 2x^2 S_{n-4}^{(3)}).$$

Из последних двух соотношений находим

$$\nabla^2 \left\{ (x^2 + y^2) S_{n-2}^{(3)} - x^2 S_{n-2}^{(1)} \right\} = 4x^2 S_{n-4}^{(3)}.$$

Применив для потенциала обозначение $\Pi_{xn} = (x^2 + y^2) S_{n-2}^{(3)} - x^2 S_{n-2}^{(1)}$, последний результат запишется в искомой форме (8) $\nabla^2 \Pi_{xn} = 4F_{xn}$.

С учетом последних соотношений для потенциала полученные выше результаты (10), (17), (19) можно представить в общей форме решения, аналогичной формулам (4)–(6)

$$f_{in}(t_\beta) = S_n^{(3)}(t_\beta) - 3i^2 S_{n-2}^{(5)}(t_\beta), \quad \nabla^2 f_{in}(t_\beta) = 0 \quad (21)$$

$$F_{in}(t_\beta) = i^2 S_{n-2}^{(3)}(t_\beta), \quad \nabla^2 F_{in}(t_\beta) = 2f_{xn}(t_\beta) \quad (22)$$

$$\Pi_{in}(t_\beta) = (i^2 + j^2) S_{n-2}^{(3)}(t_\beta) - i^2 S_{n-2}^{(1)}(t_\beta), \quad \nabla^2 \Pi_{in}(t_\beta) = 4F_{in}(t_\beta). \quad (23)$$

Здесь $S_n^{(2\lambda)} = \frac{1}{(n+2\lambda-1)!} \rho^n P_n^{(\lambda)}(t_\beta)$, а ультрасферические многочлены вычисляются по рекуррентной формуле [10]:

$$nP_n^{(\lambda)}(t) = 2(n+\lambda-1)tP_{n-1}^{(\lambda)}(t) - (n+2\lambda-2)P_{n-2}^{(\lambda)}(t), \quad P_0^{(\lambda)}(t) = 1, \\ P_1^{(\lambda)}(t) = 2\lambda t.$$

В формулах (21) – (23) параметры принимают значения $i, j, \beta = x, y, z$; $i, j \neq \beta$, $j \neq i$.

Обозначим через F , f и Π три набора функций $F_{in}(t_\beta)$, $f_{in}(t_\beta)$, $\Pi_{in}(t_\beta)$, задаваемых формулами (21) – (23). Из формы связи между этими функциями следует, что представление решения для температуры θ в виде f и F позволяет найти термоупругий потенциал перемещений из определяющего соотношения (2) в виде F и Π соответственно.

Можно показать, что функции из решения (4) – (6) представляют собой сумму соответствующих функций из (21) – (23)

$$\begin{aligned}\eta_n(t_\beta) &= f_{in}(t_\beta) + f_{jn}(t_\beta), & \psi_n(t_\beta) &= F_{in}(t_\beta) + F_{jn}(t_\beta), \\ \Phi_n(t_\beta) &= \Pi_{in}(t_\beta) + \Pi_{jn}(t_\beta),\end{aligned}$$

т.е. F , f , Π получены путем расщепления осесимметричных решений, и поэтому для них будем применять термин «расщепленная форма решения».

Базис, построенный из набора функций F , в общем случае может быть записан так

$$F = \sum_{\beta} \sum_{n=2}^N \{a_{i\beta n} F_{in}(t_\beta) + a_{j\beta n} F_{jn}(t_\beta)\}, \quad i, j, \beta = x, y, z, \quad i, j \neq \beta. \quad (24)$$

Следует отметить, что для $n=4$ из шести функций в (24) линейно независимыми являются только пять. А при $n=2$ три из шести функций совпадают $F_{i2}(t_\beta) = F_{j2}(t_\beta) = i^2$, $i, j, \beta = x, y, z$, $i \neq j, \beta$, $j \neq \beta$ и, очевидно, не могут быть включены в решения. Также можно показать, что каждая из шести функций из набора f с номерами $n=2,3,4$ является линейной комбинацией F с теми же номерами. При численном решении задачи представление (24) является достаточно сложным и неудобным, поэтому набор функций целесообразно записать в форме вектора

$$F = \sum_{k=0}^K c_k \tilde{F}_k, \quad K = 6(L-2) - 4, \quad f = \sum_{m=0}^M b_m \tilde{f}_m, \quad M = 6(L-4) - 1, \quad (25)$$

где \tilde{F}_k , \tilde{f}_m записанные в определенном порядке функции из (22), (21) с учетом не включенных в решения равных и линейно зависимых слагаемых, L – наивысшая степень многочленов в (24).

Для апробации предложенной формы решения и сравнения результатов с полученными с помощью функций (4) – (6) рассмотрим задачу о тепловых напряжениях, возникающих при нагреве прямоугольной призмы, ограниченной плоскостями $x = \pm h_x$, $y = \pm h_y$, $z = \pm h_z$. К граням призмы может быть приложен тепловой поток интенсивности q , или они могут быть теплоизолированными. Считается, что в начальный момент

времени температура тела равна температуре среды, т.е. $\Theta(x, y, z, 0) = \Theta_0$. Далее для удобства расщепленное решение, обозначим как решение I, а осесимметричное (4) – (6) – как решение II.

Решение задачи теплопроводности. Решение задачи определения температуры $\Theta(x, y, z, \tau)$ в некоторой области Ω для произвольного момента времени $\tau > \tau_0$ в вариационной постановке сводится к поиску функции, которая доставляет минимум функционалу [6]

$$J = \int_{\Omega} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \Theta)^2 d\Omega - \int_{\Gamma_2} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial n} d\Gamma + \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma_3} \Theta^2 d\Gamma, \quad (26)$$

где Γ_2 – часть границы, на которой задан тепловой поток, а на части границы Γ_3 происходит теплообмен со средой с коэффициентом теплоотдачи α . При этом предполагается, что граничные условия для температуры выполнены. Также функция Θ должна удовлетворять начальному и соответствующим краевым условиям. Функционал (26), начальное условие, а также граничные условия в рассмотренных примерах записаны в стандартной безразмерной форме [1].

Искомое решение представляется отрезками рядов по известным базисным функциям, коэффициенты при которых являются неизвестными функциями времени. В качестве базиса взяты бигармонические функции (5), а также линейная форма координат

$$\Theta = a_0(\tau) + a_1(\tau)x + a_2(\tau)y + a_3(\tau)z + \sum_{k=4}^K a_k(\tau) \tilde{F}_k \quad (27)$$

В каждый момент времени эти коэффициенты считаются варьируемыми параметрами, и задача сводится к определению функций $a_k(\tau_i)$ для фиксированного значения времени τ_i . После приближенной замены производной по времени в (26) с помощью трехточечной формулы численного дифференцирования

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{2\Delta\tau} \left[3 \sum_{n=0}^K a_n(\tau_i) \Theta_n - 4 \sum_{n=0}^K a_n(\tau_{i-1}) \Theta_n + \sum_{n=0}^K a_n(\tau_{i-2}) \Theta_n \right] \quad (28)$$

из необходимого условия экстремума получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций времени. Здесь $\Delta\tau$ – шаг по времени, $\tau_i = \tau_{i-1} + \Delta\tau$, i – номер временного слоя. Значение коэффициентов $a_k(\tau_{i-1})$ и $a_k(\tau_{i-2})$ предполагаются известными из решения задачи для предыдущих моментов времени.

Решение задачи теории упругости. После решения задачи теплопроводности по известным значениям $a_k(\tau)$ напряжения $\sigma_{ij}^{(T)}$ вычисляются согласно (3) по термоупругому потенциалу перемещений (23)

$$\varphi = \sum_{k=4}^K a_{k+2}(\tau) \tilde{\Pi}_k \quad K = 6(L-2) - 4, \quad (29)$$

где τ – момент времени, для которого проводятся вычисления. При этом в (28) учтено, что линейная составляющая в решении для температурного поля (27) тепловых напряжений не вызывает.

В случае, когда боковые поверхности свободны от напряжений, механические граничные условия на всех гранях призмы имеют вид

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu^{(T)} + \sigma_\nu^* = 0, \quad \sigma_\tau = \sigma_\tau^{(T)} + \sigma_\tau^* = 0, \quad (30)$$

где σ_ν и σ_τ – полное нормальное и касательное напряжения на грани.

Для решения трехмерной задачи теории упругости используем решения в перемещениях в форме Сомильяны и Доугалла [4], в которых перемещения представлены через бигармонические и гармонические функции соответственно. В принятых обозначениях (21), (22) выражения для перемещения примут вид
– решение Сомильяны

$$u_{in}^* = \frac{\partial F_{in}(t_\beta)}{\partial i}, \quad u_{\beta n}^* = F_{\beta n-1}(t_\beta) - 2(1-\nu)f_{\beta n-1}(t_\beta),$$

– решение Доугалла

$$u_{in}^* = \frac{\partial f_{in}(t_\beta)}{\partial i}, \quad u_{\beta n}^* = f_{\beta n-1}(t_\beta),$$

где индексы принимают значения $i, \beta = x, y, z, \quad i \neq \beta$.

После перехода в последних соотношениях с помощью закона Гука от перемещений к напряжениям σ_{ij}^* , задача сводится к нахождению набора коэффициентов из условий выполнения (30) в смысле наименьших квадратов, то есть из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из условия минимума функции отклонений

$$I = \sum_{n=1}^6 \int_{\Gamma_n} \left[\sum_{k=0}^K c_k \sigma_{kv}^*(\bar{r}_n) + \sum_{m=0}^M b_m \sigma_{mv}^*(\bar{r}_n) + \sigma_v^{(T)}(\bar{r}_n) \right]^2 d\Gamma + \\ + \sum_{n=1}^6 \int_{\Gamma_n} \left[\sum_{k=0}^K c_k \sigma_{k\tau}^*(\bar{r}_n) + \sum_{m=0}^M b_m \sigma_{m\tau}^*(\bar{r}_n) + \sigma_\tau^{(T)}(\bar{r}_n) \right]^2 d\Gamma.$$

Здесь $\sigma_{k\nu}^*(\bar{r}_n)$, $\sigma_{k\tau}^*(\bar{r}_n)$ – вклад соответствующих слагаемых из решения (25) в нормальную и касательную компоненты напряжений в точке с радиусом-вектором \bar{r}_n на грани призмы Γ_n .

Поскольку точность получаемого решения во многом определяется точностью выполнения условий (30), а в пространственном случае проводить ее оценку путем визуального анализа результатов довольно сложно, то в качестве меры точности удовлетворения граничных условий была принята величина

$$d = 100\% \sum_{k=1}^6 \int_{\Gamma_k} (\sigma_\nu^2 + \sigma_\tau^2) d\Gamma / \int_{\Gamma_k} \{ \sigma_\nu^{(T)} \cdot \sigma_\nu^{(T)} + \sigma_\tau^{(T)} \cdot \sigma_\tau^{(T)} \} d\Gamma. \quad (31)$$

Значение $d = 0$ соответствует точному выполнению граничных условий.

Результаты численного решения. В первом примере размеры призмы приняты равными $h_x = h_y = h_z = 0,5$, а тепловой поток постоянной интенсивности приложен ко всем граням

$$-\frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 1, \quad x = \pm h_x, \quad y = \pm h_y, \quad z = \pm h_z.$$

Из графиков, приведенных на рис. 1, следует, что на оси куба (кривая 1) напряжения $\sigma_{xx}(x, 0, 0)$ являются растягивающими, а на гранях (кривая 2) действуют сжимающие напряжения $\sigma_{xx}(x, 0, h_z)$. При этом результаты, полученные из решения I и II совпадают, как и величина меры отклонения, которая составляет 1,44 %.

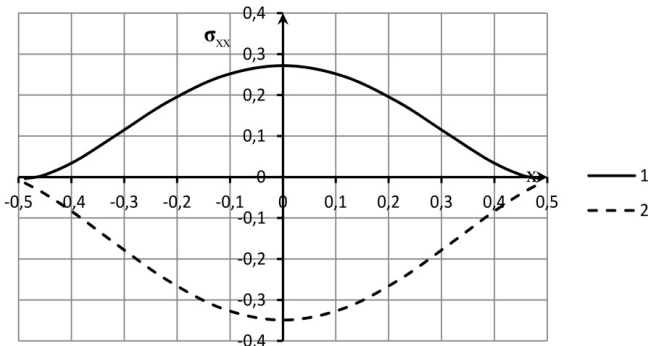


Рис. 1 – Напряжения при нагреве куба по всем граням единичным тепловым потоком

Во втором примере размеры призмы равны $h_x = 1; h_y = 0,5; h_z = 0,25$, а тепловые граничные условия совпадают с условиями первого приме-

ра. Из результатов, приведенных на рис. 2 видно, что распределения напряжений $\sigma_{xx}(x,0,0)$ по оси призмы, кривые 1 и 2 для решений I и II соответственно, близки как качественно, так и по величине. На гранях $z = \pm h_z$ распределение напряжений $\sigma_{xx}(x,0,\pm h_z)$, кривые 3 и 4 для решений I и II соответственно отличаются. Оба решения дают снижение уровня напряжений в центральной зоне по сравнению с кубом, но для расщепленной формы уровень этого снижения существенно выше.

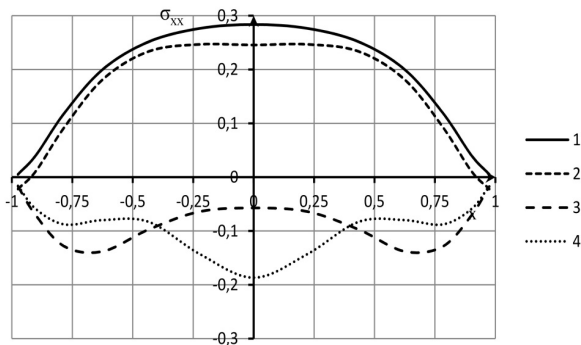


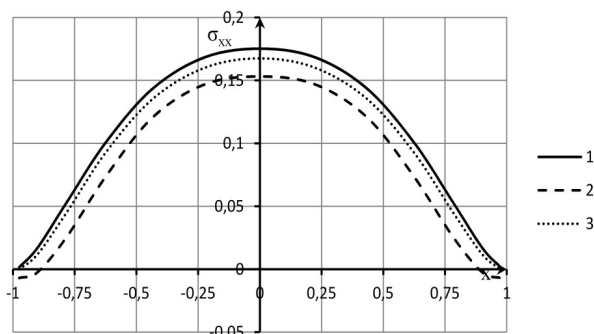
Рис. 2 – Напряжения при нагреве параллелепипеда по всем граням единичным тепловым потоком

Чтобы оценить насколько поведение кривых 3 и 4 во втором примере является физически возможным, рассмотрим призму, размеры которой соответствуют толстой пластине $h_x = 1$; $h_y = 0,5$; $h_z = 0,125$. Краевые условия задачи теплопроводности выбраны таким образом, чтобы было возможно провести сравнение с решением двумерной задачи

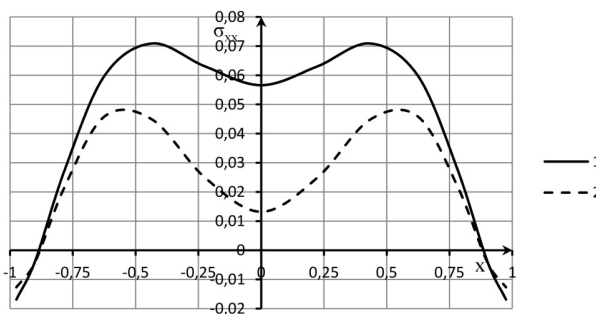
$$-\frac{\partial \Theta}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 1, \quad x = \pm h_x, \quad y = \pm h_y; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \quad z = \pm h_z.$$

Очевидно, что с уменьшением размера h_z призма по форме приближается к пластине и при данном способе нагрева перепад напряжений по толщине должен уменьшаться, что и иллюстрируют кривые 1 для $\sigma_{xx}(x,0,0)$ и 2 для $\sigma_{xx}(x,0,\pm h_z)$, приведенные на рис. 3,а. Таким образом, это является подтверждением физической достоверности результатов, полученных с помощью решения I.

Кривая 3, расположенная между кривыми 1 и 2, соответствует решению задачи о плоском напряженном состоянии тонкой пластины, полученному с помощью функций для температур и потенциала, предложенных в [5]. Несмотря на то, что в данном примере отношение $h_z/h_y = 0,25$ не удовлетворяет определению тонкой пластины, максимальное отличие в значениях напряжений составляет 14,4%.



а)



б)

Рис. 3 – Напряжения σ_{xx} в толстой пластине:
а) – решение I; б) – решение II

Несмотря на то, что напряжения, полученные из формы II (рис. 3,б) как на оси (кривая 1), так и на поверхности пластины (кривая 2), имеют одинаковые знаки, они сильно отличаются от плоского решения, как качественно, так и по величине. Если сравнивать точность рассматриваемых результатов по величине оценки отклонения (31), то для второго и третьего примеров значения этой оценки для решения I составляют соответственно 0,78% и 0,44%, а для решения II – 9,86% и 7%. Т.е. величина погрешности для решения I, более чем на порядок меньше чем для решения II.

В приведенных результатах значения напряжений даны в безразмерной форме $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1+\nu}{8G\alpha_T\Theta_0(1-\nu)}\sigma_{ij}$, где Θ_0 – температура среды.

Во всех рассмотренных примерах величина шага по времени в формуле (28) была принята $\Delta\tau = 0,025$, а наибольшая степень полиномов в решении для температуры и напряжений взята равной $L = 12$.

Выводы. Предложена новая форма решения задач теплопроводности и термоупругости. Рассмотрены численные примеры, для которых

получены количественные оценки меры удовлетворения граничных условий и проведено сравнение результатов с численным решением для пластины при плоском напряженном состоянии.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Беляев Н. М., Рядно А. А.** Методы теории теплопроводности. Ч. 1. М.: Высш. школа, 1982. 327 с.
2. **Боли Б., Уэйнер Дж.** Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 512 с.
3. **Бородачев Н. М.** О задаче термоупругости в напряжениях // Прикладная механика. 2005. Т.41. № 3. С. 46–54.
4. **Доннел Л. Г.** Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, ГРФМЛ, 1982. 508 с.
5. **Заяц В. И., Новикова О. С.** Представление решения двумерной задачи термоупругости в ультрасферических многочленах // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. 2011. № 2. С. 126–131.
6. **Заяц В. И., Новикова О. С.** Решение трехмерной нестационарной задачи теплопроводности в вариационной постановке // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2011. Т.1. Вып. 8(49). С. 31–35.
7. **Коваленко А. Д.** Термоупругость. К.: Вища школа, 1975. 216 с.
8. **Мелан Э., Паркус Г.** Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.:Физматгиз,1958. 167 с.
9. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364 с.
10. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962. 500 с.

УДК 539.3

В. И Заяц¹, канд. техн. наук, П. А. Иващенко²

ФОРМА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ СКІНЧЕННИХ РОЗМІРІВ

Пропонується нова форма розв'язку просторових задач теплопровідності і теорії пружності у вигляді трьох наборів поліномів, що зв'язані визначальним співвідношенням температура – термопружний потенціал переміщень. Наведені результати для напружень в прямокутній призмі, навантаженої по граням тепловим потоком.

Ключові слова: термопружний потенціал переміщень, форма розв'язку, ультрасферичні поліноми, базисні функції, граничні умови, теплові напруження.

UDC 539.3

V. I. Zayats¹, PhD (Tech.), P. A. Ivazshenko²

FORM OF SOLVING THE PROBLEM OF THERMAL ELASTICITY FOR BODIES OF FINITE SIZES

A new form of solving spatial problems of heat conduction and the theory of elasticity is proposed, in the form of three sets of polynomials connected by the defining relation temperature – thermoelastic displacement potential. Results are given for stresses in a rectangular prism loaded with a heat flow along the faces.

Keywords: thermoelastic potential of displacements, solution form, ultraspherical polynomials, basis functions, boundary conditions, thermal stresses.

Considers the problems of thermoelasticity for a rectangular prism to which heat flow is applied. The solution is carried out with the help of thermoelastic displacement potential. Temperature and heat exchangers can be obtained by the use of a bundle of known axisymmetric form using the properties of ultra-spherical polynomials, which receive three sets of functions, including harmonical and biharmonical. By virtue of their properties, the proposed functions can be chosen as a basis for solving spatial problems of heat conduction and the theory of elasticity.

After solving the heat conduction problem in a variational formulation with a finite-difference approximation of the time derivative, the initial problem reduces to satisfying the boundary conditions for stresses in the sense of least squares. An integral parameter is proposed for the quantitative estimate of the degree of satisfaction of the boundary conditions for stresses.

Numerical examples are considered to compare the results obtained using the axisymmetric and the proposed splitted solution form and the corresponding estimates of the measure for satisfying the boundary conditions are calculated. It was found that the thermal stresses obtained for the two considered forms of solutions for the problem of heating a cube with a constant intensity flux applied to all faces coincide. It is shown that the results for stresses obtained using the proposed form, in the case of a thick plate, are in satisfactory agreement with the numerical solution for a plate in a plane stressed state.

REFERENCES

1. **Belyaev N. M., Ryadno A. A.** Methods of the theory of heat conduction. Part 1. Moscow: Higher school, 1982. 327 p. (in Russian).
2. **Boli B., Weiner Dj.** Theory of thermal stresses. M.: Mir, 1964. 512 p. (in Russian).
3. **Borodachev N. M.** About the problem of thermoelasticity in stresses // Applied Mechanics. 2005. Vol. 41. No. 3. P. 46–54. (in Russian).
4. **Donnel L. G.** Beams, plates and shells. Moscow: Nauka, 1982. 508 p. (in Russian).
5. **Zayats V. I., Novikova O. S.** Representation of the solution of a two-dimensional problem of thermoelasticity in ultra-spherical polynomials // New materials and technologies in the metal industry and machine-based machines. 2011. No 2. C. 126–131. (in Russian).
6. **Zayats V. I., Novikova O. S.** Solution of a three-dimensional unsteady heat conduction problem in a variational formulation // East European Journal of Advanced Technologies. 2011. Vol. 1. Iss. 8(49). P. 31–35. (in Russian).
7. **Kovalenko A. D.** Thermoelasticity. Kiev: Higher School. 1975. 216 p. (in Russian).
8. **Melan E., Parkus G.** Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields. Moscow: Fizmatgiz, 1958. 167 p. (in Russian).
9. **Novatsky V.** Questions thermoelasticity. Moscow: Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, 1962. 364 p. (in Russian).
10. **Sege G.** Orthogonal polynomials. Moscow: State publishing house physical. lit., 1962. 500 p. (in Russian).

¹ Запорізький національний університет,
Запоріжжя,

²З-д Дніпрспецзахист,
Дніпро, Україна