

DOI: 10.15421/4219030
УДК 539.3

*А. С. Каиров, д-р техн. наук, Л. А. Латанская, канд. физ.-мат. наук,
В. А. Каиров, канд. техн. наук*

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РЕБРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

Рассмотрены свободные колебания подкрепленных ребрами цилиндрических оболочек с отверстиями и присоединенными твердыми телами. Разработана уточненная математическая модель колебаний, учитывающая конструктивную неоднородность оболочечной системы. Задача решается в линейной постановке методом конечных элементов с учетом дискретного размещения ребер. Приведены результаты численного исследования собственных частот и форм колебаний. Получены зависимости влияния отверстий, подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел на амплитудно-частотные характеристики оболочек. Выполнен сравнительный анализ полученных численных результатов с известными решениями.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, отверстия, подкрепляющие ребра, собственные частоты и формы колебаний, метод конечных элементов, матрица жесткости.

Введение. Тонкостенные оболочечные конструкции широко применяются в различных отраслях современной техники, что вызывает особый интерес к задачам исследования свободных колебаний и определяет актуальность рассматриваемой проблемы. Наличие отверстий, подкрепляющих ребер, присоединенных твердых тел и их дискретное размещение оказывает существенное влияние на основные динамические характеристики оболочек и требует построения уточненных расчетных математических моделей.

Колебаниям подкрепленных оболочек с отверстиями посвящено сравнительно небольшое количество публикаций, обзор которых и полученные результаты решения конкретных задач приведен в [1 – 6, 8]. Анализ данных исследований показал, что применительно к задачам динамики неоднородных оболочечных систем наиболее эффективными являются современные численные методы решения, среди которых широко применяются получил метод конечных элементов (МКЭ) [7, 9]. Поэтому вопросы анализа конечноэлементных моделей применительно к рассматриваемым задачам требуют дополнительного исследования.

Целью данной работы является исследование влияния отверстий, подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел с учетом их дискретного размещения на частоты и формы свободных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек.

Постановка задачи. Исследуемая оболочечная система состоит из тонкой упругой оболочки с отверстиями и подкрепляющих дискретно расположенных стрингеров и шпангоутов. Отверстия имеют свободные края или подкреплены по контуру ребрами. Начало координат расположено на нижнем торце оболочки так, что ось α_1 направлена вдоль образующей, α_2 – по окружности, α_3 – нормальная к поверхности. Система координат подкрепляющих ребер и оболочки совпадает по направлению с линиями главных кривизн срединной поверхности. Рассматривается общий случай деформирования оболочки и ребер. Подкрепляющие ребра обладают жесткостью на изгиб в радиальной и продольной плоскостях, на растяжение-сжатие и крутильной жесткостью. Оболочка и ребра работают в упругой стадии деформирования и могут отличаться своими физико-механическими свойствами. На торцах оболочки заданы соответствующие граничные условия, а на контурах отверстий необходимо дополнительно удовлетворять условиям равенства нулю перерезывающих сил и изгибающих моментов.

Деформированное состояние оболочки и ребер описывается линейными уравнениями теории оболочек с учетом гипотез Кирхгофа – Лява и Кирхгофа – Клебша [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + u_3 \right); \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}; \\ \varepsilon_4 &= -\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1^2}; \quad \varepsilon_5 = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_2^2} - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} \right); \quad \varepsilon_6 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right); \quad (1) \\ \varepsilon_{1i} &= \frac{\partial u_{1i}}{\partial \alpha_1}; \quad \varepsilon_{2j} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_{2j}}{\partial \alpha_2} + u_{3j} \right); \quad \varepsilon_{4i} = -\frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial \alpha_1^2}; \\ \varepsilon_{5j} &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial \alpha_2^2} + u_{3j} \right); \quad \varepsilon_{6i} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}; \quad \varepsilon_{6j} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \end{aligned}$$

где $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\}^T = [D_\varepsilon] \{u\}$ – вектор компонентов деформации; $\{u\} = \{u_1, u_2, u_3\}^T = [A^*] \{\alpha\}$ – вектор перемещений срединной поверхности оболочки, которые представлены в виде проекций на орты глобальной криволинейной системы координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; $[D_\varepsilon]$ – матрица дифференциальных операторов оболочки, полученная на основе геометрических соотношений Коши; $[A^*]$, $\{\alpha\}$ – матрица координатных функций и вектор коэффициентов аппроксимирующих полиномов; R – радиус срединной поверхности оболочки; $\varepsilon_{pi}, \varepsilon_{pj}, \varepsilon_p, u_{ki}, u_{kj}, u_k$ – компоненты деформаций и перемещений подкрепляющих ребер и оболочки ($p = \overline{1,6}$; $k = \overline{1,3}$).

Решение задачи. Задача решается методом конечных элементов с использованием вариационного принципа Лагранжа [9].

Потенциальную энергию деформации и кинетическую энергии колебаний оболочечной системы представим в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_S \{\varepsilon\}^T [D_\sigma] \{\varepsilon\} dS; \quad T = \frac{1}{2} \rho \iint_S \{q\}^T [N]^T [N] \{q\} dS, \quad (2)$$

где $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}$ – вектор деформаций оболочки; ε – деформации конечного элемента; $[B] = [D_\varepsilon][N]$ – матрица градиентов конечного элемента; $[N]$ – матрица функций формы, определяющая положение узлов элемента; $\{q\}$ – вектор обобщенных узловых перемещений конечноэлементной модели; $[D_\sigma]$ – матрица упругих постоянных; S – область срединной поверхности оболочки; ρ – плотность материала оболочки.

При решении задачи для конструктивно неоднородной оболочки разбиваем область ее срединной поверхности S на E криволинейных четырехугольных конечных элементов (КЭ). Для моделирования колебаний оболочки и ребер используется четырехугольный восьмиузловой изопараметрический криволинейный элемент второго порядка с изменяющимися характеристиками [7, 9], в каждом элементе вводится локальная система координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

Для того чтобы в узлах выполнялись гипотезы Кирхгофа – Лява и количество узловых неизвестных было минимальным, аппроксимируем в каждом КЭ тангенциальные перемещения билинейными функциями, а прогибы – бикубическими сплайнами. При этом, проекции вектора перемещений КЭ на оси глобальной системы координат аппроксимируем билинейными функциями [9]:

$$u_k = \sum_{i=1}^8 u_k^{(i)} N_i(\xi_1, \xi_2) \quad (k = \overline{1, 3}), \quad (3)$$

где $u_k^{(i)}$ – проекции вектора перемещений в i -ом узле; $N_i(\xi_1, \xi_2)$ – билинейные функции формы локальных координат (ξ_1, ξ_2) .

Также принимаем, что угол поворота нормали вокруг касательной к контуру элемента изменяется вдоль сторон по линейному закону. Построенный таким образом КЭ удовлетворяет условиям непрерывности первых производных от прогиба при переходе через его границы и точно описывает поступательные перемещения элемента как жесткого целого.

С учетом (1) и аппроксимаций (3), получим выражения для компонент деформации оболочки:

$$\{\varepsilon\} = [B^{(e)}] \{q^{(e)}\}, \quad (4)$$

где $[B^{(e)}]$ – матрица дифференцирования функций формы;
 $\{q^{(e)}\} = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1, \theta_1^1, \theta_2^1, \dots, u_1^8, u_2^8, u_3^8, \theta_1^8, \theta_2^8\}^T$ – вектор-столбец степеней свободы элемента (e) .

Потенциальная энергия деформации оболочечной системы с учетом (2) и (4) определяется как сумма потенциальных энергий составляющих КЭ, моделирующих деформации оболочки, ребер и отверстий:

$$P = \sum_{e=1}^N \left[\frac{1}{2} \iint_S \{q^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D_\sigma] [B^{(e)}] \{q^{(e)}\} dS \right]. \quad (5)$$

Аналогичным образом определяется кинетическая энергия рассматриваемой оболочечной системы, ребер и присоединенных тел

$$T = \sum_{e=1}^N \left[\frac{1}{2} \rho \iint_S \{q^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] \{q^{(e)}\} dS \right]. \quad (6)$$

При формировании системы уравнений (5) и (6) для конкретной оболочки необходимо учитывать краевые условия.

Из условий стационарности функционала Лагранжа получим систему разрешающих уравнений свободных колебаний оболочечной системы в перемещениях:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0, \quad (7)$$

где $[K]$, $[M]$ – матрицы жесткости и масс конечноэлементной модели оболочечной системы; ω – круговая частота колебаний; $\{\ddot{q}\}$, $\{q\}$ – векторы обобщенных узловых ускорений и перемещений конструкции; N_e – число степеней свободы оболочечной модели.

Положительно определенные матрицы жесткости $[K]$ и масс $[M]$ конечноэлементной модели оболочечной системы, используя стандартную процедуру, формируются из матриц жесткости и масс КЭ, а те, в свою очередь, включают в себя подматрицы жесткости и масс узлов.

$$[K] = \iint_S [B]^T [D_\sigma] [B] dS; \quad [M] = \rho \iint_S [N]^T [N] dS. \quad (8)$$

Решение системы (7) для малых колебаний ищем в виде

$$\{q\} = \{q_0\}_j \cos(\omega_j t + \varphi_j), \quad (9)$$

где $\{q_0\}_j$ – вектор амплитуд перемещений узлов на j -ой собственной частоте; ω_j – собственная круговая частота j -ой формы колебаний; φ_j – сдвиг фаз для перемещений; t – время.

С учетом выражения (8) и (9), уравнения колебаний (7) примут вид

$$([K] - \omega_j^2[M])\{q_0\}_j = 0. \quad (10)$$

Полученное матричное выражение представляет собой систему однородных линейных алгебраических уравнений, решение которых представляет вектор собственных частот и матрицу форм колебаний оболочечной системы. Задача сводится к вычислению матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$ оболочки, которые формируются из матриц жесткости $[K^{(e)}]$ и масс $[M^{(e)}]$ составляющих ее конечных элементов.

Частотное уравнение (10) решается с помощью прямого разложения Холецкого для ленточных матриц с последующим применением метода Хаусхольдера в сочетании с обратными итерациями для перехода к трехдиагональным симметричным матрицам [7] и непосредственного определения частот колебаний оболочки.

Результаты численных исследований. Численные исследования влияния отверстий и подкреплений на собственные частоты и формы колебаний выполнены для изотропной жестко защемленной цилиндрической оболочки с геометрическими характеристиками: $R/h = 125$; $L/R = 2,5$; $R = 0,075$ м. Механические характеристики и плотность материала составляют: $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$; $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³.

Для неподкрепленной оболочки, ослабленной прямоугольным отверстием, расположенным симметрично относительно ее торцов, на рис.1,а приведена зависимость частотного параметра $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$ от высоты отверстия a , где ω_0 – низшая круговая частота однородной сплошной оболочки, ω – круговая частота колебаний оболочки с вырезом. Ширина отверстия выражается зависимостью $b = 2R \sin \varphi_0$, где φ_0 – угол в радианах, характеризующий ширину отверстия; R – радиус оболочки. Кривые 1, 3, 4 соответствуют величине φ_0 , равной $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$. Кривая 2 соответствует оболочке с двумя диаметрально расположенными отверстиями при $\varphi_0 = \pi/6$. Площадь вырезов для всех рассматриваемых моделей постоянна.

На рис. 1,б представлена зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от ширины отверстия b , характеризуемая окружной координатой φ_0 . Кривые 1, 2, 3 соответствуют размерам отверстия вдоль образующей – $L/5$, $2L/5$ и $3L/5$, а кривая 4 – частоте колебаний оболочки с присоединенным телом, расположенным посреди образующей в диаметральной плос-

кости напротив отверстия высотой $2L/5$. Отношение массы присоединенного тела к массе оболочки составляет $M_1/M_0 = 0,1$.

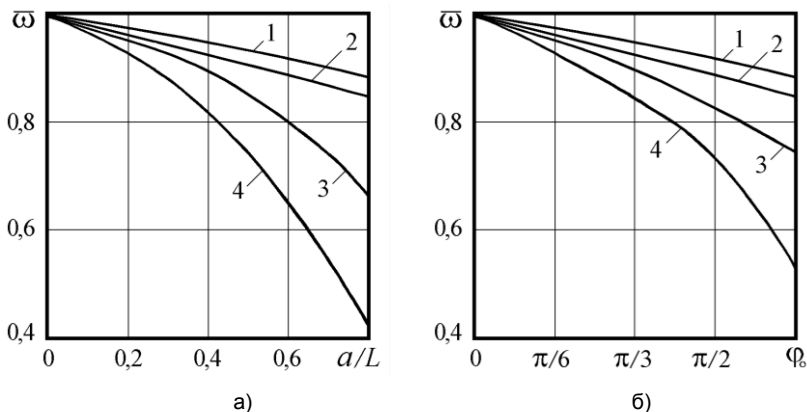


Рис. 1 – Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от размеров отверстия

Наличие отверстия, образующего массово-жесткостную неоднородность конструкции, приводит к расщеплению собственных частот на симметричные и асимметричные. Обнаружено значительное снижение основной частоты, сопровождающееся сильным искажением формы колебаний в окрестности отверстия с увеличением его размеров. Ослабление оболочки двумя диаметрально расположенными отверстиями еще более понижает низшую частоту. При этом форма колебаний оболочки трансформируется в форму, для которой максимум прогибов расположен на контуре отверстия, что согласуется с экспериментальными данными, полученными для оболочек с одним и двумя отверстиями [5, 6]. Одновременно наблюдаются мало изменяющиеся формы даже при больших размерах выреза, для которых снижение частоты является незначительным.

Результаты численного анализа влияния подкрепления оболочки и контура отверстия, а также варьирования геометрических характеристик подкрепляющих ребер на собственные частоты и формы колебаний оболочки с центральным прямоугольным отверстием ($a = L/3$; $\varphi_0 = \pi/4$) приведены на рис. 2 в виде зависимости частотного параметра $\bar{\omega}$ от относительной высоты h_0/R ребер. Оболочка подкреплена стрингерами и шанпоутами, а контур отверстия – замкнутой рамой из тонкостенных ребер прямоугольного сечения. Толщина стрингеров, шанпоутов и ребер на контуре отверстия составляет $1,6 \cdot 10^{-3}$ м. Кривая 1 соответствует подкреплению оболочки двумя шанпоутами, проходящими по контуру отверстия, кривая 4 – подкреплению восемь стрингерами, два из которых располагаются вдоль контура отверстия, кривая 5 – подкреплению продольных краев отверстия, кривая 2 – поперечных краев отверстия, кривая 3 – подкреплению рамой всего контура отверстия.

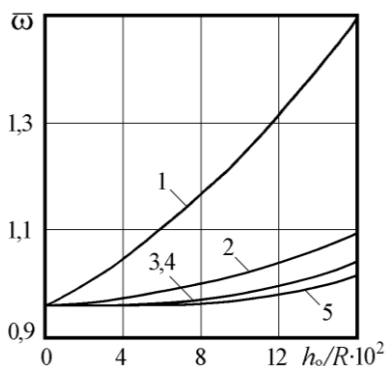


Рис. 2 – Зависимость частотного параметра $\bar{\omega}$ от относительной высоты подкрепляющих отверстий ребер

В данном случае, имеет место усложнение форм и спектра частот колебаний. Подкрепление контура отверстия увеличивает локальную жесткость конструкции и приводит к незначительному повышению низшей частоты колебаний, а также других частот спектра. Однако наблюдаемое повышение в меньшей степени влияет на формообразования. Если подкрепить оболочку двумя равномерно распределенными шпангоутами так, чтобы они располагались по поперечным краям отверстия, то частоты колебаний значительно возрастают, а волновые числа в окружном направлении уменьшаются.

Таким образом, наличие отверстий и подкрепляющих ребер оказывает существенное влияние на собственные частоты и формы колебаний оболочки. Присоединенное к оболочке твердое тело приводит к еще большему понижению основной частоты. При этом форма колебаний характеризуется значительным преобладанием перемещений в окрестности точки крепления тела, которые затухают с удалением от него.

Выводы. Получены результаты численного анализа амплитудно-частотных характеристик конструктивно неоднородных оболочек для различных граничных условий, имеющие важное практическое значение. Задача решается методом конечных элементов. Приведены алгоритм решения и расчетная математическая модель, позволяющая учитывать конструктивные особенности оболочечной системы. Выявлено существенное влияние отверстий, подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел на собственные частоты и формы свободных колебаний цилиндрических оболочек.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Ревуцкий В. Н. и др.** Колебания ребристых оболочек вращения. К.: Наукова думка, 1988. 172 с.
2. **Гузь А. Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др.** Методы расчета оболочек: В 5-ти т. Т.1: Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. К.: Наук. думка, 1980. 636 с.

3. **Заруцкий В. А.** О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек. 2001. Т. 37. № 8. С. 38–67.
4. **Каиров А. С.** Влияние отверстий на собственные колебания подкрепленных оболочек вращения // Теорет. и прикл. механика. Харьков: Основа. 2000. Вып. 31. С.131–137.
5. **Пальчевский А. С.** Свободные колебания цилиндрических оболочек с большими прямоугольными отверстиями // Прикл. механика. 1981. Т.17. № 5. С.130–133.
6. **Селиванов Ю. М., Ключник Д. В.** Голографический и конечно-элементный анализ собственных колебаний цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Д.: Наука і освіта. 2007. Вып. 8. С.140–149.
7. **Bathe K. J.** Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2006. 564 p.
8. **Toda S., Komatsu K.** Vibrations of circular cylindrical shells with cutouts // Journal of Sound and Vibration. 1977. V. 52. № 4. P. 497–510.
9. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, 2000. 348 p.

УДК 539.3

*О. С. Каиров, д-р техн. наук, Л. О. Латанська, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Каиров, канд. техн. наук*

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ РЕБРИСТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ

Розглянуто вільні коливання підкріплених ребрами циліндричних оболонок з отворами та приєднаними твердими тілами. Розроблена уточнена математична модель коливань, що враховує конструктивну неоднорідність оболонкової системи. Задача розв'язується в лінійній постановці методом скінченних елементів з урахуванням дискретного розміщення ребер. Наведено результати числового дослідження власних частот і форм коливань. Отримано залежності впливу отворів, підкріплюючих ребер і приєднаних твердих тіл на амплітудно-частотні характеристики оболонок. Виконано порівняльний аналіз отриманих числових результатів з відомими розв'язками.

Ключові слова: циліндрична оболонка, отвори, підкріплюючі ребра, власні частоти і форми коливань, метод скінченних елементів, матриця жорсткості.

UDC 539.3

*A. S. Kairov, Dr. Sci. (Tech.), L. A. Latanskaya, PhD (Phys.-Math),
V. A. Kairov, PhD (Tech.)*

NATURAL VIBRATIONS OF RIBBED CYLINDRICAL SHELLS WITH CUTOUTS

The problem of free vibrations of the reinforced by ribs cylindrical shells with cutouts and attached solids is studied. A refined mathematical model of vibration, which takes into account the constructional non-homogeneity of the shells, is designed. The problem solution is constructed on the basis of the linear theory by the finite element method with discrete ribs placing account. The results of the numerical investigation of natural frequencies and forms of free vibrations are presented. The main dependences of the influence of cutouts, stiffening ribs and attached solids on

the shells amplitudes and frequencies characteristic are obtained. A comparative analysis of findings with corresponding known solutions of the problems is performed.

Keywords: cylindrical shells, cutouts, reinforced ribs, natural frequencies and modes of vibrations, finite element method, rigidity matrix.

The reinforced shells constructions with cutouts are widespread in modern technique. Therefore the problems which deal with the constructional non-homogeneous shells vibrations are rather actual. The main aim of this work is to investigate the cutouts, stiffening ribs and attached solids influence on the cylindrical rotation shells dynamic characteristics.

The solution of this problem has been based on the finite element method and more correct mathematical model was developed that gives an opportunity to take into consideration constructional non-homogeneity and discrete ribs placing. The shells system vibrations natural frequencies and forms are calculated by the combination of Kholetsky and Hausholder's matrix method usage for QR reverse iterations.

The numerical results achieved on the base of the developed mathematical model show that the presence of cutouts, stiffening ribs, attached solids and their discrete location creates the local inertial non-homogeneity and influences greatly on the construction natural frequencies and forms of free vibrations. The new dependencies, physics and mechanical effects, caused by the shells constructional non-homogeneity are also received. Such dependencies have a grate practical value. The obtained results of calculation are compared with the known solutions of the problems and show good convergence.

REFERENCES

1. **Amiro I. Ya, Zarutckiy V. A., Revutckiy V. N. and all.** The ribbed rotational shells oscillation. Kyiv: Naukova dumka, 1988. 172 p. (in Russian).
2. **Guz A. N., Chernyshenko I.S., Chekhov V.N. et al.** Methods of calculation of shells: In 5 vol. Vol.1: Theory of thin shells weakened by holes. Kyiv: Naukova dumka, 1980. 636 p. (in Russian).
3. **Zarutckiy V. A.** The constructional non-homogeneous shells stability and oscillations experimental complex. Applied mechanics. 2001. Vol. 37. No 8. P. 38–67. (in Russian).
4. **Kairov A. S.** Effect of holes of the eigenmodes of reinforced shells of rotations // Journal of Mathematical Sciences. 2001. Vol. 103, No 3. P. 393–397. (in Russian)
5. **Palchevskiy A. S.** Free vibrations of cylindrical shells with large rectangular holes // Applied mechanics. 1981. Vol.17. No 5. P.130–133. (in Russian).
6. **Selivanov Yu. M., Klyushnik D. V.** Holographic and finite-element analysis of eigen vibrations of the cylindrical shell with the circle hole. Problems of computational mechanics and strength of structures. Dnipropetrovs'k: Nauka i osvita. 2007. Vol. 8. P.140–149. (in Russian).
7. **Bathe K. J.** Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 2006. 564 p.
8. **Toda S., Komatsu K.** Vibrations of circular cylindrical shells with cutout // Journal of Sound and Vibration. 1977. Vol. 52. No 4. P. 497–510.
9. **Zienkiewicz O. C., Teylor R. L.** The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill, 2000. 348 p.

Національний університет
кораблебудування ім. адмірала Макарова
Миколаїв, Україна

Надійшла до редколегії 19.05.2019