

DOI: 10.15421/4219035  
УДК 539.3

*К. В. Панин, канд. фіз.-мат. наук*

## КРУЧЕННЯ ЗІ ЗГИНОМ ТА РОЗТЯГОМ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО СТЕРЖНЯ

Розглянуто задачу про визначення напружено-деформованого стану пружно-пластичного стержня сталого однозв'язного поперечного перерізу, який зазнає одночасного кручення, згину та розтягу. Задача розв'язується за допомогою напівворотного методу, а також методу скінченних елементів. Для опису поведінки матеріалу стержня використовується теорія малих пружно-пластичних деформацій Генкі – Надаї – Ільюшина. Досліджено вплив параметрів навантаження на вигляд пластичних зон у перерізі стержня.

**Ключові слова:** стержень, розтяг, згин, кручення, напівворотний метод, пластичність, метод скінченних елементів, напружено-деформований стан, зона пластичності.

**Вступ.** Розглянута задача про кручення зі згином та розтягом призматичного стержня однозв'язного сталого поперечного перерізу довільної форми. На відміну від класичної задачі Сен-Венана [2] прийнято, що матеріал стержня пружно-пластичний та такий, що зміцнюється. Раніше алгоритм розв'язування цієї задачі за допомогою введення функції депланації було наведено в [3]. У даній роботі побудований її розв'язок за допомогою введення функції напружень та досліджений вплив параметрів навантаження на розвиток пластичних зон у перерізі стержня.

**Постановка задачі .** Пов'яжемо один з торцевих перерізів стержня з системою координат  $oxyz$  наступним чином: вісь  $oz$  спрямуємо вздовж осі стержня, а осі  $ox$  та  $oy$  розташуємо в площині перерізу (рис. 1).

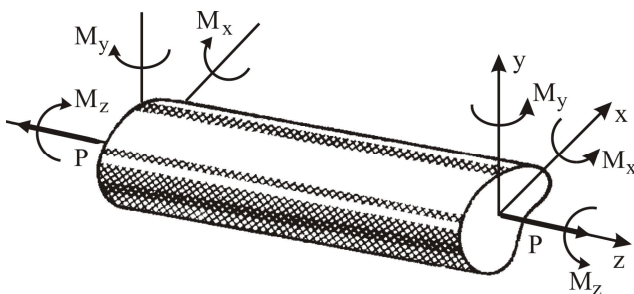


Рис. 1 – Призматичний стержень

Нехай бічна поверхня стержня вільна від зовнішніх зусиль, а до торців його прикладені сили, статично еквівалентні крутному моменту

$M_z$ , згинальним моментам  $M_x$ ,  $M_y$  та осьовій силі  $P$ . Об'ємні сили не враховуються.

Будемо приймати, що під дією вказаних силових факторів в стержні виникає однорідна по всій довжині осьова деформація, яка складається з деформації осі стержня, деформації згину та з деформації, що зв'язана з крученням стержня.

Позначимо через  $\varepsilon$  – деформацію осі стержня;  $p$ ,  $q$  – кривини в площинах  $oxz$  та  $oyz$  відповідно;  $\omega$  – відносний кут закручування. Оскільки розв'язок прямої задачі викликає складнощі, то параметри  $\varepsilon$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\omega$  будемо вважати заданими і поставимо задачу визначення напружено-деформованого стану стержня та силових параметрів, тобто  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $P$ .

Скористувавшись прийнятими кінематичними гіпотезами, для переміщень  $u_i$  можна записати:

$$\begin{aligned} u_x &= -\omega zy + \bar{u}_x(z); & u_y &= \omega zx + \bar{u}_y(z); \\ u_z &= w(x, y) + \bar{w}(z) + \bar{u}'_x(z)y + \bar{u}'_y(z)x, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\omega$  – відносний кут закручування стержня;  $w(x, y)$  – невідома функція, яка характеризує депланацію поперечного перерізу;  $\bar{w}(z)$  – функція, яка визначає поступові переміщення перерізу вздовж осі  $z$ ;  $\bar{u}'_x$  та  $\bar{u}'_y$  – повороти перерізів.

З урахуванням (1) ненульовими компонентами тензора деформацій  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  та  $\varepsilon_{zz}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left( -\omega y + \bar{u}'_x(z) + \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{u}'_y(z) \right); \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \omega x + \bar{u}'_y(z) + \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{u}'_x(z) \right); \\ \varepsilon_z &= \bar{w}'(z) + \bar{u}''_x(z)y + \bar{u}''_y(z)x. \end{aligned}$$

В цьому випадку маємо єдине рівняння сумісності деформацій

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = -\omega. \quad (2)$$

В якості визначальних співвідношень скористуємось рівняннями теорії малих пружно-пластичних деформацій Генкі – Надаї – Ільюшина, які для випадку нестисливого матеріалу мають вигляд

$$\sigma_{xz} = 2G_s \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yz} = 2G_s \varepsilon_{yz}; \quad \sigma_{zz} = 3G_s \varepsilon_{zz}, \quad (3)$$

де  $G_s = G_s(\gamma_u)$  – січний модуль деформації, а  $\gamma_u = (2 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2}$  – інтенсивність деформації зсуву.

Приймаючи, що напружений стан є однорідним по всій довжині стержня, єдиним з рівнянь рівноваги, яке не обертається тотожно в нуль буде:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Введемо функцію напруження  $\phi = \phi(x, y)$  наступним чином:

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (4)$$

Підставляючи в умову сумісності деформацій (2) вирази з (3) і (4) отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2G_s} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2G_s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\omega. \quad (5)$$

Це відоме рівняння типу Монжа – Ампера. При  $G_s = G = const$  приходимо до рівняння Пуассона.

Таким чином, задача про визначення напруженого стану пружно-пластичного призматичного стержня однозв'язного сталого поперечного перерізу при його крученні, розтязі та згині в двох площинах зводиться до розв'язання рівняння (5) при граничній умові

$$\phi = 0 \quad (6)$$

на контурі перерізу.

Якщо  $\phi$  знайдена, тоді з (4) знаходимо  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ , а потім обчислюємо силові параметри  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $P$  за формулами:

$$\begin{aligned} M_z &= \int_{\Omega} (x \sigma_{yz} - y \sigma_{xz}) d\Omega, & M_x &= \int_{\Omega} y \sigma_{zz} d\Omega, \\ M_y &= \int_{\Omega} x \sigma_{zz} d\Omega, & P &= \int_{\Omega} \sigma_{zz} d\Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\sigma_{zz} = \varepsilon + px + qy$ , а  $\Omega$  – площа поперечного перерізу стержня.

Отримання аналітичного розв'язку крайової задачі (5), (6) викликає значні математичні складнощі, тому має сенс перейти до варіаційної задачі і на її основі отримати числовий розв'язок.

Відомо [5], що задача (5), (6) є еквівалентною до задачі про знаходження мінімуму функціоналу

$$\lambda(\phi) = \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 4G_s(x, y)\omega\phi \right] d\Omega \quad (8)$$

при умові  $\phi = 0$  на контурі перерізу.

**Метод розв'язування.** Функціонал (8) є нелінійним, тому для його лінеаризації можна скористатись методом січучого модуля [1], який дозволяє звести задачу мінімізації функціоналу (8) до послідовності лінійних задач. На кожному кроці методу січного модуля лінійну задачу можна розв'язати за допомогою метода скінченних елементів [4]. стандартна процедура якого приводить до системи лінійних рівнянь, відносно вузлових значень функції напружень

$$[K]\{\Phi\} = \{F\}. \quad (9)$$

З урахуванням того, що матриця системи (9) симетрична, додатньо визначена та така, що має стрічкову структуру, для розв'язання (9) використовується відповідна модифікація методу Гаусса [4].

Ітераційний процес методу січного модуля завершується, якщо досягнуто заданої точності

$$\sqrt{\{\Delta\Phi\}^T \{\Delta\Phi\}} \leq \varepsilon, \quad \{\Delta\Phi\} = \{\Phi^{(N)}\} - \{\Phi^{(N-1)}\}$$

і отримані значення  $\Phi^{(N)}$  приймаються у якості наближеного розв'язку задачі.

**Результати числового моделювання.** Під час проведення розрахунків було розглянуто пружно-пластичні стержні квадратного поперечного перерізу зі стороною  $a$ , а також кутового та хрестового поперечних перерізів, які вписуються у квадрат зі стороною  $a$ . Матеріал стержнів – сталь, схематизована діаграма деформування якої описується наступними співвідношеннями:

$$\tau_u = \begin{cases} G\gamma_u, & 0 \leq \gamma_u \leq \gamma_s, \\ G\gamma_s + G_1(\gamma_u - \gamma_s), & \gamma_u \leq \gamma_s, \end{cases}$$

де  $G$  – модуль зсуву матеріалу стержня;  $G_1$  – модуль зміцнення;  $\gamma_u$  – інтенсивність деформації зсуву;  $\gamma_s$  – межа текучості.

В якості базового для методу скінченних елементів був використаний чотирикутний ізопараметричний скінченний елемент. За необхідності під час побудови скінченно-елементної моделі він легко модифікується у трикутний. Типові скінченно-елементні моделі, що були використані під час розрахунків, наведені на рис. 2.

Для кожного з стержнів було проведено чотири розрахунки. У першому розглядалося кручення, у другому – одночасне кручення зі згином

відносно осі  $ox$ , у третьому – одночасне кручення зі згином відносно осей  $ox$  та  $oy$ , у четвертому – одночасне кручення, згин відносно осей  $ox$  і  $oy$  та розтяг вздовж осі  $oz$ .

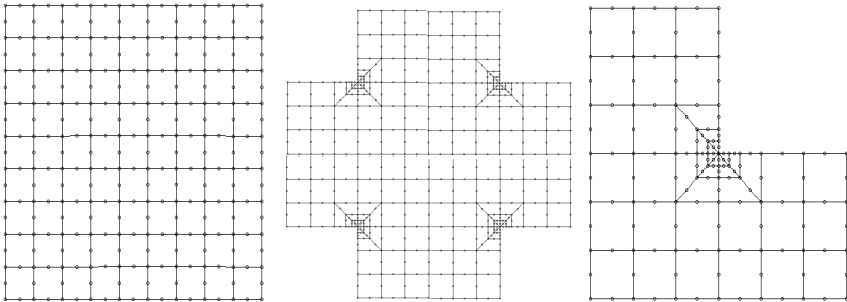


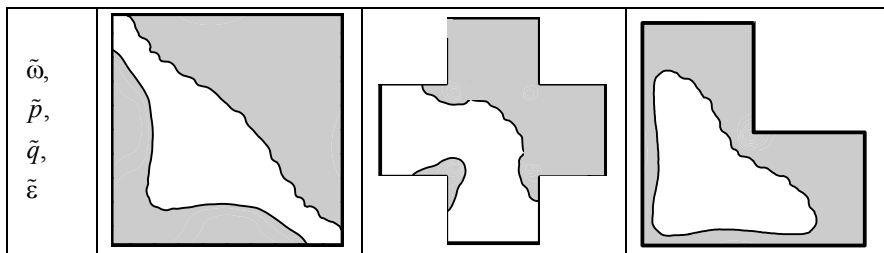
Рис. 2 – Скінченно-елементні моделі перерізів стержня

У табл.1 наведені зони пластичності для різних випадків деформування стержня.

Таблиця 1 – Зони пластичності для різних випадків деформування стержня

$\tilde{\omega}$			
$\tilde{\omega}, \tilde{p}$			
$\tilde{\omega}, \tilde{p}, \tilde{q}$			

Продовження таблиці 1 – Зони пластичності для різних випадків деформування стержня



Розрахунки проведені при наступних значеннях безрозмірних параметрів:  $\tilde{\varepsilon} = 0,5$ ;  $\tilde{p} = 0,8$ ;  $\tilde{q} = 0,8$ ,  $\tilde{\omega} = 3,0$ ,

де 
$$\tilde{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}\gamma_s}; \quad \tilde{p} = \frac{pa}{\sqrt{3}\gamma_s}; \quad \tilde{q} = \frac{qa}{\sqrt{3}\gamma_s}; \quad \tilde{\omega} = \frac{2\omega a}{\gamma_s}.$$

Також було прийнято  $G_1 = 0,01G$ .

**Висновки.** Проведені розрахунки свідчать, що завдання ненульових значень кривин  $p$  і  $q$  та осової деформації  $\varepsilon$  можуть змінювати якісну картину розвитку пластичних зон, сприяючи більш ранньому виникненню пластичних деформацій в частинах перерізу стержня, які зазнають додаткове навантаження. В усіх розрахунках було також отримано відповідні значення силових параметрів  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $P$ . Перспективним напрямком подальших досліджень є застосування диференційно-нелінійних варіантів теорії пластичності для визначення напружено-деформованого стану стержня, що знаходяться в умовах складного комбінованого навантаження.

### БІБЛІОГРАФІЧІ ПОСИЛАННЯ

1. **Кузьменко В. И., Балакин В. Ф.** Решение на ЭВМ задач пластического деформирования: Справочник. К.: Техника, 1990. 136с.
2. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970, 854 с.
3. **Мансырев Э. И.** Кручение с изгибом и растяжением упругопластического бруса // Прикладные проблемы прочности и пластичности. 1983. №23. С.143–153.
4. **Морозов Е. М., Никишков Г. П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 250 с.
5. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

УДК 539.3

*К. В. Панин, канд. физ.-мат. наук*

### КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ И РАСТЯЖЕНИЕМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния упруго-пластического стержня постоянного односвязного поперечного сечения, который испытывает одновременное кручение, изгиб и

растяжение. Задача решается с помощью полуобратного метода, а также метода конечных элементов. Для описания поведения материала стержня используется теория малых упругопластических деформаций Генки – Надаи – Ильюшина. Исследовано влияние параметров нагружения на вид пластических зон в сечении стержня.

*Ключевые слова:* стержень, кручение, изгиб, растяжение, полуобратный метод, пластичность, метод конечных элементов, зона пластичности.

UDC 539.3

*K. V. Panin, PhD (Phys.-Math.)*

## TORSION WITH BENDING AND TENSION OF AN ELASTIC-PLASTIC ROD

The problem of determining the stress-strain state of an elastic-plastic rod under acting of tensile force, bending and torsion moments is considered. The problem is solved by a semi-inverse method and the finite element method. To describe the behavior of the rod material is used the theory of small elastic-plastic deformations Genki-Nadai-Ilyushina. The influence of loading parameters on plastic zone configuration is investigated.

*Keywords:* rod, torsion, bending, stretching, plasticity, finite element method, plastic zone.

The problem of torsion with bending and stretching of a prismatic rod with cross-section of arbitrary shape is considered. In contrast to the classical Saint-Venant problem [2], it is accepted that material of a rod is elastic-plastic and hardening. Previously, an algorithm for solving this problem by introducing the deplanation function was given in [3]. In the present work, its solution was constructed by introducing the stress function and the influence of loading parameters on the development of plastic zones in the cross-section of the rod is studied.

One of the end sections of the rod is associated with the coordinate system  $oxyz$  as follows: the axis  $oz$  is directed along the axis of the rod and the axes  $ox$  and  $oy$  are located in the plane of the section.

It is assumed that the lateral surface of the rod is free from external forces, and forces are applied to its ends that are statically equivalent to torque  $M_z$ , bending moments  $M_x$ ,  $M_y$ , and axial force  $P$ . Volume forces are not taken into account.

It is also assumed that under the influence of the indicated force factors, an axial deformation, uniform over the entire length, arises in the rod, consisting of deformation of the axis of the rod, bending strain, and deformation associated with torsion of the rod.

To solve the problem, the semi-inverse method is used, when the deformation of the axis of the rod, curvatures and the relative twist angle are given, and the parameters of the stress-strain state of the rod and the magnitude of the force parameters are determined already in the solution process.

Using the accepted kinematic hypotheses and physical equations of the theory of small elastic-plastic deformations of the Hencky-Nadai-Ilyushin, the

problem of determining the stress state of an elastic-plastic prismatic rod of a single-connected constant cross-section during its torsion, stretching, and bending in two planes reduces to solving a boundary value problem for a Monge-Ampère type equation with respect to the stress function. Considering the fact that obtaining an analytical solution to such a boundary value problem causes significant mathematical difficulties, a transition has been made to the equivalent variational problem [5] in order to obtain a numerical solution on its basis.

Since the obtained functional is nonlinear, the method of the secant module [1] was used to linearize it, which made it possible to reduce the problem of minimizing the functional to a sequence of linear boundary value problems. At each step of the secant module method, the linear problem is solved by the finite element method [4]. The standard procedure of this method leads to a system of linear equations with respect to the nodal values of the stress function, which is solved by the Gauss method.

Four calculations were performed for each of the rods. The first considered torsion, in the second - simultaneous torsion with bending relative to the axis  $ox$ , in the third - simultaneous torsion with bending relative to the axes  $ox$  and  $oy$ , in the fourth - simultaneous torsion, bending relative to the axes  $ox$  and  $oy$  and stretching along the axis  $oz$ .

Plasticity zones are given for various cases of rod deformation. The calculations show that non-zero values of curvature and axial deformation can change the qualitative picture of the development of plastic zones, contributing to the earlier occurrence of plastic deformations in parts of the cross-section of the rod that are experiencing additional load.

In all calculations, the corresponding values of the power parameters  $M_z, M_x, M_y, P$  were also obtained.

A promising direction for further research is the application of differential-nonlinear variants of the theory of plasticity to determine the stress-strain state of a rod operating under conditions of complex combined loading.

## REFERENCES

1. **Kuzmenko V.I., Balakin V.F.** The decision on the computer of plastic deformation problems: Reference. Kiev: Technique. 1990. 136 p. (in Russian).
2. **Lurye A. I.** Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1970. 854 p. (in Russian).
3. **Mansirev E.I.** Torsion with bending and stretching of an elastoplastic beam // Applied problems of strength and ductility. 1983. № 23. P.143–153. (in Russian).
4. **Morozov E. M., Nikishkov G.P.** Finite element method in fracture mechanics. Moscow: Nauka, 1980. 256 p. (in Russian).
5. **Segerlind L.** Applied Finite Element Analysis. Moscow: Mir, 1979. 392 p. (in Russian).