DOI: 10.15421/4219033
УДК 539.3

Н. І. Маланчук, канд. фіз.-мат. наук

ВПЛИВ ВНУТРІШНЬОЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ НА ЛОКАЛЬНЕ ФРИКЦІЙНЕ ПРОКОВЗУВАННЯ ПІВПРОСТОРІВ

Розглянуто взаємодію двох пружних півпросторів з плоскими поверхнями та різними механічними характеристиками, що контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності стискальних зусиль та зосередженої сили, прикладеної у внутрішній точці верхнього тіла. За умови повного зчеплення півпросторів на лінії їх спряження знайдено нормальні та дотичні контактні напруження. На основі числового аналізу контактних напружень показано, що залежно від величини і орієнтації сили та пружних характеристик півпросторів вони перебуватимуть у зчепленні, або між ними виникатимуть одна чи дві ділянки фрикційного проковзування.

Ключові слова: контакт півпросторів, зосереджена сила, контактні напруження, фрикційне проковзування.

Вступ. Процеси проковзування на поверхнях спряження елементів машин та конструкцій чи природних структур можуть істотно впливати на їх механічну поведінку, контактну жорсткість та міцність. Взаємодію тіл з узгодженими поверхнями [1] з урахуванням проковзування в околі поверхневих виїмок, підповерхневих включень, ділянок неідеального теплового контакту вивчено у [4, 5, 12]. Ділянки проковзування при взаємодії тіл з узгодженими поверхнями можуть також зумовлюватися зосередженими силовими чинниками [2, 3]. Розшарування таких тіл під дією зосереджених сил досліджено у [6, 8]. Локальне проковзування між смугою та півплощиною під дією поверхневої сили вивчено у [9 – 11].

У даній праці досліджується вплив зосередженої сили на локальне фрикційне проковзування пружних тіл, поверхні яких є плоскими, а механічні характеристики – різні.

Формулювання задачі та методика розв'язування. Розглянемо контактну взаємодію за умов плоскої деформації двох пружних півпросторів D_1 ($y < 0$) і D_2 ($y > 0$), що мають різні механічні характеристики (відповідно модулі зсуву G_1 , G_2 та коефіцієнти Пуассона ν_1 , ν_2) та плоскі поверхні (рис. 1). Навантаження тіл реалізується в два етапи. На першому етапі тіла на нескінченності піддаються рівномірно розподіленому стискальному навантаженню: у напрямі, перпендикулярному до лінії спряження $y = 0$, до кожного з тіл прикладено зусилля інтенсивності P , а у напрямі, паралельному до лінії спряження, на нескінченності в півплощинах D_1 і D_2 задано навантаження p_1 і p_2 ,

такі, що виконується рівність $p_1 G_2 (1 - v_1) - p_2 G_1 (1 - v_2) = P (G_1 v_2 - G_2 v_1)$. За такого навантаження на лінії спряження тіл виникає рівномірний контактний тиск P , а переміщення обох меж в напрямі осі Ox однакові і між ними не відбувається взаємного проковзування. На другому етапі до верхнього тіла D_2 у точці $z_0(x_0, y_0)$ (де $y_0 > 0$) прикладено зосереджену силу F (F_1, F_2), напрямлену під кутом α до лінії контакту ($F_1 = F_0 \cos \alpha$, $F_2 = F_0 \sin \alpha$). Вважаємо, що результуючі нормальні контактні напруження, зумовлені одночасною дією зусиль на нескінченності і зосередженої сили, залишаються стискальними ($\sigma_y(x, 0) < 0$). Це означає, що за такого навантаження відбувається повний контакт тіл без розшарування, тобто без утворення між ними міжконтактних зазорів. Однак зосереджена сила в цьому разі може призводити до виникнення локальних ділянок фрикційного проковзування (a_1, b_1), (a_2, b_2) спряжених поверхонь (рис. 1).

Рис. 1 - Схема контакту тіл

Нагадаємо, що поверхні тіл перебуватимуть у зчепленні, доки модуль дотичних напружень $\tau_{xy}(x, 0)$ є меншим за контактний тиск

$P_c(x) = -\sigma_y(x, 0) \equiv |\sigma_y(x, 0)|$, помножений на коефіцієнт тертя f , тобто виконується умова:

$$|\tau_{xy}(x, 0)| < f |\sigma_y(x, 0)|. \quad (1)$$

Якщо ж визначені за повного зчеплення тіл контактні напруження порушують умову (1) на деяких ділянках, то в межах цих ділянок відбуватиметься проковзування поверхонь тіл з тертям. Тому для дослідження появи локального фрикційного проковзування тіл під дією зосередженої сили визначимо зумовлені нею контактні напруження та проаналізуємо, 126

за яких значень величини і напрямку сили та притискальних зусиль на нескінченності порушується умова (1).

Крайові умови задачі про контакт півплощин при дії заданих на нескінченності однорідних напружень та зосередженої сили мають такий вигляд:

– на лінії спряження ($y = 0$, $|x| < \infty$):

$$\begin{aligned} u^-(x, 0) &= u^+(x, 0); \quad v^-(x, 0) = v^+(x, 0); \\ \sigma_y^-(x, 0) &= \sigma_y^+(x, 0); \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0); \end{aligned} \quad (2)$$

– на нескінченності в кожній з півплощин D_l , $l = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, \pm\infty) &= -P; \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = 0; \quad -\infty < x < \infty; \\ \sigma_x(\pm\infty, y) &= -p_l; \quad \tau_{xy}(\pm\infty, y) = 0; \quad l = 1, 2; \quad -\infty < y < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут σ_y і τ_{xy} – компоненти тензора напружень; u і v – компоненти вектора переміщень; верхніми індексами «–» та «+» позначено граничні значення функції на осі Ox у півплощинах D_1 і D_2 відповідно.

Запишемо похідні від переміщень та напруження через комплексні потенціали, що враховують умови (3) та дію зосередженої сили [7]

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_l(z) - \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} + A(z) - P; \\ 2G(u' + iv') &= \kappa_l\Phi_l(z) + \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} + \\ &+ B_l(z) - v_l P - (1 - v_l)p_l, \quad z \in D_l, \quad l = 1, 2; \\ A(z) &= S(z) + \overline{S(z)} + z\overline{S'(z)} + \overline{R(z)}; \\ B_l(z) &= (1 + \kappa_l)S(z) - A(z); \end{aligned} \quad (4)$$

$$S(z) = -\frac{\kappa_2^* F}{z - z_0}; \quad R(z) = \kappa_2^* \left(\frac{\kappa_2 \bar{F}}{z - z_0} - \frac{\bar{z}_0 F}{(z - z_0)^2} \right); \quad (5)$$

$$\kappa_2^* = (8\pi(1 - v_2))^{-1}; \quad F = F_1 + iF_2; \quad z_0 = x_0 + iy_0; \quad z \in D_l, \quad l = 1, 2.$$

Задовольнивши за допомогою подань (4) умови (2), отримаємо задачі лінійного спряження [7], розв'язавши які, знайдемо

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= -\Phi_2(z) = \frac{G_1\kappa_2 - G_2\kappa_1}{G_2\kappa_1 + G_1} S(z), \quad z \in D_1; \\ \Phi_1(z) &= -\Phi_2(z) = \frac{G_2 - G_1}{G_1\kappa_2 + G_2} \left(\bar{S}(z) + z\bar{S}'(z) + \bar{R}(z) \right), \quad z \in D_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Підставивши (5) та (6) у вирази (4), визначимо нормальні та дотичні напруження на лінії спряження тіл:

$$\begin{aligned}\sigma_y(x, 0) = & \frac{G_1(1+\kappa_2)}{G_2\kappa_1+G_1}\kappa_2^* \frac{F_2y_0-F_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y_0^2} + \frac{G_1(1+\kappa_2)\kappa_2^*}{G_1\kappa_2+G_2} \left[\frac{F_2y_0-F_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y_0^2} + \right. \\ & + x \frac{F_1((x-x_0)^2-y_0^2)-2F_2(x-x_0)y_0}{((x-x_0)^2+y_0^2)^2} + \kappa_2 \frac{F_1(x-x_0)+F_2y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \\ & \left. - \frac{(F_1x_0+F_2y_0)((x-x_0)^2-y_0^2)-2y_0(x-x_0)(F_2x_0-F_1y_0)}{((x-x_0)^2+y_0^2)^2} \right] - P; \\ \tau_{xy}(x, 0) = & \frac{G_1(1+\kappa_2)}{G_2\kappa_1+G_1}\kappa_2^* \frac{F_1y_0+F_2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{G_1(1+\kappa_2)\kappa_2^*}{G_1\kappa_2+G_2} \left[\frac{F_1y_0+F_2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \right. \\ & - x \frac{2F_1y_0(x-x_0)+F_2((x-x_0)^2-y_0^2)}{((x-x_0)^2+y_0^2)^2} - \kappa_2 \frac{F_1y_0-F_2(x-x_0)}{(x-x_0)^2+y_0^2} + \\ & \left. + \frac{2y_0(x-x_0)(F_1x_0+F_2y_0)+(F_2x_0-F_1y_0)((x-x_0)^2-y_0^2)}{((x-x_0)^2+y_0^2)^2} \right]. \quad (7)\end{aligned}$$

Підставляючи вирази (7) в умову (1) та аналізуючи за яких вхідних параметрів вона порушується, можемо прогнозувати кількість і величину ділянок проковзування залежно від притискальних зусиль, величини й напрямку сили і пружних характеристик матеріалів тіл.

Аналіз числових результатів. Введемо такі безрозмірні величини: нормальне до поверхні контакту навантаження $\bar{P} = P/G_2$; зосереджена сила $\bar{F} = F/(\bar{y}_0 G_2)$; координати $\bar{x} = x/y_0$, $\bar{y} = y/y_0$; нормальні та дотичні контактні напруження $\bar{\sigma}_y(\bar{x}, 0) = \sigma_y(x, 0)/G_2$ та $\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0) = \tau_{xy}(x, 0)/G_2$; контактний тиск $\bar{P}_c(\bar{x}) = |\sigma_y(x, 0)|/G_2$. Обчислення проведені для коефіцієнтів Пуассона матеріалів $\nu_1 = 0,25$; $\nu_2 = 0,3$; коефіцієнта тертя $f = 0,1$ та сили величини $\bar{F} = 2 \cdot 10^{-4}$, прикладеної в точці $(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = (0, 1)$.

Спочатку розглянули випадок, коли модуль зсуву нижнього тіла вдвічі більший, ніж верхнього ($G_1 = 2G_2$). На рис. 2,а і рис. 2,б, що відповідають стискальним навантаженням $\bar{P} = 3 \cdot 10^{-4}$ і $\bar{P} = 10^{-4}$, зображено розподіли модуля дотичних контактних напружень $|\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)|$ (суцільні

криві) та помноженого на коефіцієнт тертя контактного тиску $f\bar{P}_c(\bar{x}) = f|\bar{\sigma}_y(\bar{x}, 0)|$ (штрихові криві) за дії нормальної до поверхні контакту сили $\bar{F}$.

Зауважимо, що взаємне розташування саме цих кривих візуалізує виконання чи порушення умови (1). Якщо штрихова крива лежить вище за суцільну, то дотичні напруження менші за контактний тиск, помножений на коефіцієнт тертя, і умова (1) виконується. В цьому разі поверхні тіл перебуватимуть у повному контакті і фрикційне проковзування не виникатиме. Якщо ж штрихова крива перетинатиме суцільну, тобто, на деяких ділянках лежатиме нижче за суцільну, то на цих ділянках умова (1) порушуватиметься, що означає виникнення ділянок фрикційного проковзування поверхонь тіл в межах цих ділянок. Тож, аналізуючи взаємне розташування кривих $|\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)|$ і $f\bar{P}_c(\bar{x})$ на рис. 2, можемо зроби-

ти висновок, що за притискальних зусиль $\bar{P} = 3 \cdot 10^{-4}$ поверхні тіл перебувають у повному зчепленні (проковзування не відбувається), а за притискальних зусиль $\bar{P} = 10^{-4}$ виникатиме дві симетричні відносно точки $\bar{x} = 0$ ділянки проковзування поверхонь. Виявилось, що для сили, перпендикулярної до поверхні спряження тіл, одна ділянка проковзування виникнути не може.

Рис. 2 – Розподіли модуля дотичних контактних напружень $|\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)|$ (суцільні криві) і помноженого на коефіцієнт тертя контактного тиску $f\bar{P}_c(\bar{x})$ (штрихові криві) за дії нормальної до поверхні контакту сили $\bar{F} = 2 \cdot 10^{-4}$ для різних значень притискального навантаження $\bar{P}$: а) $\bar{P} = 3 \cdot 10^{-4}$ (відсутнє проковзування); б) $\bar{P} = 10^{-4}$ (дві ділянки проковзування)

На рис. 3,а – рис. 3,в зображено криві дотичних контактних напружень $\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)$ і помноженого на коефіцієнт тертя контактного тиску

$f\bar{P}_c(\bar{x})$, коли зосереджена сила паралельна до поверхні контакту, за дії 3-х різних стискальних навантажень $\bar{P} = 2,5 \cdot 10^{-4}$, $\bar{P} = 2,1 \cdot 10^{-4}$ і $\bar{P} = 1,5 \cdot 10^{-4}$ відповідно. Бачимо, що за першого навантаження поверхні тіл перебуватимуть у повному зчепленні, за другого навантаження виникатиме одна ділянка фрикційного проковзування зліва від точки $\bar{x} = 0$, а за третього навантаження – дві несиметричні ділянки проковзування (зліва і справа від точки $\bar{x} = 0$).

Рис. 3 – Розподіли дотичних контактних напружень $\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)$ (суцільні криві) і помноженого на коефіцієнт тертя контактного тиску $f\bar{P}_c(\bar{x})$ (штрихові криві) за дії горизонтальної сили $\bar{F} = 2 \cdot 10^{-4}$ для різних значень притискальних навантажень $\bar{P}$: а) $\bar{P} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ (проковзування відсутнє); б) $\bar{P} = 2,1 \cdot 10^{-4}$ (одна ділянка проковзування); в) $\bar{P} = 1,5 \cdot 10^{-4}$ (дві ділянки проковзування)

Також дослідили вплив зміни модуля зсуву верхнього тіла, до якого прикладена горизонтальна зосереджена сила, на виникнення і розташування ділянок фрикційного проковзування поверхонь тіл за дії фіксованого стискального навантаження $\bar{P} = 10^{-4}$. Результати обчислень проілюстровані на рис. 4,а – рис. 4,г.

Рис. 4 – Розподіли дотичних контактних напружень $\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)$ (суцільні криві) і помноженого на коефіцієнт тертя контактного тиску $f\bar{P}_c(\bar{x})$ (штрихові криві) за дії горизонтальної сили $\bar{F} = 2 \cdot 10^{-4}$ та притискального навантаження $\bar{P} = 10^{-4}$ та різних значень модуля зсуву нижнього тіла G_1 : а) $G_1 = 0,3 \cdot G_2$ (проковзування відсутнє); б) $G_1 = 0,45 \cdot G_2$ (одна ділянка проковзування); в) $G_1 = G_2$ (дві ділянки проковзування), г) $G_1 = 2G_2$ (одна ділянка проковзування)

На рис. 4,а і рис. 4,б зображено розподіл дотичних контактних напружень $\bar{\tau}_{xy}(\bar{x}, 0)$ і помноженого на коефіцієнт тертя контактного тиску $f\bar{P}_c(\bar{x})$, коли нижнє тіло податливіше за верхнє і його модуль зсуву G_1 дорівнює $G_1 = 0,3 \cdot G_2$ і $G_1 = 0,45 \cdot G_2$ відповідно. У першому випадку тіла перебуватимуть у зчепленні, у другому випадку виникатиме одна ділянка проковзування зліва від точки $\bar{x} = 0$.

На рис. 4,в і рис. 4,г зображено аналогічні графіки за однакових модулів зсуву тіл ($G_1 = G_2$) та коли нижнє тіло жорсткіше за верхнє

($G_1 = 2G_2$) відповідно. У першому випадку виникатимуть дві ділянки проковзування (зліва і справа від точки $\bar{x} = 0$). У другому випадку формуватиметься одна ділянка проковзування, ширина якої перевищує сумарну ширину двох ділянок у першому випадку.

Висновки. Досліджено контакт двох пружних півпросторів, поверхні яких є плоскими, а механічні характеристики матеріалів – різні. Тіла піддаються дії рівномірно розподілених на нескінченності стискальних зусиль та зосередженої сили, прикладеної у внутрішній точці верхнього півпростору під кутом α до лінії спряження тіл. За припущення, що тіла перебувають у зчепленні по всій лінії їх спряження знайдено нормальні та дотичні контактні напруження. На основі числового аналізу цих напружень досліджено вплив зосередженої сили на появу ділянок локального фрикційного проковзування.

Встановлено, що за дії горизонтальної сили тіла перебуватимуть у зчепленні, або між ними виникатиме одна чи дві ділянки фрикційного проковзування; за дії сили, перпендикулярної до лінії спряження тіл, вони перебуватимуть у зчепленні, або між ними виникатиме дві ділянки проковзування. Проаналізовано зміну кількості і розташування ділянок проковзування при зміні модуля зсуву нижнього тіла.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
2. **Маланчук Н. І.** Проковзування тіл в околі розшарування за дії зосередженої приповерхневої сили // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. **50**, № 4. С. 173–180.
3. **Маланчук Н. І., Мартиняк Р. М.** Інтегральні рівняння задачі про локальне контактне проковзування тіл за дії зосереджених сил // Прикл. пробл. мех. і мат. 2006. Вип. 4. С. 111–115.
4. **Маланчук Н. І., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.** Фрикційне проковзування пружних тіл за наявності підповерхневого включення // Фіз.-хім. мех. матеріалів. 2016. **52**, № 6. С. 69–74.
5. **Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.** Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 2. Неповний контакт // Фіз.-хім. мех. матеріалів. 2006. **42**, № 4. С. 114–120.
6. **Мартыняк Р. М.** Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте // Мат. методы и физ.-мех. поля. 1985. № 22. С. 89–92.
7. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 707 с.
8. **Швець Р. М., Мартиняк Р. М., Криштафович А. А.** Неповний механічний контакт двох пружних півплощин із ортотропних матеріалів // Фіз.-хім. мех. матеріалів. 1990. **26**, № 3. С. 65–69.
9. **Barber J. R., Ciavarella M.** Contact Mechanics // Int. J. Solids Structures. 2000. Vol. 37. No 1-2. P. 29–43.
10. **Comninou M., Barber J.** Frictional slip between a layer and a substrate due to a periodic tangential surface force // Int. J. Solids Structures. 1983. Vol. 19. No. 6. P. 533–539.
11. **Jager J.** Half-planes without coupling under contact loading // Arch. Appl. Mech. 1997. Vol. 67. P. 247–259.
12. **Malanchuk N., Martynyak R., Monastyrskyy B.** Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove // Int. J. Solids Structures. 2011. **48**, Iss. 11-12. P. 1791–1797.

Н. И. Маланчук, канд. физ.-мат. наук

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ЛОКАЛЬНОЕ ФРИКЦИОННОЕ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Рассмотрено взаимодействие двух упругих полупространств, поверхности которых плоские, а механические характеристики разные. Тела контактируют под действием равномерно распределенных на бесконечности сжимающих усилий и сосредоточенной силы, приложенной во внутренней точке верхнего полупространства. В условиях полного сцепления тел на линии их сопряжения найдены нормальные и касательные контактные напряжения. Анализ этих напряжений показал, что в зависимости от величины и ориентации силы и упругих характеристик полупространств они будут сцеплены, или между ними возникнут один или два участка проскальзывания.

Ключевые слова: контакт полупространств, сосредоточенная сила, контактные напряжения, фрикционное проскальзывание.

UDC 539.3

N. I. Malanchuk, PhD (Phys.-Math.)

EFFECT OF INTERNAL CONCENTRATED FORCE ON LOCAL FRICTIONAL SLIP OF HALF-SPACES

The contact interaction of two elastic semi-infinite solids with flat surfaces and different mechanical properties is studied. The solids are subjected to pressure at infinity and concentrated force is applied at internal point of the upper solid. The normal and tangential contact stresses are found assuming full stick of the solids. Based on the numerical analysis of the contact stresses, it is shown that the solids can be in stick contact or in stick-slip contact (with one or two zones of local frictional slip) depending on the magnitude and orientation of the concentrated force and elastic characteristics of the contacting materials.

Keywords: contact of half-spaces, concentrated force, contact stresses, friction slip.

Slippage on the contacting surfaces of elements of machines and structures or natural structures can significantly affect their mechanical behavior, contact stiffness and strength. Taking into account slip in the vicinity of surface grooves, subsurface inclusions, and regions of non-ideal thermal contact, the interaction of bodies with conforming surfaces [1] has been studied in [4, 5, 12]. The slip zones at the interface between conforming surfaces can also be caused by action of concentrated forces [2, 3]. The delamination of such surfaces under the action of concentrated forces has been investigated in [6, 8]. Local slip between a strip and a half-plane under the action of surface force has been studied in [9 – 11].

The contact of two elastic half-spaces with flat surfaces and different mechanical characteristics of their materials is investigated in this work. Bodies are subjected to actions of uniformly distributed far-field compressive stress and concentrated force applied at the inner point of the upper half-space at

an angle α to the interface. Normal and tangential contact stresses are found on the assumption that the bodies are in full stick along the entire interface. Based on the numerical analysis of the contact stresses, the effect of the concentrated force on the appearance of zones of local friction slip is investigated. It is revealed that the contacting surfaces are in stick or one or two slip zones are present when the force is horizontal. When the force acts perpendicularly to the interface, the contacting surfaces are in stick or two slip zones are present. The effect of the shear modulus of the lower body on the number and location of the slip zones is analyzed.

REFERENCES

1. **Johnson K. L.** Contact mechanics.. – 1985. Moscow, Mir, 1989. 510 p. (in Russian).
2. **Malanchuk N. I.** Slip of the bodies in the vicinity of exfoliation under action of concentrated surface force // Mathematical Methods and Physicomechanical Fields. – 2007. Vol. 50. No 4. P. 173–180. (in Ukrainian).
3. **Malanchuk N. I., Martynyak R.M.** Integral equations of problem of local contact slip of solids under action of concentrated forces // Applied Problems of Mechanics and Mathematics. 2006 No. 4. P. 111–115. (in Ukrainian).
4. **Malanchuk N. I., Slobodyan B. S., Martynyak R. M.** Friction sliding of elastic bodies in the presence of subsurface inclusion // Materials Science. 2017. **52**, No. 6. P. 819–826. (in Ukrainian).
5. **Martynyak R. M., Malanchuk N. I., Monastyr'skyi B. E.** Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. Part 2. Incomplete contact // Materials Science. 2006. **42**, No. 4. P. 551–559. (in Ukrainian).
6. **Martynyak R. M.** Interaction between elastic half-planes with incomplete mechanical contact // Mathematical Methods and Physicomechanical Fields. 1985. No. 22. P. 89–92. (in Russian).
7. **Muskhelishvili N.I.** Some main problems of mathematical theory of elasticity. Moscow, Nauka, 1966, 707p. (in Russian).
8. **Shvets R. M., Martynyak R.M., Kryshchak A. A.** Incomplete mechanical contact of two elastic half-planes from orthotropic materials // Physico-Chemical Mechanics of Materials. 1990. **26**, No 3. P. 65–69. (in Ukrainian).
9. **Barber J.R., Ciavarella M.** Contact Mechanics // Int. J. Solids Structures. 2000. Vol. 37. No 1-2. P. 29–43.
10. **Comninou M., Barber J.** Frictional slip between a layer and a substrate due to a periodic tangential surface force // Int. J. Solids Structures. 1983. Vol. 19, No. 6. P. 533–539.
11. **Jager J.** Half-planes without coupling under contact loading // Arch. Appl. Mech. 1997. Vol. 67. P. 247–259.
12. **Malanchuk N., Martynyak R., Monastyrski B.** Thermally induced local slip of contacting solids in vicinity of surface groove // Int. J. Solids Structures. 2011. **48**, Iss. 11-12. P. 1791–1797.

Інститут прикладних проблем
Механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна

Надійшла до редколегії 04.11.2019