УДК 539.3

Ю. Я. Годес, канд. физ.-мат. наук, И. Б. Кочеткова

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО МНОГОСЛОЙНОГО КОЛЬЦА С НЕОДНОРОДНЫМИ СЛОЯМИ

Рассмотрена задача о собственных колебаниях в условиях плоской осесимметричной деформации упругого многослойного кольца, в котором произвольным образом чередуются однородные слои и слои с непрерывно изменяющимися в радиальном направлении характеристиками. Предложенный алгоритм определения собственных частот и форм колебаний многослойного кольца основан на применении функций жесткости, для построения которых разработаны рекуррентные соотношения. Нормированные решения уравнений теории упругости в области кольца с произвольной непрерывной неоднородностью получены с помощью численного решения двух задач Коши.

Ключевые слова: упругость, многослойное кольцо, напряженно-деформированное состояние, собственные колебания, нормированные решения, функции жесткости, рекуррентные соотношения.

Введение. Одним из наиболее эффективных методов моделирования как статических, так и динамических процессов деформирования многослойных тел является метод функций податливости, получивший широкое распространение при решении граничных задач теории упругости для многослойных оснований [1, 8, 10, – 12], многослойных колец и шаров [2, 3, 7]. Идея этого метода заключается в построении функций (коэффициентов, операторов) податливости, которые представляют собой механические характеристики рассматриваемого многослойного тела, не зависящие от внешних воздействий на его поверхности. Функции податливости строятся при помощи специальных рекуррентных соотношений до решения граничных задач. Напряжения и перемещения во всех слоях выражаются через параметры внешних воздействий на границе многослойного тела по рекуррентным формулам, в которые входят функции податливости. Важным достоинством указанного подхода является нечувствительность к росту числа слоев в теле.

Область применения метода функций податливости удалось расширить с кусочно-однородных тел на тела, содержащие слои с непрерывной неоднородностью. В [4, 5] с использованием аппарата коэффициентов податливости получены решения статических задач теории упругости о плоской осесимметричной деформации многослойного кольца и о центрально-симметричной деформации многослойного шара с чередующимися однородными слоями и слоями, модули сдвига которых непрерывно изменяются в радиальном направлении. Методика исследования собственных колебаний многослойного шара с неоднородными

слоями описана в [6]. В настоящей статье излагается базирующееся на идеях метода функций податливости решение задачи о собственных колебаниях упругого неоднородного многослойного кольца.

Постановка задачи. Рассматривается многослойное кольцо, состоящее из N концентрических кольцевых слоев конечной толщины $R_{n-1} < R < R_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$), находящееся в абсолютно жесткой идеально гладкой внешней обойме. Здесь R_n – внешний радиус n -го слоя, $R\varphi z$ – цилиндрическая система координат, ось которой совпадает с осью кольца. В процессе деформирования слои не отстают друг от друга, векторы напряжений на их общей границе совпадают. Слои являются упругими, изотропными. Модуль сдвига $G(R)$, коэффициент Пуассона $\nu(R)$ и плотность $\rho(R)$ представляют собой кусочно-непрерывно-дифференцируемые функции полярного радиуса R , которые могут претерпевать конечные разрывы на границах слоев. Если n -й слой однородный, то в области этого слоя указанные величины постоянны. Объемные силы отсутствуют. Внутренняя граница $R = R_0$ кольца свободна от внешних воздействий.

Деформация кольца предполагается плоской осесимметричной, поэтому обращаются в нуль перемещения u_z , u_φ , сдвиги ε_{Rz} , $\varepsilon_{R\varphi}$, $\varepsilon_{z\varphi}$ и касательные напряжения σ_{Rz} , $\sigma_{R\varphi}$, $\sigma_{z\varphi}$. Рассматривается задача о колебаниях, когда ненулевые компоненты вектора перемещений, тензоров деформации и напряжений представляют собой произведения своих амплитудных значений, которые являются функциями только полярного радиуса R , на гармоническую функцию времени: $u_R(R)e^{i\omega t}$, $\varepsilon_{RR}(R)e^{i\omega t}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}(R)e^{i\omega t}$, $\sigma_{RR}(R)e^{i\omega t}$, $\sigma_{\varphi\varphi}(R)e^{i\omega t}$, $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{RR} + \sigma_{\varphi\varphi})$, где ω – частота колебаний.

Система уравнений линейной теории упругости в области n -го слоя $R_{n-1} < R < R_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) в описанном случае колебаний в условиях плоской осесимметричной деформации имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{RR}}{dR} + \frac{1}{R}(\sigma_{RR} - \sigma_{\varphi\varphi}) &= -\rho\omega^2 u_R, \quad \sigma_{RR} = \frac{2G}{1-2\nu} \left((1-\nu)\varepsilon_{RR} + \nu\varepsilon_{\varphi\varphi} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2G}{1-2\nu} \left((1-\nu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu\varepsilon_{RR} \right), \quad \varepsilon_{RR} = \frac{du_R}{dR}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_R}{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

В математической постановке задача определения напряженно-деформированного состояния многослойного кольца сводится к построению в областях всех слоев решений уравнений теории упругости, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

1) условиям сопряжения слоев

$$\sigma_{RR}|_{R=R_n+0} = \sigma_{RR}|_{R=R_n-0}, \quad u_R|_{R=R_n+0} = u_R|_{R=R_n-0}, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad (2)$$

2) условию отсутствия перемещений на внешней границе кольца

$$u_R|_{R=R_N} = 0; \quad (3)$$

3) условию свободной внутренней границы кольца

$$\sigma_{RR}|_{R=R_0} = 0. \quad (4)$$

Нормированные решения дифференциальных уравнений. Задача решения системы уравнений (1) в области n -го слоя сводится, в соответствии с известной методикой [9], к определению функций $\tau = \sigma_{RR}$, $s = 2G u_R/R$, связанных с радиальными напряжением и перемещением. Эти функции удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dR} &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\tau}{R} + \frac{1}{1-\nu} \frac{s}{R} - \frac{\rho}{2G} R \omega^2 s, \\ \frac{ds}{dR} &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\tau}{R} - \frac{1}{1-\nu} \frac{s}{R} + \frac{d \ln G}{dR} s. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение этой системы уравнений выражается через начальные параметры напряженно-деформированного состояния n -го слоя

$$\tau_n = \sigma_{RR}|_{R=R_{n-1}+0}, \quad s_n = 2G \frac{u_R}{R} \Big|_{R=R_{n-1}+0} \quad (6)$$

следующим образом:

$$\tau = S_{\tau\tau}(\omega, R) \tau_n + S_{\tau s}(\omega, R) s_n, \quad s = S_{s\tau}(\omega, R) \tau_n + S_{ss}(\omega, R) s_n, \quad (7)$$

где $S_{\tau\tau}(\omega, R)$, $S_{s\tau}(\omega, R)$ и $S_{\tau s}(\omega, R)$, $S_{ss}(\omega, R)$ – нормированные решения системы (5), $R_{n-1} < R < R_n$.

Построение нормированных решений сводится к двум задачам Коши. Для кольца с неоднородностью произвольного типа эти задачи Коши можно решить только численно. Они допускают аналитическое решение либо для однородного кольца, либо если модуль сдвига и плотность n -го слоя изменяются при $R_{n-1} < R < R_n$ по степенным законам с согласованными показателями неоднородности γ_n и $\gamma_n - 2$, а коэффициент Пуассона постоянен:

$$\frac{G(R)}{G(R_{n-1})} = \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\gamma_n}, \quad \frac{\rho(R)}{\rho(R_{n-1})} = \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\gamma_n - 2}, \quad \nu(R) = \nu(R_{n-1}). \quad (8)$$

В случае степенной неоднородности вида (8) нормированные решения системы дифференциальных уравнений (5) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 S_{\tau\tau}(\omega, R) &= \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left((1 + \mu_n) \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} - \mu_n \right), \\
 S_{s\tau}(\omega, R) &= \frac{1}{\kappa_n \beta_n} \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left(\left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} - 1 \right), \\
 S_{\tau s}(\omega, R) &= -\kappa_n \beta_n \mu_n (1 + \mu_n) \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left(\left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} - 1 \right), \\
 S_{ss}(\omega, R) &= \left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\alpha_n} \left(1 - \mu_n \left(\left(\frac{R}{R_{n-1}} \right)^{\beta_n} - 1 \right) \right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \sqrt{(\gamma_n - 2)^2 + 4 \frac{\gamma_n}{\kappa_n} - 4(\omega t_n)^2}, \quad \mu_n = \frac{1}{\beta_n} \left(\alpha_n - \gamma_n + \frac{1}{1 - \nu(R_{n-1})} \right), \\
 t_n &= R_{n-1} \sqrt{\frac{1}{2\kappa_n} \frac{\rho(R_{n-1})}{G(R_{n-1})}}, \quad \alpha_n = \frac{1}{2}(\gamma_n - \beta_n - 2), \quad \kappa_n = \frac{1 - \nu(R_{n-1})}{1 - 2\nu(R_{n-1})}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

В случае однородного кольцевого слоя, когда $G(R) = G(R_{n-1})$, $\rho(R) = \rho(R_{n-1})$, $\nu(R) = \nu(R_{n-1})$, $R_{n-1} < R < R_n$, нормированные решения системы (5) выражаются [13] через комбинации функций Бесселя первого и второго рода $J_0(z)$, $Y_0(z)$, $J_1(z)$, $Y_1(z)$:

$$\begin{aligned}
 S_{\tau\tau}(\omega, R) &= \frac{R_{n-1}}{R} \frac{h_{11}^{(n)}}{\kappa_n \omega t_n} - h_{01}^{(n)}, \quad S_{s\tau}(\omega, R) = -\frac{R_{n-1}}{R} \frac{h_{11}^{(n)}}{\kappa_n \omega t_n}, \\
 S_{\tau s}(\omega, R) &= \frac{R_{n-1}}{R} \left(\frac{h_{11}^{(n)}}{\kappa_n \omega t_n} - h_{10}^{(n)} \right) + \kappa_n \omega t_n h_{00}^{(n)} - h_{01}^{(n)}, \\
 S_{ss}(\omega, R) &= \frac{R_{n-1}}{R} \left(h_{10}^{(n)} - \frac{h_{11}^{(n)}}{\kappa_n \omega t_n} \right),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где t_n , κ_n задаются формулами (10);

$$h_{kl}^{(n)} = \frac{J_k(\omega t_n R/(R_{n-1})) Y_l(\omega t_n) - Y_k(\omega t_n R/(R_{n-1})) J_l(\omega t_n)}{J_1(\omega t_n) Y_0(\omega t_n) - Y_1(\omega t_n) J_0(\omega t_n)}, \quad k, l = 0, 1.$$

Для приближенного определения нормированных решений системы (5) в областях неоднородных слоев использовался метод Рунге – Кутты пятого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования. Многочисленные расчеты показали, что получаемые результаты с высокой степенью точности совпадают с аналитическими решениями для эквивалентных кусочно-однородных колец и для кольца со степенной неоднородностью вида (8).

Функции жесткости. Удовлетворяя условиям сопряжения слоев (2), в силу равенств (6), (7) приходим к рекуррентным соотношениям, связывающим начальные параметры напряженно-деформированного состояния соседних слоев:

$$\tau_{n+1} = S_{\tau\tau}(\omega, R_n - 0) \tau_n + S_{\tau s}(\omega, R_n - 0) s_n,$$

$$\frac{G(R_n - 0)}{G(R_n + 0)} s_{n+1} = S_{s\tau}(\omega, R_n - 0) \tau_n + S_{ss}(\omega, R_n - 0) s_n. \quad (12)$$

Для удовлетворения условию отсутствия перемещений на внешней границе кольца (3) начальные параметры N -го слоя следует связать равенством

$$\tau_N = -B_N(\omega) s_N, \quad B_N(\omega) = S_{ss}(\omega, R_N) / S_{s\tau}(\omega, R_N).$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями (12), приходим к выводу, что аналогичными равенствами связаны начальные параметры напряженно-деформированного состояния всех слоев:

$$\tau_n = -B_n(\omega) s_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

Величины $B_n(\omega)$ представляют собой функции жесткости многослойного кольца. Зная эти величины, можно связать между собой напряжения и перемещения на внутренних границах слоев. Функции жесткости являются механическими характеристиками многослойного тела, так как определяются исключительно его геометрией и механическими свойствами материалов слоев.

Для построения функций жесткости воспользуемся известными приемами метода функций податливости [10, 11]. Подставив рекуррентные соотношения (12) в равенство (13) для слоя с номером $n+1$, приходим к уравнению относительно τ_n . Сравнив решение этого уравнения с равенством (13), получим рекуррентные соотношения для функций жесткости:

$$B_n(\omega) = \frac{\frac{G(R_n - 0)}{G(R_n + 0)} S_{\tau s}(\omega, R_n - 0) + B_{n+1}(\omega) S_{ss}(\omega, R_n - 0)}{\frac{G(R_n - 0)}{G(R_n + 0)} S_{\tau \tau}(\omega, R_n - 0) + B_{n+1}(\omega) S_{s\tau}(\omega, R_n - 0)}. \quad (14)$$

Исходной для рекуррентного процесса (14) является функция жесткости $B_N(\omega)$, которая была найдена выше.

Частоты и формы колебаний. Удовлетворение условию свободной внутренней границы многослойного кольца приводит к уравнению частот

$$B_1(\omega) = 0. \quad (15)$$

Корни этого уравнения ω_k ($k = 1, 2, \dots$) представляют собой частоты собственных колебаний рассматриваемого многослойного кольца. Для определения формы колебания с k -й собственной частотой необходимо выразить начальные параметры s_n , $n = 2, 3, \dots, N$, через s_1 при помощи рекуррентных соотношений

$$\frac{G(R_n - 0)}{G(R_n + 0)} s_{n+1} = (S_{ss}(\omega_k, R_n - 0) - B_n S_{s\tau}(\omega_k, R_n - 0)) s_n, \quad (16)$$

вытекающих из равенств (12), (13). Амплитуды радиальных напряжений и перемещений можно найти согласно формулам (7) с учетом равенств (13), после чего амплитуды кольцевых напряжений легко определяются из последних трех уравнений (1):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (S_{\tau s}(\omega_k, R) - B_n(\omega_k) S_{\tau \tau}(\omega_k, R)) s_n, \\ 2G \frac{u_R}{R} &= (S_{ss}(\omega_k, R) - B_n(\omega_k) S_{s\tau}(\omega_k, R)) s_n, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{1 - \nu} \left(\nu \sigma_{RR} + 2G \frac{u_R}{R} \right), \quad R_{n-1} < R < R_n. \end{aligned} \quad (17)$$

Функции жесткости $B_n(\omega)$, которые входят в формулы (16), (17), однозначно определены рекуррентным процессом (14). Как и следовало ожидать, формы колебаний находятся с точностью до произвольной мультипликативной постоянной s_1 , задающей перемещение внутренней границы многослойного кольца.

Результаты численного моделирования. Для иллюстрации возможностей изложенной выше методики моделировались колебания четырехслойного кольца с неоднородностью смешанного типа. Внешние радиусы слоев: $R_1 = 2R_0$, $R_2 = 3R_0$, $R_3 = 5R_0$, $R_4 = 6R_0$. Коэффициенты Пуассона и плотности всех слоев одинаковы: $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0,3$,

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$. Первый слой является однородным с модулем сдвига G_1 . Модули сдвига второго и четвертого слоев изменяются по линейному закону:

$$G(R) = G_1 \left(1 - \frac{R - R_1}{2R_1} \right), \quad R_1 < R < R_2; \quad G(R) = G_1 \left(1 + \frac{R - R_3}{2R_3} \right), \quad R_3 < R < R_4,$$

третьего слоя – по степенному закону: $G(R) = G_3 \sqrt{R_2/R}$, $R_2 < R < R_3$.

Изменение модуля сдвига вдоль радиуса показано на рис. 1.

Рис. 1 – Зависимость модуля сдвига $G(R)$ от радиуса

На рис. 2 – рис. 4 показаны формы колебаний многослойного кольца, соответствующие первым четырем собственным частотам, при $G_3/G_1 = 20$.

Рис. 2 – Амплитудные значения радиальных напряжений для четырех частот

Рис. 3 – Амплитудные значения кольцевых напряжений для четырех частот

Рис. 4 – Амплитудные значения перемещений для четырех частот

Рис. 5 – рис. 7 иллюстрируют изменение амплитуд напряжений и перемещений, соответствующих первой собственной частоте, в зависимости от отношения модулей сдвига G_3/G_1 .

Как и следовало ожидать, радиальные напряжения и перемещения сохраняют непрерывность на границах слоев. Кольцевые напряжения остаются непрерывными на границе первого и второго слоев, на которой непрерывен модуль сдвига, и претерпевают разрывы на границах других слоев. Для радиальных перемещений имеет место излом при скачкообразном изменении механических характеристик.

Рис. 5 – Амплитудные значения радиальных напряжений при различных жесткостях

Рис. 6 – Амплитудные значения перемещений при различных жесткостях

Рис. 7 – Амплитудные значения кольцевых напряжений при различных жесткостях

Выводы. Предложенная методика позволяет моделировать в условиях плоской осесимметричной деформации собственные колебания многослойных колец с произвольным чередованием однородных и непрерывно-неоднородных слоев в широком диапазоне изменения их механических характеристик. Для ее переноса на осесимметричные задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии достаточно заменить во всех формулах ν на $\nu/(1+\nu)$. Эффективность и достоверность численного определения напряжений и перемещений подтверждена сравнением с аналитическими решениями для эквивалентных кусочно-однородных колец и колец со степенной неоднородностью вида (8). Перспективным направлением дальнейших исследований представляется распространение изложенного алгоритма на ортотропные многослойные кольца и шары.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Вильданова С. И., Годес Ю. Я.** Резонансные явления в многослойных основаниях с чередующимися однородными и неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2008. Т. 1. Вип. 11. С. 102–116.
2. **Годес Ю. Я., Климова Е. А., Кочеткова И. Б.** О напряженно-деформированном состоянии многослойного кольца со сцепленными слоями // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Д.: ДГУ. 1995. С. 18–25.
3. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б.** О напряженно-деформированном состоянии осесимметрично нагруженного многослойного полого шара с упругими связями между слоями // Вопросы прочности и пластичности. Д.: ДГУ. 1996. С. 37–45.
4. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б., Михаил А. В.** О деформировании упругого многослойного шара с неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2015. Т. 2. Вип. 19. С. 18–26.
5. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б., Оноприенко О. Д.** О деформировании многослойного кольца с чередующимися однородными и неоднородными слоями // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2014. Т. 1. Вип. 18. С. 43–51.
6. **Годес Ю. Я., Кочеткова И. Б.** Моделирование колебаний упругого многослойного шара с неоднородными слоями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпро: Ліра. 2018. Вип. 28. С. 45–57.
7. **Кочеткова И. Б.** О напряженно-деформированном состоянии многослойного кольца с упругими связями между слоями // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Д.: ДГУ. 1995. С. 135–140.
8. **Ламзюк В. Д., Приварников А. К.** Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. Д.: ДГУ, 1978. Вип. 1. 64 с.; Вип. 2. 58 с.
9. **Ломакин В. А.** Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976. 368 с.
10. **Приварников А. К.** Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Д.: ДГУ. 1973. С. 27–45.
11. **Приварников А. К., Ламзюк В. Д.** Упругие многослойные основания. Д., 1985. Ч.1. 162 с. Деп. в ВНИИТИ 23.12.85, №8789-В.
12. **Приварников А. К., Радовский Б. С.** Действие подвижной нагрузки на вязко-упругое многослойное основание // Прикл. механика. 1981. Т.17. Вип. 6. С. 45–52.
13. **Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.**

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНОГО БАГАТОШАРОВОГО КІЛЬЦЯ З НЕОДНОРІДНИМИ ШАРАМИ

Розглянуто задачу про вільні коливання в умовах плоскої осесиметричної деформації пружного багатошарового кільця, у якому довільним чином чергуються як однорідні шари, так і шари, модулі пружності та густини яких неперервно змінюються у радіальному напрямі. Запропонований алгоритм визначення власних частот і форм коливань ґрунтується на застосуванні функцій жорсткості, для побудови яких розроблено рекурентні співвідношення. Нормовані розв'язки рівнянь теорії пружності в області кільця з довільною неперервною неоднорідністю одержано як результати числового розв'язання двох задач Коші.

Ключові слова: пружність, багатошарове кільце, напружено-деформований стан, власні коливання, нормовані розв'язки, функції жорсткості, рекурентні співвідношення.

VIBRATIONS OF THE ELASTIC MULTILAYERED RING WITH INHOMOGENEOUS LAYERS MODELLING

Problem concerning free vibrations of an elastic multilayered ring has been considered under conditions of plane axisymmetric deformation. For some layers elasticity modulus and densities change continuously in the radial direction. Algorithm for evaluation the frequencies and shapes of free vibrations based on the use of rigidity functions is proposed. Recurrent relationships are applied to determine the rigidity functions. Normalized solutions of the elasticity equations for the ring with arbitrary continuous heterogeneity are obtained as the result of numerical solving Cauchy problems.

Keywords: elasticity, multilayered ring, stresses, strains, displacements, free vibrations, normalized solutions, rigidity functions, recurrent relationships.

The compliance functions method is well known as the most effective mode to evaluate stressed and strained state of piecewise homogeneous solids, such as multilayered foundations [1, 8, 10, 11, 12], hollow rings and spheres [2, 3, 7]. This method was also extended to dynamic problems of steady-state load motion, waves propagation and vibration. The idea of the method is to get compliance functions (coefficients, operators) – mechanical parameters of multilayered solid which are independent of external surface load and should be obtained via special recurrent relationships. In [4, 5] the scope of application of this method was extended from piecewise homogeneous solids to multilayered foundations, rings and spheres containing continuously inhomogeneous layers.

In [6] the rigidity functions algorithm based on the ideas of this method is used to solve the free vibrations problem concerning central symmetric deformation of a hollow elastic multilayered sphere containing layers with continuously changing elasticity modulus and densities. The same elasticity

problem concerning plane axisymmetric deformation of the multilayered ring is considered in this article.

Mathematical formulation of the problem is presented by the elasticity equations (which are reduced to special form) for each ring layer and boundary conditions. General solution of differential equations contains normalized solutions $S_{\tau\tau}(\omega, R)$, $S_{s\tau}(\omega, R)$, $S_{\tau s}(\omega, R)$, $S_{ss}(\omega, R)$ and initial parameters – radial stresses and displacements at the inner boundary of the ring layer. For arbitrary continuous heterogeneity the normalized solutions can be obtained only numerically. Analytically these functions are determined for homogeneous ring and for the special type of power continuous heterogeneity.

The initial parameters for each pair of neighboring layers are connected by recurrent relationships. The initial parameters s_n , τ_n of any layer are related by formula $\tau_n = -B_n(\omega)s_n$. The rigidity functions $B_n(\omega)$ are fully determined by geometry and mechanical properties of the multilayered ring. Recurrent process for determining these functions $B_n(\omega)$ is proposed. Natural frequencies are the roots of equation $B_1(\omega) = 0$. Equations for calculation the vibration shapes are obtained.

The numerical simulation results for four-layered ring with mixed heterogeneity are given to illustrate the potentialities of the technique described. The vibration shapes corresponding to the first four natural frequencies are analyzed.

REFERENCES

1. **Vildanova S. I.**, *Hodes Yu. Ya.* Resonance phenomena in the multilayered foundations with the alternate homogeneous and nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser. Mechanika. 2008. Vol. 1. No. 11. P. 102–116. (in Russian).
2. **Hodes Yu. Ya.**, *Klimova E. A.*, *Kochetkova I. B.* Stressed and strained state of the multilayered ring with rigid coupling of the layers // Problems of solids deformation and fracture mechanics. Dnepropetrovsk. 1995. P. 18–25. (in Russian).
3. **Hodes Yu. Ya.**, *Kochetkova I. B.* Stressed and strained state of the axisymmetrically loaded multilayered sphere with elastic coupling of the layers // Problems of strength and plasticity. Dnepropetrovsk. 1996. P. 37–45. (in Russian).
4. **Hodes Yu. Ya.**, *Kochetkova I. B.*, *Mikhail A. V.* Deformation of the elastic multilayered sphere with nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: Mechanika. 2015. Vol. 2. No. 19. P. 18–26. (in Russian).
5. **Hodes Yu. Ya.**, *Kochetkova I. B.*, *Onoprienko O. D.* Deformation of the multilayered ring with the alternate homogeneous and nonhomogeneous layers // Bulletin of Dnipropetr. Univ. Ser.: Mechanika. 2014. Vol. 1. No. 18. P. 43–51. (in Russian).
6. **Hodes Yu. Ya.**, *Kochetkova I. B.* Vibrations of the elastic multilayered sphere with inhomogeneous layers modelling // Problems of computational mechanics and strength of structures. Dnipro: Lira. 2018. Vol. 28. P. 45–57. (in Russian).
7. **Kochetkova I. B.** Stressed and strained state of the multilayered ring with elastic coupling of the layers // Problems of solids deformation and fracture mechanics. Dnepropetrovsk, 1995. P. 135–140. (in Russian).
8. **Lamzyuk V. D.**, *Privarnikov A. K.* Solution of the elasticity boundary problems for multilayered foundations. Dnepropetrovsk, 1978. Iss. 1. 64 p. Iss. 2. 58 p. (in Russian).

9. **Lomakin V. A.** Elasticity theory of nonhomogeneous solids. Moscow, MSU, 1976. 368 p. (in Russian).
10. **Privarnikov A. K.** Three-dimensional deformation of the multilayered foundation // Stability and strength of construction members. Dnepropetrovsk, 1973. P. 27–45. (in Russian).
11. **Privarnikov A. K., Lamzyuk V. D.** Elastic multilayered foundations. Dnepropetrovsk, 1985. Part 1. 162 p. Dep. VINITI 23.12.85, №8789-B. (in Russian).
12. **Privarnikov A. K., Radovsky B. S.** Viscoelastic multilayered foundation under moving load // Applied Mechanics. 1981. Vol. 17. No. 6. P. 45–52. (in Russian).
13. Handbook of mathematical functions / Edited by M. Abramowitz, I. Stegun. Moscow: Nauka, 1979. 832 p. (in Russian).

*Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 15.04.2019