УДК 539.3

Д. Хоссейни Каклар

КОЛЕБАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрены геометрически нелинейные колебания функционально-градиентной цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкоупругой жидкостью. При помощи вариационного принципа Гамильтона – Остроградского определение частоты колебаний данной системы сведено к решению системы дифференциальных уравнений. Уравнение движения вязкоупругой жидкости получено с помощью векторного уравнения Навье – Стокса.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, цилиндрическая оболочка, принцип Гамильтона – Остроградского, геометрически нелинейные колебания.

Введение. Функционально-градиентные материалы представляют собой современные неоднородные композитные материалы, которые обычно получают в результате сплава металла и керамики. Они широко используются при изготовлении аэрокосмических объектов функционально-градиентные материалы. Объекты, изготовленные таких материалов, применяются при контакте высокотемпературных сред. В [6, 7, 10 – 13] рассмотрены колебания и устойчивость оболочек из функционально-градиентных материалов, не имеющих контакта с жидкостью. Работа [1] посвящена геометрически нелинейным колебаниям функционально-градиентных оболочек сложной формы в плане. В [4] рассмотрены линейные колебания функционально-градиентных пологих оболочек сложных конфигураций. Геометрически нелинейные колебания функционально-градиентной цилиндрической оболочки, контактирующей с протекающей жидкостью, исследованы в [8]. В [9] изучены геометрически нелинейные колебания продольно подкрепленной функционально - градиентной цилиндрической оболочки вместе с движущейся жидкостью. При этом применен вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, и определение частоты колебаний данной системы приведено к решению системы дифференциальных уравнений, которое реализовано численным методом.

Постановка задачи. Рассмотрена цилиндрическая оболочка, изготовленная из смеси керамики и металла, имеющих взаимный контакт с вязкоупругой жидкостью. Здесь, так же как и в [4], принят степенной закон изменения объемной доли керамики

$$V = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k, \quad (1)$$

где h – толщина оболочки, k – показатель степени объемной доли материала, который может изменяться от 0 до бесконечности, т.е. $(0 \leq k \leq \infty)$. При этом, если $k=0$, то структура является полностью керамической, если же $k = \infty$, то – металлической.

Предполагается, что все механические и физические характеристики материалов (модуль Юнга, плотность и др.) могут быть представлены в виде [12, 13]:

$$P_j = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right),$$

где $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ – коэффициенты, определяемые для каждого конкретного материала. Таблица значений этих коэффициентов для некоторых материалов представлена в [6, 12, 13]. Механические свойства смеси из двух составляющих определяются следующим образом

$$P(z, T) = (P_c(T) - P_m(T)) \left(z/h + 1/2 \right)^k + P_m(T). \quad (2)$$

Выражение (2) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости E , коэффициента Пуассона ν и плотности композита ρ ; $P_c(T)$, $P_m(T)$ – соответствующие характеристики керамики и металла.

Система дифференциальных уравнений цилиндрической композитной оболочки, контактирующей с вязкоупругой жидкостью, получена на основе принципа стационарности действия Гамильтона – Остроградского

$$\delta W = 0, \quad (3)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} L dt$ – действие по Гамильтону; $L = U - T + A_0$ – функция Лагранжа; t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

Потенциальная и кинетическая энергии оболочки записываются в виде:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} + M_{11} \chi_{11} + M_{22} \chi_{22} + M_{12} \chi_{12}) d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\varrho_x (w_{,x} + \psi_x) + \varrho_y (w_{,y} + \psi_y)) d\Omega; \\ T = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} I_0 (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) + 2I_1 (u_{,t} \psi_{x,t} + v_{,t} \psi_{y,t}) + \\ & + I_2 (\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2) dx dy; \end{aligned} \quad (4)$$

$$I_0 = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h, \quad I_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z dz = \frac{(\rho_c - \rho_m)k}{2(k+1)(k+2)} h^2;$$

$$I_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^2 dz = \left(\frac{\rho_m}{12} + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3;$$

$$A_0 = - \iint_{\Omega} (q_x u + q_y v + p w) dx dy,$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^L + \varepsilon_{ij}^{ND} \quad (i, j = 1, 2),$$

$$\varepsilon_{11}^L = u_{,x} + w / R_x, \quad \varepsilon_{22}^L = v_{,y} + w / R_y, \quad \varepsilon_{12}^L = u_{,y} + v_{,x},$$

$$\varepsilon_{11}^{ND} = \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22}^{ND} = \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12}^{ND} = w_{,x} w_{,y},$$

$$\varepsilon_{13} = w_{,x} + \Psi_x, \quad \varepsilon_{23} = w_{,y} + \Psi_y, \quad \chi_{11} = \Psi_{x,x},$$

$$\chi_{22} = \Psi_{y,y} \chi_{12} = \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x},$$

$$N = \{N_{11}; N_{22}; N_{12}\}^T = \frac{1}{1-v^2} [C] (E_1 \varepsilon + E_2 \chi),$$

$$M = \{M_{11}; M_{22}; M_{12}\}^T = \frac{1}{1-v^2} [C] (E_2 \varepsilon + E_3 \chi),$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3,$$

$$\rho = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h.$$

Перерезывающие силы Q_x и Q_y определяются как $Q_x = K_S^2 A_{33} \varepsilon_{13}$, $Q_y = K_S^2 A_{33} \varepsilon_{23}$, где K_S^2 — корректирующий коэффициент сдвига, который принимается равным $K_S^2 = 5/6$.

Влияние вязкоупругой среды на оболочку определяется в виде внешних поверхностных нагрузок, приложенных к оболочке, и вычисляется как работа с отрицательными знаками A_0 , совершённая этими нагрузками при перемещении поверхности оболочки. Компоненты силы давления q_x, q_y, p определяются из уравнений Навье – Стокса:

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{\mathfrak{g}}}{\partial t} = -grad\, p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_0 a_*^2} q grad\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) + \bar{\mu} \nabla^2 \bar{\mathfrak{g}}, \quad (5)$$

где $\bar{\mu}$ – динамический коэффициент вязкости; p – давление в некоторой точке жидкости; ρ_0 – плотность жидкости; a_* – скорость звука в жидкости; ∇^2 – оператор Лапласа; $\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x, \mathfrak{g}_y, \mathfrak{g}_z)$ – вектор скорости в произвольной точке жидкости.

Уравнение движения оболочки (3) и векторное уравнение движения жидкости (5) дополняются контактными и граничными условиями. Контактная поверхность «оболочка – жидкость» имеет следующие граничные условия ($r = R$):

$$\mathfrak{g}_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \mathfrak{g}_y = \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}, \quad \mathfrak{g}_z = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (6)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_y = -\sigma_{r\varphi}, \quad q_z = -p. \quad (7)$$

Силы вязкости определяются равенствами:

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{g}_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{g}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{g}_y}{\partial z} \right) \quad (8)$$

Далее рассматриваются шарнирно опертые цилиндрические оболочки, т. е. при $\xi = 0$ и $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 = L_1 / R$) выполняются следующие граничные условия:

$$\mathfrak{g} = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0, \quad (9)$$

где T_1, M_1 – сила и момент, действующие в поперечном сечении оболочки.

Частотное уравнение собственных колебаний цилиндрической функционально-градиентной оболочки с движущейся вязкоупругой жидкостью получается на основе принципа стационарности действия Остроградского – Гамильтона $\delta W = 0$ с учетом независимости и произвольности вариаций $\delta u, \delta v, \delta w$.

Таким образом, изучение собственных колебаний функционально-градиентной цилиндрической оболочки, имеющей внутреннюю область с вязкоупругой жидкостью, приводит к интегрированию полной энергии данной конструкции.

Решение задачи. Уравнение (5) с помощью уравнения неразрывности и уравнения состояния приводит к уравнению относительно давления p , которое имеет следующий вид

$$p = p_0 J_n(\lambda r) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \quad (10)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2(1+i4\mu\omega/3\rho_0 a^2)}} - k^2$; p_0 – амплитуда давлений;

$J_n(\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода n -го порядка; $\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2$, a – скорость звука в жидкости.

Предположим, что $\vec{\vartheta}$ имеет вид $\vec{\vartheta} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\psi}$. Тогда из уравнения Навье – Стокса (5) для определения φ и $\vec{\psi}$ получим:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{a^2\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \Delta\vec{\psi} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t}. \quad (11)$$

Если φ примем в виде $\varphi = \varphi_*(r) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}$, то согласно правилу вариации постоянного с учетом выражения (10) для φ будем иметь:

$$\varphi = \left(\frac{i\omega}{a^2\rho_0} p_0 f(r) + \mu_1 J_n(kr) \right) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \quad (12)$$

Здесь $f(r) = \left(J_n(kr) \int_0^R J_n(\lambda r) Y_n(kr) dr - Y_n(kr) \int_0^R J_n(\lambda r) J_n(kr) dr \right) \Delta^{-1}$;

$\Delta = J_n(kr) Y_n'(kr) - J_n'(kr) Y_n(kr)$; Y_n – функция Бесселя второго рода n -го порядка; μ_1 – постоянная.

Если примем $\psi_i = \psi_{*i}(r) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}$, то из второго уравнения в (11) найдем:

$$\psi_i = \mu_2 J_n(qr) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \quad q = \sqrt{k^2 + i\omega/\mu}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Используя (12) и (13) с учетом $\vec{\vartheta} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\psi}$, определим компоненты скорости в жидкости $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$:

$$\vartheta_x = \left[ik \left(\frac{i\omega}{a^2\rho_0} p_0 f(r) + \mu_1 J_n(kr) \right) + \left(i \frac{n}{R} J_n(qr) - J_n'(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_y &= \left[in \left(\frac{i\omega}{a^2 \rho_0} p_0 f'(r) + \mu_1 J_n(kr) \right) + \left(J_n'(qr) - ik J_n(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)} \\ \vartheta_z &= \left[\frac{i\omega}{a^2 \rho_0} p_0 f'(r) + \mu_1 J_n'(kr) + i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \quad (14)\end{aligned}$$

Подставляя (14) в (8) для касательных напряжений получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{rx} &= \bar{\mu} \left[\frac{-2k\omega}{a^2 \rho_0} f'(r) p_0 + 2ik J_n'(kr) \mu_1 + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{in}{R} J_n'(qr) - J_n''(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}; \\ \sigma_{r\varphi} &= \bar{\mu} \left[-\frac{2n\omega}{a^2 R \rho_0} f'(r) p_0 + \frac{2in}{R} J_n'(kr) \mu_1 + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) + J_n''(qr) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ik J_n'(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}.\end{aligned} \quad (15)$$

Подстановкой (10) и (15) в контактные условия (7) можно определить контактные напряжения q_x , q_y , q_z и одновременно вычислить работу A_0 , которая совершается этими нагрузками при перемещении поверхности оболочки. Перемещения оболочки представим в виде:

$$u = u_0 e^{i(kx+n\theta+\omega t)}; \quad \vartheta = \vartheta_0 e^{i(kx+n\theta+\omega t)}; \quad w = w_0 e^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \quad (16)$$

где u_0, ϑ_0, w_0 – неизвестные постоянные; k, n – число волн по образующей и в окружном направлении цилиндрической оболочки соответственно. Учитывая выражения (14) и (16) в контактном условии (6), постоянные μ_1, μ_2, p_0 можно выразить через u_0, ϑ_0, w_0 . Подставляя (16) и (4) в (3), согласно принципу стационарности действия Гамильтона – Остроградского найдем выраженный через неизвестные постоянные u_0, ϑ_0, w_0 многочлен второго порядка. Варьируя полученный многочлен относительно постоянных u_0, ϑ_0, w_0 и приравнявая нулю коэффициенты независимых вариаций, получим однородную систему уравнений. Приравнявая нулю главный определитель полученной системы, находим уравнение для определения частоты колебаний цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкоупругой жидкостью

$$\det a_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Корни уравнения (17) являются комплексными, действительные части которых соответствуют частоте колебаний оболочки. Уравнение (17) решено численно.

Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки и жидкости, были приняты следующие величины:

$$\rho / \rho_0 = 0,115; \quad E_m / E_c = 70 / 380; \quad \nu_m = \nu_c = 0,3;$$

$$\rho_m / \rho_c = 2707 / 3800; \quad a_0 = 1350 \text{ м/с}; \quad \bar{\mu} = 0,33.$$

На рис. 1. приведена зависимость между линейными параметрами частоты $\Omega_x = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ и показателями k объемной доли керамики в материале оболочки (кривая 1 соответствует варианту, когда вязкость не учитывается, кривая 2 соответствует варианту, когда вязкость учитывается).

Рис. 1 — Зависимость частоты колебаний от степенного показателя

Выводы. При увеличении показателя объемной доли керамики k в материале оболочки линейная частота системы уменьшается (рис. 1). Кроме того, при учете вязкости жидкости частота собственных колебаний системы уменьшается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Курпа Л. В., Шматко Т. В. Исследование геометрически нелинейных колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана, // Вестник Запорожского национального университета. 2015. №1. С.89–97.
2. Курпа Л. В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат. мет. та фіз.- мех. поля. 2008. Т. 51. № 2. С. 75–85.
3. Курпа Л. В. Метод R-функции для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. 408 с.

4. **Курпа Л. В., Шматко Т. В.** Свободные колебания функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана // Теорет. и прикладная механика. 2014. Вып. 8(54). С. 77–85.
5. **Рвачев В. Л.** Теория R-функции и некоторые ее приложения. К.: Наукова думка, 1982. 552 с.
6. **Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhrtiari-Nejad F.** Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells // Journal of Sound and Vibration. - 2011. No 330. P.1432– 454.
7. **Chorfi S. M., Hourmat A.** Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures. 2010. No 92. P. 2573 – 2581.
8. **Iskanderov R. A., D. Hosseini Kaklar** Geometrical nonlinear vibrations of a moving fluid-contacting functionally graded cylindrical shell // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. Dnepropetrovsk: Lira. 2017. Vol.26. 168–174.
9. **Iskanderov R. A., D. Hosseini Kaklar** Geometrical nonlinear vibration of functionally –graded longitudinally strengthened and flowing fluid–contacting cylindrical shel // IJTPE Journal International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering. 2017. Vol. 9. Iss. 32. No 3. P. 44–52.
10. **Matsunaga H.** Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // Composite Structures. 2008. No 84. P. 132–146.
11. **Reddy J. N., Loy C. T., Lam K. Y.** Vibration of functionally graded cylindrical shells // Int J Mech Sci. 1999. Vol. 41. P.309–324.
12. **Reddy J. N.** Analysis of functionally graded plates // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. No 47. P. 663–684.
13. **Shen H. S.** Functionally Graded Materials of Plates Shells. Florida: CPC Press, 2009. 266 p.

УДК 539.3

Д. Хоссейни Каклар

КОЛИВАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ, ЩО КОНТАКТУЄ З В'ЯЗКОПРУЖНОЮ РІДИНОЮ

Розглянуті геометрично нелінійні коливання функціонально-градієнтної циліндричної оболонки, що контактує з в'язкопружною рідиною. За допомогою варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського визначення частоти коливань даної системи зведено до розв'язування системи диференціальних рівнянь. Рівняння руху в'язкопружної рідини отримано за допомогою векторного рівняння Нав'є – Стокса.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали, циліндрична оболонка, принцип Гамільтона – Остроградського, геометрично нелінійні коливання.

UDC 539.3

D. Hosseini Kaklar

VIBRATIONS OF A FUNCTIONALLY-GRADED CYLINDRICAL SHELL CONTACTING WITH VISCOUS-ELASTIC FLUID

In the paper we consider geometrically nonlinear vibrations of a functionally-gradient cylindrical shell contacting with viscous-elastic fluid. By means of the

Hamilton – Ostrogradskii variational principle, the definition of the frequency of vibrations of this system is reduced to the solution of the system of differential equations, that fulfilled numerically. The equation of motion of viscous-elastic fluid was obtained by means of the Navier – Stocks vector equation.

Keywords: *functionally-graded materials, cylindrical shell, Hamilton – Ostrogradsky principle, geometrically nonlinear vibrations.*

We consider a cylindrical shell made of the mixture of ceramics and metal and contacting with viscous-elastic fluid. Here, as in the paper [4] we accept the power law of change in volume fraction of the ceramics:

$$V = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k. \quad (1)$$

Here h is the shell thickness, k is the indicator of the degree of volume fraction of the material and can vary from 0 to infinity, i.e. $(0 \leq k \leq \infty)$. In addition, if $k = 0$, then the structure is fully ceramic, but if $k = \infty$, then metallic.

It is assumed that all mechanical and physical characteristics of the materials (the Young modulus, density, etc.) can be represented in the form [12, 13]:

$$P_j = P_0 \left(P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right),$$

where $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ are the coefficients defined for each specific material. The table of values of these coefficients for some materials was represented in [6, 12, 13]. Mechanical properties of the mixture of two constituents are defined in the following way:

$$P(z, T) = \left(P_c(T) - P_m(T) \right) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k + P_m(T). \quad (2)$$

Expression (2) is a general formula for defining the elasticity modulus E , the Poisson ratio ν and density of the composite ρ ; $P_c(T)$, $P_m(T)$ are corresponding characteristics of ceramics and metal.

The system of differential equations of a cylindrical composite shell contacting with viscous-elastic fluid, was obtained based on the Hamilton – Ostrogradsky stationarity action principle

$$\delta W = 0, \quad (3)$$

where $W = \int_{t'}^{t''} L dt$ is Hamilton's action, $L = U - T + A_0$ is Lagrange function,

t' and t'' are the given arbitrary moments of time. The potential and kinetic energies of the shell are written on the form:

Influence of viscous-elastic medium on the shell is determined in the form of external surface loads applied to the shell and is calculated as a work with negative signs of A_0 , performed by these loads when the surface of the shell is displaced. The components of pressure forces q_x, q_y, p are determined from the Navier – Stokes equations:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = -\text{grad } p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_0 a_*^2} \text{grad} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \bar{\mu} \nabla^2 \vec{g}, \quad (4)$$

where $\bar{\mu}$ is a dynamical viscosity factor, p is a pressure at some point of fluid, ρ_0 is fluid's density, a_* is sound velocity in fluid, ∇^2 is the Laplace operator, $\vec{g}$ is speed vector at arbitrary point of fluid.

The fluid motion equation (3) and fluid motion vector equation (4) are supplemented with contact and boundary conditions. The contact surface "shell-fluid" has the following boundary conditions ($r = R$):

$$g_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad g_y = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad g_z = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (5)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_y = -\sigma_{r\varphi}, \quad q_z = -p \quad (6)$$

The viscosity forces are determined by the equalities:

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\varphi} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial z} \right) \quad (7)$$

Then we consider hingely-supported shells, i. e. for $\xi = 0$ and $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 = L_1 / R$) the following boundary conditions are fulfilled:

$$g = w = 0, \quad T_1 = M_1 = 0, \quad (8)$$

where T_1, M_1 is a force and momentum acting in the cross section of the cylindrical shell.

The frequency equation of natural vibrations of a cylindrical functionally-graded shell with moving viscous-elastic fluid is obtained on the base of the Hamilton – Ostrogradskii stationarity action principle $\delta W = 0$ with regard to independence and arbitrariness of variations $\delta u, \delta v, \delta w$. Thus, the study of natural vibrations of a functionally graded cylindrical shell with viscous-elastic fluid-filled internal domain, reduces to integration of total energy of the given construction.

Solution of problem. By means of the continuity equation and state equation, the equation (4) reduces to the equation with respect to the pressure p , that has the form:

$$p = p_0 J_n(\lambda r) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \quad (9)$$

Here $\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2(1+i4\mu\omega/3\rho_0 a^2)}} - k^2$; p_0 is pressure amplitude; $J_n(\lambda r)$ is

first kind Bessel function of n -th order, $\frac{\partial p}{\partial \rho} = a^2$, a is sound speed in fluid.

Assume that $\vec{\mathfrak{G}}$ is of the form $\vec{\mathfrak{G}} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\Psi}$. Then, for determining φ and $\vec{\Psi}$ from the Navier – Stocks equation (4) we get

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{a^2\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \Delta\vec{\Psi} = \frac{1}{\vec{\mu}} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}. \quad (10)$$

If we accept φ in the form $\varphi = \varphi_*(r) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}$, then by the variation principle of a constant, allowing for expression (10), for φ we have

$$\varphi = \left(\frac{i\omega}{a^2\rho_0} p_0 f(r) + \mu_1 J_n(kr) \right) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \quad (11)$$

Here $f(r) = \left(J_n(kr) \int_0^R J_n(\lambda r) Y_n(kr) dr - Y_n(kr) \int_0^R J_n(\lambda r) J_n(kr) dr \right) \Delta^{-1}$;

$\Delta = J_n(kr) Y_n'(kr) - J_n'(kr) Y_n(kr)$; Y_n – is a second kind Bessel function of n -th order, μ_1 – is a constant.

If we accept $\psi_i = \psi_{*i}(r) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}$, then from the second equation in (10), we find:

$$\psi_i = \mu_2 J_n(qr) e^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \quad q = \sqrt{k^2 + i\omega/\vec{\mu}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Using (11) and (12) allowing for $\vec{\mathfrak{G}} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\vec{\Psi}$, we determine the speed components $\mathfrak{G}_x, \mathfrak{G}_y, \mathfrak{G}_z$ in fluid:

$$\mathfrak{G}_x = \left[ik \left(\frac{i\omega}{a^2\rho_0} p_0 f(r) + \mu_1 J_n(kr) \right) + \left(i \frac{n}{R} J_n(qr) - J_n'(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_y &= \left[in \left(\frac{i\omega}{a^2 \rho_0} p_0 f'(r) + \mu_1 J_n(kr) \right) + \left(J_n'(qr) - ik J_n(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)} \\ \vartheta_z &= \left[\frac{i\omega}{a^2 \rho_0} p_0 f'(r) + \mu_1 J_n'(kr) + i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}. \quad (13)\end{aligned}$$

Substituting (13) in (7), for tangential stresses we get the following expressions:

$$\begin{aligned}\sigma_{rx} &= \bar{\mu} \left[\frac{-2k\omega}{a^2 \rho_0} f'(r) p_0 + 2ik J_n'(kr) \mu_1 + \left(-k \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{in}{R} J_n'(qr) - J_n''(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}; \\ \sigma_{r\varphi} &= \bar{\mu} \left[-\frac{2n\omega}{a^2 R \rho_0} f'(r) p_0 + \frac{2in}{R} J_n'(kr) \mu_1 + \left(i \left(k - \frac{n}{R} \right) J_n(qr) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_n''(qr) - ik J_n'(qr) \right) \mu_2 \right] e^{i(kx+n\theta+\omega t)}.\end{aligned} \quad (14)$$

Substituting expressions (9) and (14) in contact condition (6), we can determine contact stresses q_x , q_y , q_z and simultaneously determine the work of A_0 , performed by these loads when the surface of the shell is displaced. We represent the displacements of the shell in the form

$$u = u_0 e^{i(kx+n\theta+\omega t)}; \quad \vartheta = \vartheta_0 e^{i(kx+n\theta+\omega t)}; \quad w = w_0 e^{i(kx+n\theta+\omega t)}, \quad (15)$$

where u_0, ϑ_0, w_0 are unknown constants, k, n is the number of waves along the generator and in peripheral direction of the cylindrical shell. Taking into account expressions (13) and (15) in contact condition (5), we can express the constants μ_1, μ_2, p_0 by u_0, ϑ_0, w_0 . Substituting (15) and (U, T, A_0) in (3), according to the Hamilton – Ostrogradsky stationarity of action principle, we find a second order polynomial expressed by the unknown constants u_0, ϑ_0, w_0 . Varying the obtained polynomial with respect to the constants u_0, ϑ_0, w_0 and equating to zero the coefficients of unknown variations we get homogenous system of equations. Equating to zero the principal determinant of the obtained system of equations, for determining the frequency of vibrations of a cylindrical shell contacting with viscous-elastic fluid, we find the equation

$$\det(a_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (16)$$

The roots of equation (16) are complex, whose parts correspond to the frequency of vibrations of the shell. Equation (16) is solved numerically.

Conclusions. With an increase in the volume fraction of ceramics k in the shell material, the linear frequency of the system decreases, taking into account the viscosity of the fluid, the natural oscillation frequency decreases the system.

REFERENCES

1. **Kurpa L. V., Shmatko T. V.** Studying geometrically nonlinear vibrations of functionally-graded shallow shells with complex plane-form // Vestnik Zaporozhskogo natsionalnogo universiteta 2015. No 1. P. 89–97. (in Russian).
2. **Kurpa L. V.** Nonlinear free vibrations of sandwich shells of symmetric structure with complex plan-form // Math. Met. and Phys.–Mech. fields. 2008. Vol.51. No 2. P. 75–85. (in Russian).
3. **Kurpa L. V.** The R –function method for solving linear problems of bending and vibrations of hollow shallow // Kharkov: NTU «KhPU», 2009. 408 p. (in Russian).
4. **Kurpa L. V., Shmatko T. V.** Free vibrations of functionally graded shells with complex form-plane // Teoret. i prikl. mechanika. 2014. –Iss. 8 (54). P. 77–85/(in Russian).
5. **Rvachev V. R.** Theory of R-function and some applications. Kiev: Naukova Dumka, 1982. 552 p. (in Russian).
6. **Alijani F., Amabili M., Karagiozis K., Bakhrtiari-Nejad F.** Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells // Journal of Sound and Vibration. - 2011. No 330. P.1432– 454.
7. **Chorfi S. M., Houmat A.** Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures. 2010. No 92. P. 2573 – 2581.
8. **Iskanderov R. A., D. Hosseini Kaklar** Geometrical nonlinear vibrations of a moving fluid-contacting functionally graded cylindrical shell // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures. Dnepropetrovsk: Lira. 2017. Vol.26. 168–174.
9. **Iskanderov R. A., D. Hosseini Kaklar** Geometrical nonlinear vibration of functionally –graded longitudinally strengthened and flowing fluid–contacting cylindrical shell // IJTPE Journal International Journal on Technical and Physical Problems of Engineering. 2017. Vol. 9. Iss. 32. No 3. P. 44–52.
10. **Matsunaga H.** Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory // Composite Structures. 2008. No 84. P. 132–146.
11. **Reddy J. N., Loy C. T., Lam K. Y.** Vibration of functionally graded cylindrical shells // Int J Mech Sci. 1999. Vol. 41. P.309–324.
12. **Reddy J. N.** Analysis of functionally graded plates // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 2000. No 47. P. 663–684.
13. **Shen H. S.** Functionally Graded Materials of Plates Shells. Florida: CPC Press, 2009. 266 p.

*Азербайджанський
архітектурно-будівельний університет,
Баку, Азербайджан*

Надійшла до редакції 07.10.2018