УДК 539.3

¹П. Г. Дегтяренко, ²В. З. Грищак, д-р техн. наук,
²Н. Н. Дьяченко, канд. физ.-мат. наук

К РАСЧЕТУ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОМБИНИРОВАННОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ КОНСТРУКЦИИ С УЧЕТОМ ДИСКРЕТНОСТИ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ШПАНГООТОВ

Изучается устойчивость нагруженной внешним давлением оболочечной конструкции, состоящей из сопряженных цилиндрических и конических отсеков, подкрепленных дискретно расположенными шпангоутами. Цилиндрические отсеки выбираются постоянной толщины, конические – линейно переменной. Устойчивость составной подкрепленной конструкции и отдельных ее частей определяется с помощью матричного метода. Особое внимание уделяется поиску параметров равноустойчивости пролетов подкрепленной конструкции, в том числе выбору рациональных жесткостей шпангоутов, обеспечивающих равноустойчивость локальных и общих (с захватом шпангоутов) форм выпучивания.

Ключевые слова: устойчивость оболочки, цилиндрический и конический отсеки составной оболочечной конструкции, подкрепленная оболочка, жесткость шпангоута, равноустойчивость, локальные и общие формы выпучивания.

Введение. Задача устойчивости конических оболочечных конструкций продиктована потребностями инженерной практики, в частности, ракетостроения.

Устойчивость цилиндрических оболочек исследована, в частности, в [2, 4, 7], конических – в [1 – 3, 5, 6, 8, 9] с помощью аналитических и численных методов.

В данной работе применяется метод начальных параметров [4, 8] в матричной форме для получения изменения напряженно-деформированного состояния при переходе через шпангоут. Метод использует нормальную фундаментальную матрицу функций разрешающего обыкновенного дифференциального уравнения устойчивости пролета и матрицу преобразования напряженно-деформированного состояния при переходе через шпангоут. При этом учитывается как жесткость шпангоута в плоскости начальной кривизны, так и жесткость из плоскости. С учетом заданных граничных условий характеристическое уравнение для определения критических усилий получается выделением соответствующего минора матрицы, полученной последовательным произведением указанных матриц.

Проблема равноустойчивости подкрепленных конических, вафельных цилиндрических конструкций изучалась, в частности, в [2, 6, 8].

Следует отметить работы [10, 11], в которых расчет на устойчивость составных оболочечных конструкций при изгибе и внутреннем давлении проводится на основе численных методов без учета локальной равноустойчивости ее отсеков. Актуальной является проблема равноустойчивости для случая составных оболочечных структур с дискретно расположенными шпангоутами.

В данной работе предложен аналитический подход к расчету устойчивости составных конструкций при внешнем давлении с учетом дискретности расположения промежуточных шпангоутов. Особое внимание уделено поиску жесткостей шпангоутов, обеспечивающих равноустойчивость по отношению к локальным и общим формам выпучивания составной конструкции типа «цилиндр-конус».

Постановка задачи. Рассматривается упругая оболочечная конструкция кругового сечения, подкреплённая шпангоутами (рис. 1). Предполагается, что цилиндрические отсеки конструкции имеют постоянную толщину h_{cyl} , а конические – линейно переменную: $h_{cone} = s \cdot h_{cone}^0 / l_0$. Предполагается, что конструкция имеет одинаковые механические характеристики отсеков. Решается задача устойчивости составной конструкции, подверженной внешнему давлению q . При этом считается, что подкрепляющие шпангоуты имеют жесткость на изгиб, как в плоскости начальной кривизны, так и из нее, а волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном. Для оболочек средней длины число волн n в окружном направлении таково, что $n^2 \gg 1$.

Рис. 1 – Схемы оболочечных конструкций

Метод решения. *Цилиндрический пролет оболочки.* Уравнение относительно функции радиальных перемещений $w_{cyl}(\bar{s}, y)$ точек пролета цилиндрической оболочки при условии $\sqrt{h_{cyl}/R} < L/R < \sqrt{R/h_{cyl}}$ имеет вид [2]

$$\frac{D}{h_{cyl}} \nabla^8 w_{cyl} + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w_{cyl}}{\partial \bar{s}^4} + p_y \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w_{cyl}}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\bar{s}$ и y – координаты вдоль образующей и дуги цилиндрической оболочки соответственно; R – радиус оболочки; $C = Eh_{cyl}$, $D = E(h_{cyl})^3 / [12(1 - \nu^2)]$ – жесткости обшивки на растяжение-сжатие и изгиб соответственно.

Напряжение в (1) представляется в виде $p_y = qR/h_{cyl}$. Вводятся безразмерные координаты $\bar{x} = \bar{s}/L$, $\bar{\varphi} = y/R$, параметры $K = L/R$, $\varepsilon_1 = h_{cyl}/R$ и усилие

$$\chi_{cyl} = \frac{qR^2}{E(h_{cyl})^2}, \quad (2)$$

функция радиальных перемещений в форме

$$w_{cyl}(\bar{x}, \bar{\varphi}) = W_{cyl}(\bar{x}) \cdot \cos(n\bar{\varphi}). \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) из уравнения (1) для тонких оболочек средней длины при $K^2 > 1$, $n^2 \gg 1$, $\varepsilon_1 \ll 1$ дифференциальное уравнение основного напряженного состояния относительно функции прогиба цилиндрической оболочки представимо в виде:

$$aW_{cyl}^{(4)}(\bar{x}) + bW_{cyl}''(\bar{x}) + cW_{cyl}(\bar{x}) = 0, \quad (4)$$

где

$$a = \frac{1}{K^4} \left[-\chi_{cyl} + \frac{6\varepsilon_1 n^2}{\omega} + \frac{1}{\varepsilon_1 n^2} \right]; \quad b = \frac{2n^2}{K^2} \left[\chi_{cyl} - \frac{2\varepsilon_1 n^2}{\omega} \right];$$

$$c = n^4 \left[\frac{\varepsilon_1 n^2}{\omega} - \chi_{cyl} \right]; \quad \omega = 12(1 - \nu^2).$$

Уравнение (4) является разрешающим для исследования на устойчивость цилиндрического пролета оболочки, общим решением которого является функция (аналогично [4])

$$W_{cyl}(\bar{x}) = W_{cyl}(\bar{x}_k) \psi_{cyl,1}(\bar{x}) + W'_{cyl}(\bar{x}_k) \psi_{cyl,2}(\bar{x}) +$$

$$+ W''_{cyl}(\bar{x}_k) \psi_{cyl,3}(\bar{x}) + W'''_{cyl}(\bar{x}_k) \psi_{cyl,4}(\bar{x}), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Psi_{cyl,1}(\bar{x}) &= \frac{\beta_2^2 ch \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) + \beta_1^2 \cos \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{\beta_2^2 + \beta_1^2}; \\
 \Psi_{cyl,2}(\bar{x}) &= \frac{\beta_2^3 sh \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) + \beta_1^3 \sin \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2}; \\
 \Psi_{cyl,3}(\bar{x}) &= \frac{ch \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) - \cos \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{\beta_2^2 + \beta_1^2}; \\
 \Psi_{cyl,4}(\bar{x}) &= \frac{\beta_2 sh \beta_1 (\bar{x} - \bar{x}_k) - \beta_1 \sin \beta_2 (\bar{x} - \bar{x}_k)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2}; \quad \beta_{1,2} = \sqrt{\frac{\mp b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Матричное уравнение пролета цилиндрической оболочки в точках $\bar{x} \in [\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}]$, $k \in \{0, 1, \dots, m_{cyl}\}$ представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} W_{cyl}(\bar{x}) \\ W'_{cyl}(\bar{x}) \\ W''_{cyl}(\bar{x}) \\ W'''_{cyl}(\bar{x}) \end{pmatrix} = A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}) \cdot \begin{pmatrix} W_{cyl}(\bar{x}_k) \\ W'_{cyl}(\bar{x}_k) \\ W''_{cyl}(\bar{x}_k) \\ W'''_{cyl}(\bar{x}_k) \end{pmatrix},$$

$$A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}) = \begin{pmatrix} \Psi_{cyl,1} & \Psi_{cyl,2} & \Psi_{cyl,3} & \Psi_{cyl,4} \\ \Psi'_{cyl,1} & \Psi'_{cyl,2} & \Psi'_{cyl,3} & \Psi'_{cyl,4} \\ \Psi''_{cyl,1} & \Psi''_{cyl,2} & \Psi''_{cyl,3} & \Psi''_{cyl,4} \\ \Psi'''_{cyl,1} & \Psi'''_{cyl,2} & \Psi'''_{cyl,3} & \Psi'''_{cyl,4} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Элементы матрицы $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x})$ определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
 \Psi'_{cyl,1} &= -\frac{c}{a} \Psi_{cyl,4}; \quad \Psi'_{cyl,2} = \Psi_{cyl,1}; \quad \Psi'_{cyl,3} = \Psi_{cyl,2} - \frac{b}{a} \Psi_{cyl,4}; \\
 \Psi'_{cyl,4} &= \Psi_{cyl,3}; \quad \Psi''_{cyl,1} = -\frac{c}{a} \Psi_{cyl,3}; \quad \Psi''_{cyl,2} = -\frac{c}{a} \Psi_{cyl,4}; \\
 \Psi''_{cyl,3} &= \Psi_{cyl,1} - \frac{b}{a} \Psi_{cyl,3}; \quad \Psi''_{cyl,4} = \Psi_{cyl,2} - \frac{b}{a} \Psi_{cyl,4};
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\Psi_{cyl,1}''' = -\frac{c}{a} \left(\Psi_{cyl,2} - \frac{b}{a} \Psi_{cyl,4} \right); \quad \Psi_{cyl,2}''' = -\frac{c}{a} \Psi_{cyl,3};$$

$$\Psi_{cyl,3}''' = \frac{b^2 - ac}{a^2} \Psi_{cyl,4} - \frac{b}{a} \Psi_{cyl,2}; \quad \Psi_{cyl,4}''' = \Psi_{cyl,1} - \frac{b}{a} \Psi_{cyl,3}.$$

Матрица $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x})$, удовлетворяющая соотношениям (8), является нормальной фундаментальной со свойством $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_k) = \Xi$, где Ξ – единичная матрица. Заметим, что если цилиндрическая оболочка имеет фиксированное значение ε_1 , то матрицы $A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$ равны для пролетов одинаковой длины. Для такой матрицы используется обозначение $A_{cyl}(\bar{L}_k) = A_{cyl}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+1})$, где $\bar{L}_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$. При этом направление отсчета совпадает с направлением оси $\bar{s}$ (рис. 1).

Конический пролет оболочки. В соответствии с рис. 1 вводятся следующие обозначения: α – угол при основании конуса, s – расстояние по образующей конуса от вершины до точки срединной поверхности, l_0 и l_1 – расстояния до меньшего и большего оснований соответственно, $x = s/l_1$, φ – угол между аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета. Будем предполагать, что i -й пролет характеризуется координатой $x \in [x_i; x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m_{cone}$).

В [2] получена полная система дифференциальных уравнений в частных производных, характеризующая равновесие элемента конической оболочки и уравнение совместности деформаций до потери устойчивости. В случае воздействия на оболочку внешнего давления функция радиальных перемещений и функция усилий представлены в виде [2]:

$$w_{cone}(x, \varphi) = W_{cone}(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(n\varphi); \quad (9)$$

$$f_{cone}(x, \varphi) = \Phi_{cone}(x) \varepsilon^2 l_1 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(n\varphi),$$

где $\varepsilon = \frac{h_{cone} \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-\nu^2)}}$, введены безразмерные параметры $\delta = \frac{n^2}{\cos^2 \alpha}$,

$p = \varepsilon \delta$ и безразмерное усилие $\chi_{cone} = \frac{q^* l_1}{E h_{cone} \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}$. Для данной за-

дачи $q^* = q \cdot \sin \alpha$.

После ряда преобразований, в том числе исключения достаточно малых слагаемых, в [2] получено дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами относительно функции прогиба $W_{cone}(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 W_{cone}}{dx^2} \right) + \left(\frac{p^4}{x^3} - \chi_{cone} p^3 \right) W_{cone} = 0. \quad (10)$$

С учетом линейной зависимости для толщины конического пролета оболочки уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 W_{cone}}{dx^2} \right) - \frac{\gamma}{x} W_{cone} = 0, \quad (11)$$

где $\gamma = q^* \frac{l_0 n^6}{E h_{cone}^0 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha} - \frac{h_{cone}^0 n^8}{12(1-\nu^2) l_0^2 \cos^6 \alpha \sin^2 \alpha}$.

Уравнение (11) путем замены $x = e^t$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 W_{cone}}{dt^4} - \frac{d^2 W_{cone}}{dt^2} - \gamma W_{cone} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, при $\gamma > 0$ решение уравнения (11) имеет вид:

$$W_{cone}(t) = W_{cone}(t_i) \Psi_{cone,1}(t) + W'_{cone}(t_i) \Psi_{cone,2}(t) + \\ + W''_{cone}(t_i) \Psi_{cone,3}(t) + W'''_{cone}(t_i) \Psi_{cone,4}(t), \quad (13)$$

где фундаментальные функции $\Psi_{cone,j}(t)$, $j = \overline{1,4}$ получаются аналогично [8]:

$$\Psi_{cone,1}(t) = \frac{\beta_2^2 ch \beta_1(t-t_i) + \beta_1^2 \cos \beta_2(t-t_i)}{\beta_2^2 + \beta_1^2}; \quad (14)$$

$$\Psi_{cone,2}(t) = \frac{\beta_2^3 sh \beta_1(t-t_i) + \beta_1^3 \sin \beta_2(t-t_i)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2};$$

$$\Psi_{cone,3}(t) = \frac{ch \beta_1(t-t_i) - \cos \beta_2(t-t_i)}{\beta_2^2 + \beta_1^2};$$

$$\Psi_{cone,4}(t) = \frac{\beta_2 sh \beta_1(t-t_i) - \beta_1 \sin \beta_2(t-t_i)}{(\beta_2^2 + \beta_1^2) \beta_1 \beta_2}; \quad \beta_{1,2} = \sqrt{\pm 0,5 + \sqrt{0,25 + \gamma}},$$

при этом матричное уравнение пролета конической оболочки с матрицей

$$A_{cone}(t_i, t) = \begin{pmatrix} \Psi_{cone,1} & \Psi_{cone,2} & \Psi_{cone,3} & \Psi_{cone,4} \\ \Psi'_{cone,1} & \Psi'_{cone,2} & \Psi'_{cone,3} & \Psi'_{cone,4} \\ \Psi''_{cone,1} & \Psi''_{cone,2} & \Psi''_{cone,3} & \Psi''_{cone,4} \\ \Psi'''_{cone,1} & \Psi'''_{cone,2} & \Psi'''_{cone,3} & \Psi'''_{cone,4} \end{pmatrix} \quad (15)$$

имеет вид, аналогичный (7), (8).

Заметим, что если коническая оболочка имеет фиксированное значение угла конусности α , то матрицы $A_{cone}(t_i, t_{i+1})$ равны для ее пролетов с одинаковым значением $t_i - t_{i+1} = \ln x_i / x_{i+1}$. Для такой матрицы используется обозначение $A_{cone}(\xi_i) = A_{cone}(t_i, t_{i+1})$, где $\xi_i = \ln x_i / x_{i+1}$.

Фундаментальная матрица $A_{cone}(t_i, t)$, заданная через соотношения (14) и (15), на большем основании имеет свойство: $A_{cone}(0) = A_{cone}(t_i, t_i) = \Xi$. В связи с этим, на конической части конструкции использование метода начального параметра возможно при отсчете по направлению от большего основания к меньшему, что соответствует противоположному направлению оси s .

Изменение напряженно-деформированного состояния конструкции при переходе через шпангоут. В [4] получена матрица, характеризующая преобразование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при переходе через промежуточный k -й шпангоут

$$B_{cyl,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cyl,2}^k & 1 & 0 \\ -G_{cyl,1}^k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $G_{cyl,1}^k = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{xk}}{CR^3}$; $G_{cyl,2}^k = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{zk}}{C(n^2 + 1)R^3}$ – безразмер-

ные жесткости k -го шпангоута на цилиндрической оболочке; J_{xk} , J_{zk} – моменты инерции соответственно при изгибе шпангоута в плоскости начальной кривизны и из плоскости; $(GJ)_{tors,k}$ – крутильная жесткость.

Матрица преобразования напряженно-деформированного состояния при переходе через i -й шпангоут, расположенный на конической оболочке, имеет вид [4, 8]

$$B_{cone,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{cone,2}^i & 1 & 0 \\ -G_{cone,1}^i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где $G_{cone,1}^i = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{xi} r_0}{C r_i^4 \cos^3 \alpha}$, $G_{cone,2}^i = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{zi} r_0}{C (n^2 + 1) r_i^4}$ – без-

размерные жесткости i -го шпангоута радиуса r_i , подкрепляющего коническую оболочку; r_0 – радиус меньшего основания усеченного конуса.

Рассмотрим j -й пролет цилиндрической или конической оболочки $[x_j, x_{j+1}]$ ($j \in \{0, 1, \dots, m\}$) с матрицей A_j и $(j+1)$ -й шпангоут, соответствующий координате x_{j+1} , с матрицей B_{j+1} . Имеет место [4, 5, 8] связь между векторами перемещений и их производными справа и слева от $(j+1)$ -го шпангоута:

$$B_{j+1} \cdot A_j \cdot \begin{pmatrix} W(x_j) \\ W'(x_j) \\ W''(x_j) \\ W'''(x_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_-(x_{j+1}) \\ W'_-(x_{j+1}) \\ G_2 W'_-(x_{j+1}) + W''_-(x_{j+1}) \\ -G_1 W_-(x_{j+1}) + W'''_-(x_{j+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_+(x_{j+1}) \\ W'_+(x_{j+1}) \\ W''_+(x_{j+1}) \\ W'''_+(x_{j+1}) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Нормальная фундаментальная матрица обладает свойством сдвига. Поэтому, с учетом направлений отсчета, в силу (20), матрица-произведение

$$H = A_m \cdot B_m \cdot A_{m-1} \cdot B_{m-1} \cdot \dots \cdot B_2 \cdot A_1 \cdot B_1 \cdot A_0 \quad (21)$$

задает изменение напряженно-деформированного состояния конструкции, содержащей m шпангоутов [4, 8]. В произведении матриц, представленных в соотношении (21), A_i ($i = 0, \dots, m$) – матрица пролета цилиндрической или конической оболочки.

Для матрицы-произведения (21) следует учитывать следующие требования:

А. В случае, когда шпангоут находится на торце, соответствующую матрицу, предшествующую или последующую за шпангоутом, необходимо выбирать для оболочки нулевой длины [4] с соответствующим краевым условием свободного торца.

В. Поскольку направление оси s и направление отсчета для фундаментальной матрицы конической оболочки противоположны, то жест-

кости шпангоутов на ее отсеках следует брать с противоположными знаками.

С. Матрица пролета конической оболочки не преобразуется, если она ориентирована большим основанием к предшествующему структурному элементу (шпангоуту или пролету оболочки).

Если x – безразмерная координата точки, лежащей за m -м шпангоутом, а $[W(x)] = (W(x), W'(x), W''(x), W'''(x))^t$, то

$$[W(x)] = H \cdot [W(0)], \quad (22)$$

где $H = \{h_{ij}\}$ – матрица, заданная произведением вида (21).

Характеристическое уравнение устойчивости подкрепленной оболочечной конструкции. Трансцендентное уравнение для определения критического давления q можно получить для соответствующих граничных условий, исходя из (22). Рассмотрим, например, случай незакрепленных обоих торцов конструкции. Тогда уравнение (22) примет вид [4,8]:

$$\begin{pmatrix} W(x) \\ W'(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} W(0) \\ W'(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получается однородная система, имеющая ненулевое решение при условии, что ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} h_{3,1} & h_{3,2} \\ h_{4,1} & h_{4,2} \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) является характеристическим для поиска критического давления, которое выбирается как наименьшее решение этого уравнения по числу волн в окружном направлении.

Численные расчеты. Методика определения жесткостей шпангоутов для обеспечения равноустойчивости конической и цилиндрической частей составной оболочки.

1. Для описания общих закономерностей по устойчивости подкрепленных цилиндрических и конических отсеков определяются геометрические параметры цилиндрической и конической неподкрепленных шарнирно опертых оболочек, которые имеют близкие по значениям критические давления. Такими свойствами обладают оболочки с характеристиками: $E = 70 \text{ ГПа}$, $\nu = 0,32$; коническая – линейно переменной

толщины $h_{cone} = s \cdot h_{cone}^1 / l_1$, с параметрами $l_1 / h_{cone}^1 = 606,67$, $l_0 / l_1 = 0,55$, $\alpha = 75^\circ$; цилиндрическая – с параметрами $R = l_1 \cos \alpha$,

$h_{cyl}/R = h_{cone}^1/(l_1 \cos \alpha)$. Выбранная таким образом неподкрепленная цилиндрическая оболочка при $L = 2,39R$ имеет критическое давление $q_1 = 87,703 \text{ КПа}$, а коническая – $q_2 = 85,127 \text{ КПа}$.

2. Жесткости шпангоутов, расположенных на конической оболочке, представляются в виде

$$G_{cone,1}^i = \frac{l_1^3 l_0}{l_i^4 \cos^3 \alpha} \cdot G_{1,i}^*, \quad G_{cone,2}^i = \frac{l_1^3 l_0}{l_i^4} \cdot G_{2,i}^*, \quad (24)$$

$$\text{где } G_{1,i}^* = \frac{n^4 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{xi}}{R^3 C \cos^3 \alpha}, \quad G_{2,i}^* = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2 (EJ)_{zi}}{C (n^2 + \kappa_i) R^3}.$$

В работе исследуются такие конструкции, что коническая и цилиндрическая оболочки подкреплены шпангоутами, которые имеют равные значения каждого параметра жесткости $G_{cyl,1}^k = G_{cyl,1}$, $G_{cyl,2}^k = G_{cyl,2}$,

$G_{1,i}^* = G_{cone,1}^*$ и $G_{2,i}^* = G_{cone,2}^*$ для всех k и i соответственно.

3. *Устойчивость подкрепленных конической и цилиндрической оболочек.* На этом этапе рассматривается коническая оболочка со шпангоутами на торцах, а цилиндрическая – с торцевыми и промежуточными шпангоутами. Из-за наличия торцевых шпангоутов, выбираются граничные условия, соответствующие свободным торцам.

На рис. 2,а представлены графики зависимостей критического давления $q_{cr} \left[\text{кгс/см}^2 \right]$ локальной потери устойчивости оболочек от жесткостей $G_{cone,1}^*$ и $G_{cyl,1}$ соответственно, для разных значений $G_{cone,2}^*$ и $G_{cyl,2}$. Штриховым линиям отвечают зависимости для конической части, сплошным – цилиндрической с двумя шпангоутами, штрихпунктирной – с тремя.

В рассматриваемых случаях с увеличением жесткости шпангоутов критическое давление стабилизируется на близких значениях, как для конической, так и для цилиндрической оболочек лишь в случае подкрепления парой шпангоутов. Цилиндрическая оболочка с тремя достаточно жесткими шпангоутами теряет устойчивость при давлениях, значительно превышающих критические давления подкрепленной двумя шпангоутами конической оболочки. Поэтому в случае подкрепления конуса двумя шпангоутами, целесообразно выбирать подкрепление цилиндра торцевыми шпангоутами со значениями жесткости того же порядка, либо тремя шпангоутами небольшой жесткости. По графикам можно согласовать значения жесткостей, обеспечивающих одинаковые значения критических давлений. В табл. 1 указаны несколько согласо-

ванных значений жесткостей подкрепления, обеспечивающих локальную равноустойчивость конической и цилиндрической частей конструкции.

Рис. 2 – Сравнение зависимостей критических давлений локальной потери устойчивости конических и цилиндрических отсеков от жесткости шпангоутов (при $L = 2,39R_{cyl}$)

4. *Случай размещения на коническом отсеке трех шпангоутов, два из которых расположены на торцах.* Первоначально необходимо выбрать наиболее рациональное (с точки зрения локальной равноустойчивости) расположение промежуточного шпангоута на конусе. При данных геометрических характеристиках конуса и жесткостей шпангоутов, представленных соотношениями (24), рациональным является расположение шпангоута, которое делит образующую в отношении 1,174:1, отсчитывая от большего основания конуса. На рис. 2,б построены зависимости критических давлений «левой» и «правой» частей конического отсека от жесткости в плоскости $G_{cone,1}^*$ при фиксированном значении параметра $G_{cone,2}^* = 10$. Построенные зависимости для отдельных пролетов конуса указывают на удовлетворительное согласование по их критическим давлениям, что свидетельствует о правильности выбора расположения промежуточного шпангоута.

На рис. 2,б даны зависимости критических давлений также цилиндрического отсека от жесткости $G_{cyl,1}$ при $G_{cyl,2} = 10$ для подкрепления его тремя и четырьмя шпангоутами. Приведенные зависимости позволяют подобрать согласованные значения жесткостей, обеспечивающих локальную равноустойчивость конического и цилиндрического отсеков. Эти значения приведены в табл. 2. Здесь и далее

$$G_{cone,2}^* = G_{cyl,2} = G_2, \quad L = K \cdot R.$$

Таблица 1 – Локальная и общая устойчивость оболочечных конструкций с двумя шпангоутами на коническом отсеке

Обеспечение Локальной равноустойчивости			Общая устойчивость оболочечных конструкций
$K = 2,39$			$K = 2,39$ $K = 2,39$ «Структура 1»	$K = 2,39$ $K = 2,39$ «Структура 2»
G_2	$G_{cone,1}^*$	$G_{cyl,1}$	q_{cr}	q_{cr}	q_{cr}
0	100	877	0,910567 ($n = 6$)	0,887407 ($n = 7$)	0,860265 ($n = 6$)
$q_{cr} = 0,9105$ ($n = 6$)					
10	100	656	1,147953 ($n = 7$)	1,120358 ($n = 7$)	1,165825 ($n = 7$)
$q_{cr} = 1,1563$ ($n = 7$)
$K = 2,39$
G_2	$G_{cone,1}^*$	$G_{cyl,1}$	q_{cr}	q_{cr}	q_{cr}
0	100	38,8	0,743748 ($n = 6$)	0,727804 ($n = 6$)	0,715681 ($n = 6$)
$q_{cr} = 0,9105$ ($n = 6$)					
10	100	102,1	1,140889 ($n = 7$)	1,119375 ($n = 7$)	1,106529 ($n = 7$)
$q_{cr} = 1,1563$ ($n = 7$)					

5. Расчет критических давлений составных конструкций типа «цилиндр-конус», «цилиндр-конус-цилиндр-конус».

5.1. Оболочка типа «цилиндр-конус» из табл. 1 и табл. 2.

Для конических и цилиндрических оболочек заданных геометрических размеров с количеством шпангоутов, которое указано в индексе матрицы-произведения вида (21), имеем:

$$\begin{aligned}
 H_{cone,2} &= \Xi \cdot B_{cone,1} \cdot A_{cone} (\ln 0,55) \cdot B_{cone,2} \cdot \Xi, \\
 H_{cone,3} &= \Xi \cdot B_{cone,1} \cdot A_{cone} (\ln 0,7265) \cdot B_{cone,2} \cdot A_{cone} (\ln 0,757) \cdot B_{cone,3} \cdot \Xi, \\
 H_{cyl,m_{cyl}} &= \Xi \cdot B_{cyl} \cdot A_{cyl} (\bar{L}_{m_{cyl}}) B_{cyl} \cdot A_{cyl} (\bar{L}_{m_{cyl}-1}) \cdot \dots \cdot A_{cyl} (\bar{L}_1) \cdot B_{cyl} \cdot \Xi. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Приняты равные по длине пролеты на цилиндре, то есть $\bar{L}_k = 1/(m_{cyl} - 1)$ для всех $k = 1, \dots, m_{cyl}$ ($m_{cyl} \geq 2$).

В случае конструкций «цилиндр-конус», представленных в таблицах, соответствующие матрицы имеют вид:

$$H_{cyl-cone} = H_{cone,m_{cone}} \cdot H_{cyl,m_{cyl}}. \quad (26)$$

Таблица 2 – Локальная и общая устойчивость оболочечных конструкций с тремя шпангоутами на коническом отсеке

	Обеспечение равноустойчивости пролетов конической оболочки				Обеспечение равноустойчивости цилиндрической и конической частей		
	Левая часть конуса (54% от длины образующей)		Правая часть конуса (46% от длины образующей)			$K = 2,39$	
G_2	$G_{cone,1}^*$	q_{cr}	$G_{cone,1}^*$	q_{cr}	q_{cr}	$G_{cyl,1}$	q_{cr}
10	22,36	1,346862 ($n = 8$)	10	1,346832 ($n = 8$)	1,345212 ($n = 8$)	186,51	1,345215 ($n = 8$)
10	686,1	1,978115 ($n = 10$)	1000	1,978119 ($n = 10$)	1,974037 ($n = 10$)	1211,37	1,974037 ($n = 9$)

Локально равноустойчивые отсеки		Общая устойчивость оболочечных конструкций			
$L_1 : L_2 = 1,174 :$			$K = 2,39$ $K = 2,39$		$K = 2,39$ $K = 2,39$
G_2	$G_{cone,1}^*$	$G_{cyl,1}$	q_{cr}	q_{cr}	q_{cr}
10	22,36 10	186,51	1,269103 ($n = 7$)	1,265668 ($n = 7$)	1,268538 ($n = 7$)
10	686,1 1000	1211,37	1,929986 ($n = 9$)	1,751094 ($n = 9$)	1,766448 ($n = 9$)
$L_1 : L_2 = 1,174 :$
G_2	$G_{cone,1}^*$	$G_{cyl,1}$	q_{cr}	q_{cr}	q_{cr}
10	22,36 10	126,68	1,322804 ($n = 7$)	1,299376 ($n = 7$)	1,304612 ($n = 7$)
10	686,1 1000	644,66	1,955186 ($n = 9$)	1,702499 ($n = 9$)	1,948229 ($n = 9$)

5.2. Оболочка «цилиндр – конус – цилиндр – конус» структуры («структура 1»), в которой ориентировка конуса не изменяется при сопряжении двух конструкций «цилиндр-конус». При этом в конусных отсеках угол конусности α и отношение l_0/l_1 сохраняются, а в цилиндрических отсеках – отношение h_{cyl}/R . Поэтому матрицы, заданные соотношениями (25) и (26), остаются одинаковыми для обеих частей, а матрица-произведение записывается в форме

$$H_{cyl-cone-cyl-cone}^1 = H_{cyl-cone} \cdot H_{cyl-cone} \cdot$$

5.3. «Структура 2» содержит противоположно ориентированные конусы. Такая конструкция не удовлетворяет требованию С. Поэтому предварительно рассматривается вспомогательная конструкция, изображенная на рис. 3. Для нее матрица-произведение имеет вид

Рис. 3 – Вспомогательная конструкция

$$H_{cone-cyl} = H_{cyl, m_{cyl}} \cdot H_{cone, m_{cone}}.$$

Следует учесть, что в сопряжении «структуры 2» участвует противоположно ориентированная часть конструкции рис. 3, к тому же, эта конструкция предшествует цилиндрическому отсеку, что не противоречит требованию С. Таким образом, «структура 2» обладает матрицей

$$H_{cyl-cone-cyl-cone}^2 = H_{cyl-cone} \cdot (H_{cone-cyl})^{-1}.$$

5.4. Значения критических давлений для конструкций типа «цилиндр-конус», «цилиндр – конус – цилиндр – конус» в двух случаях «структуры 1» и «структуры 2» приведены в табл. 1 и табл. 2.

6. Конструкции, один из цилиндрических отсеков которой имеет значение $K = 5$, $K = 10$.

Все этапы расчетных исследований повторяют описанную выше методику. На рис. 4 представлены зависимости критических давлений конических и цилиндрических отсеков с указанным на рисунке количеством шпангоутов.

Рис. 4 – Сравнение зависимостей критических давлений потри устойчивости конических и цилиндрических отсеков от жесткости шпангоутов (при $L = 5R_{cyl}$)

В табл. 3 приведены расчетные данные по критическим давлениям оболочечных структур, изображенных в ней. Заметим, что для того цилиндрического отсека, у которого $K = 10$, центральный шпангоут выбирался с удвоенными жесткостями.

Таблица 3 – Локальная и общая устойчивость оболочечной конструкции с двумя и тремя шпангоутами на коническом отсеке, с различными значениями параметра K на цилиндрических отсеках

$K = 2,39$	$K = 5$	$K = 5$ $K = 2,39$
$G_{cone,1}^*$	$G_{cyl,1}$	$G_{cyl,1}$	q_{cr}
100	656	1809,7	1,145968 ($n = 7$)
$q_{cr} = 1,1563$ ($n = 7$)
$K = 2,39$	$K = 5$	$K = 5$ $K = 2,39$	
$q_{cr} = 1,147953$ ($n = 7$)	$q_{cr} = 1,153429$ ($n = 7$)	$q_{cr} = 1,140929$ ($n = 7$)	
$L_1 : L_2 =$ $= 1,174 : 1$	$K = 2,39$	$K = 5$	$K = 5$ $K = 2,39$
$G_{cone,1}^*$	$G_{cyl,1}$	$G_{cyl,1}$	q_{cr}
22,36 10	126,68	2274,3	1,304172 ($n = 8$)
$q_{cr} = 1,3452$ ($n = 8$)
$K = 2,39$	$K = 5$	$K = 5$ $K = 2,39$	
$q_{cr} = 1,322804$ ($n = 7$)	$q_{cr} = 1,331846$ ($n = 8$)	1,322544 ($n = 8$)
$K = 10$		$K = 10$ $K = 2,39$	
$q_{cr} = 1,327226$ ($n = 8$)		$q_{cr} = 1,336687$ ($n = 8$)	

Для оболочек с выбранными характеристиками, результаты расчетов показывают, что критические давления равноустойчивой конструкции типа «цилиндр – конус», соответствующие общей потере устойчивости, меньше, чем локальной до 19%. При этом увеличение общей длины конструкции за счет включения в нее дополнительных отсеков

(для получения конструкций типа «цилиндр – конус – цилиндр – конус») приводит к уменьшению критического давления до 6%.

Следует отметить, что проблема устойчивости цилиндрической оболочки постоянной толщины или конической оболочки линейно переменной толщины с различными типами граничных условий при воздействии нормального внешнего давления исследовалась в [2, 5, 8], где результаты были найдены аналитическими и численными методами. Результаты, полученные в данной работе для соответствующих граничных условий, отличались от указанных менее чем на 3%. Задача устойчивости подкрепленной цилиндрической или конической оболочки под воздействием нормального внешнего давления представлена в [4, 5, 8]. Расчеты, проведенные для тех же механических и геометрических характеристик оболочек, граничных условий, количеством и расположением шпангоутов, что и в [4, 5, 8], показали достаточно хорошую корреляцию.

Выводы. Представлен алгоритм расчёта на устойчивость составных оболочечных конструкций, подкрепленных шпангоутами, при внешнем давлении.

Особое внимание уделено подбору рациональных геометрических и жесткостных характеристик конической и цилиндрической оболочек и подкрепляющих шпангоутов, обеспечивающих равноустойчивость к локальным и общим формам выпучивания.

В общем случае алгоритм позволяет учесть влияние продольного силового набора (в соответствии с ортотропной схемой), параметры армирования при изготовлении конструкции из композиционного материала, расположение шпангоутов по длине конструкции и характер изменения внешней нагрузки по координатам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Аврамов К. В., Чернобрылко М. В., Батутина Т. Я., Дегтяренко П. Г., Тонконоженко А. М.** Динамическая неустойчивость обтекателей ракет // Космічна наука і техніка. 2015. Т. 21. № 1. С. 10–14.
2. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. **Грицак В. З., Дьяченко Н. Н.** Определение областей устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении на базе гибридного асимптотического подхода // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фізико-математичні науки. 2017. №2. С. 33–46.
4. **Грицак В. З., Маневич А. И.** Влияние жесткости шпангоутов на изгиб из плоскости на устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки // Гидроаэромеханика и теория упругости. 1972. Вып. 14. С. 121–130.
5. **Печников В. П., Захаров Р. В., Тарасова А. В.** Проектирование вафельных оболочек топливных баков ракеты с учетом пластических деформаций // Инженерный журнал: наука и инновации. 2017. Вып. 11. С. 1–14.
6. **Печников В.П.** Исследование на основе полубезмоментной теории устойчивости конической оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами // Изв. вузов. Машиностроение. 1968. № 10. С. 37–42.
7. **Постнов В. А., Тумашик И. В., Москвина И. В.** Об устойчивости подкрепленной цилиндрической оболочки // Проблемы прочности и пластичности. 2007. Вып. 69. С. 18–23.

8. **Преображенский И. Н., Грищак В. З.** Устойчивость и колебания конических оболочек. М.: Машиностроение, 1986. 240 с.

9. **Саченков А. В.** Об устойчивости круговой конической оболочки при совместном действии нагрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. 1964. № 2. С. 57–70.

10. **Teng J. G., Rotter J. M.** Buckling of Thin Metal Shells. CRC Press, London and New York., 2004. 520 p.

11. **Zhao Y, Teng J. G.** A stability design proposal for cone-cylinder intersections under internal pressure // International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2003. Vol. 80. No.5. P. 297–309.

УДК 539.3

¹П. Г. Десятченко, ²В. З. Грищак, д-р техн. наук

²Н. М. Д'яченко, канд. фіз.-мат. наук

ДО РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ КОМБІНОВАНОЇ ОБОЛОНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОСТІ РОЗТАШУВАННЯ ПРОМІЖНИХ ШПАНГОУТІВ

Вивчається стійкість навантаженої зовнішнім тиском оболонкової конструкції, що складається з спряжених циліндричних та конічних відсіків, підкріплених дискретно розташованими шпангоутами. Циліндричні відсіки обираються постійної товщини, конічні – лінійно змінної. Стійкість складеної підкріпленої конструкції і окремих її частин визначається за допомогою матричного методу. Особлива увага приділяється пошуку параметрів рівностійких прольотів підкріпленої конструкції, в тому числі підбору раціональних жорсткостей шпангоутів, що забезпечують рівностійкість локальних і загальних (з захватом шпангоутів) форм випинання. Вивчаються конструкції з різними параметрами.

Ключові слова: стійкість оболонки, циліндричний і конічний відсіки складеної оболонкової конструкції, підкріплена оболонка, жорсткість шпангоуту, рівностійкість, локальні і загальні форми випинання.

UDC 539.3

¹P. G. Degtyarenko, ²V. Z. Gristchak, Dr. Sci. (Tech.),

²N. M. Dyachenko, PhD (Phys.-Math.)

TO THE STABILITY CALCULATION OF A COMBINED SHELL STRUCTURE TAKING INTO ACCOUNT THE DISCRETENESS LOCATION OF THE INTERMEDIATE RINGS

Stability of a combined shell structure is studied under external pressure. This structure consists of conjugate cylindrical and conical compartments reinforced by discretely disposed rings. The cylindrical compartments are chosen of constant thickness, the conical ones are linear-variable thickness. The stability of the complex reinforced structure and its individual parts is determined using the matrix method. Particular attention is paid to the search for equistability parameters of the compartments for the reinforced structure, including the choice of rational ring stiffness, which ensure the equistability of local and overall (with the rings) buckling forms. Constructions with different parameters are discussed.

Keywords: *shell stability, cylindrical and conical compartments of a combined shell structure, reinforced shell, ring stiffness, equistability, local and overall buckling forms.*

In this paper, the stability of complex shell constructions including of conjugate conical and cylindrical shells is studied. Particular attention is paid to the presentation of the methodology for determining the stiffness of the rings to ensure equistability of the conical and cylindrical sections of the combined shell.

The resolving equation for stability studying of a cylindrical shell with constant thickness and the conical shell of a linear-variable thickness is quasi-constant is an ordinary fourth-order differential equation with constant coefficients. These equation allow us to find the corresponding fundamental solutions in a closed form.

In this article, the initial parameter method is applied in a matrix form to obtain a change of the stress-deformable state passing through a ring that is described in [4, 8]. This method includes the normal fundamental matrix of functions for the resolving equation of the compartment stability and the stress-strain state transformation matrix passing through the ring. Both the ring stiffness in the plane of the initial curvature, and the stiffness out of the plane are taken into account. The characteristic equation for determining the critical forces is obtained by extracting the corresponding minor determinant of the matrix obtained by the consequent product of specified matrices, taking into account the given boundary conditions.

Initially, the dependences of the critical pressures of conical and cylindrical reinforced shells on the stiffness of the rings are given. This allows you to find such values of stiffness at which the compartments have equal critical pressures. The critical pressures of the combined structures are calculated. Constructions with different orientation of conic compartments are considered.

The results of calculations show that the critical pressures of an equistable construction of the "cylinder-cone" type, corresponding to an overall instability, are less than local one. At the same time, an increase in the total length of the structure due to the inclusion of additional compartments in it (to obtain structures such as "cylinder-cone-cylinder-cone") leads to a decrease in the critical pressure.

In limit cases, the results correspond to [2, 4, 5, 7, 8].

REFERENCES

1. **Avramov K. V., Chernobryvko M. V., Batutina T. Ya., Degtyarenko P. G., Tonkonozhenko A. M.** Dynamic instability of rockets fairings // *Kosm. nauka tehnol.* 2015. Vol. 21. No. 1. P. 10–14. (in Russian).
2. **Volmir A. S.** Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).
3. **Gristchak V. Z., Dyachenko N. N.** Stability areas determination of the conical shell at combined loading on a hybrid asymptotic approach basis // *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Science.* 2017. No 2. P. 33–46. (in Russian).

4. **Gristchak V. Z., Manevich A. I.** Influence of a ring stiffness on a bend out of a plane on the stability of a reinforced cylindrical shell // *Gidroaeromekhanika i teoriya uprugosti*. 1972. Iss. 14. P. 121–130. (in Russian).
5. **Pechnikov V. P., Zakharov R. V., Tarasova A. V.** Designing wafer shells for fuel tanks of a rocket taking into account plastic deformations // *Engineering journal: science and innovations*. 2017. Iss. 11. P. 1–14. (in Russian).
6. **Pechnikov V. P.** Investigation on the basis of a semi-momentless theory of the stability of a conical shell reinforced by elastic rings // *Izv. vuzov. Mashinostroenie*. 1968. No10. P. 37–42. (in Russian).
7. **Postnov V. A., Tumashik I. V., Moskvina I. V.** About stability of a reinforced cylindrical shell // *Problem of Strength and Plasticity*. 2007. Iss. 69. P. 18–23. (in Russian).
8. **Preobrazhensky I. N., Gristchak V. Z.** Stability and oscillations of conical shells. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 240 p. (in Russian).
9. **Sachenkov A. V.** On the stability of a circular conical shell under the joint action of loads // *Studies on the theory of plates and shells*. Kazan: Publishing house of Kazan University. 1964. No. 2. P. 57–70. (in Russian).
10. **Teng J. G., Rotter J. M.** Buckling of Thin Metal Shells. CRC Press, London and New York, 2004. 520 p.
11. **Zhao Y, Teng J. G.** A stability design proposal for cone-cylinder intersections under internal pressure // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2003. Vol. 80. No 5. P. 297–309.

Друкується за рекомендацією програмного комітету VII Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 23-26 травня 2019 р. м. Запоріжжя.

¹Державне космічне агентство України,
Київ, Україна;

²Запорізький національний університет,
Запоріжжя, Україна

Надійшла до редколегії 15.04.2019