

УДК 539.3

Ф. С. Латифов, д-р физ.-мат. наук, Д. С. Ганиев, канд. техн. наук

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДПОРНЫХ СТЕНОК, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, КОНТАКТИРУЮЩИХ С НЕОДНОРОДНЫМ ВЯЗКОУПРУГИМ ГРУНТОМ

Исследована одна из динамических прочностных характеристик – частота собственных колебаний подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, контактирующих с неоднородным вязкоупругим грунтом и усиленных дискретно распределенными кольцевыми стержнями. На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского для нахождения частот колебаний подпорных стенок построено частотное уравнение, найдены его корни, изучено влияние физических и геометрических параметров, характеризующих систему. В качестве контактных условий принят учет совместной работы на линии контакта двух цилиндрических оболочек.

Ключевые слова: ортотропная оболочка, подпорная стенка, свободные колебания, неоднородный грунт, вариационный принцип, частота колебания.

Введение. Большое значение имеет изготовление и применение новых конструкций, обеспечивающих их прочность и устойчивость за счет сокращения потребления материалов, используемых на высотных подпорных стенках. В рабочих условиях они подвергаются динамическим нагрузкам.

Следует отметить, что в своих работах В. З. Власов [4] изучил подпорные стенки и гидротехнические установки, полученные из применения трех тонкостенных пространственных конструкций, заполненных гранулированной средой, лежащих на упругом основании.

Е. К. Агаханов, А. И. Акаев [1] получили решение для подпорной стенки треугольного сечения с учетом давления грунта и объемных сил фильтрации на вертикальной стороне стенки.

Н. М. Снитко [15] предложил совместное рассмотрение удержания перемещения стены и деформации фундамента. Было рассмотрено влияние грунта с горизонтальной поверхностью на вертикальную гладкую плоскую стенку подпорной стенки. Н. М. Снитко предположил, что в состоянии упругого равновесия в грунте появляется скользящая плоскость, и это похоже на кулоновскую теорию. Для сил, действующих на подпорную стенку, были построены уравнения проекции по горизонтальной оси и уравнение моментов. Третье уравнение было записано как уравнение в проекциях на плоскость скольжения. Было принято, что реактивные силы пропорциональны смещениям, коэффициент пропорциональности равен коэффициенту постели.

В [8] Л. М. Емельянов рассмотрел обоснование устойчивости глубоких опор в пространственной системе. В расчетах, помимо нормальных и касательных давлений грунта, также учитывалась реакция на дне. В большинстве случаев приводятся правила расчета некоторых опор, связанных с якорями. Было показано, что результаты расчетов не зависят от характеристик упругости грунта и что можно игнорировать влияние тангенциального скольжения и давления в нижней части реакции грунта.

В работах Х. Р. Сейфуллаева [10 – 14] были решены проблемы соединения вогнутых оболочек с контурными конструкциями. Построены решения дифференциальных уравнений моментной теории вогнутых оболочек при произвольных граничных условиях, были решены различные задачи для различных соединений. В качестве примеров можно привести пластины и оболочки, ослабленные прямоугольным отверстием, ортогональные решетчатые ребристые оболочки и пластины, решение задач со смешанными граничными условиями на контуре. В [5] изучались статические деформации подпорных стенок пространственно-строительных конструкций, образованных цилиндрическими оболочками из изотропного материала. В [7] дан анализ подпорных стенок в виде цилиндрической оболочки, состоящей из трех различных изотропных материалов в плоском деформированном состоянии. Задача сводилась к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, и было получено аналитическое решение. Статья [6] была посвящена разработке методики расчета цилиндрических оболочек из изотропного материала с учетом работы грунта при сжатии и скольжении в контактной поверхности. Расчеты и исследования проведены на основе моментной теории цилиндрических оболочек. Анализ работ показывает, что при строительстве подпорных стенок подкрепленные цилиндрические оболочки не использовались и реакция грунта не учитывалась.

Постановка задачи. Для применения вариационного принципа Гамильтона – Остроградского запишем полную энергию исследуемой подпорной стенки. Так как исследуемая подпорная стенка состоит из двух оболочек цилиндрической формы с незамкнутым контуром, соединенных по кромке под прямым углом и подкрепляющих элементов, число которых варьируется. Кроме того, внутренняя часть конструкции контактирует с грунтом (рис. 1а).

Запишем потенциальную и кинетическую энергии цилиндрических оболочек [3]:

$$\begin{aligned}
 G_i = \frac{h_i R_i}{2} \iint_{s_i} & \left\{ b_{11i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 - 2(b_{11i} + b_{12i}) \frac{w_i}{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{w_i^2}{R_i^2} (b_{11i} + 2b_{12i} + b_{22i}) + \right. \\
 & + \frac{b_{22i}}{R_i^2} \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_i} \right)^2 - 2(b_{12i} + b_{22i}) \frac{w_i}{R_i^2} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_i} + 2b_{12i} \frac{1}{R_i^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_i} + \\
 & \left. + b_{66i} \frac{1}{R_i^2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} \right)^2 + b_{66i} \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_i} \right)^2 + b_{66i} \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} \right\} dx_i d\theta_i; \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$K_i = \frac{\rho_i h_i}{2R_i(1-\nu_i^2)} \iint_{s_i} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i d\theta_i.$$

Здесь $i=1$ соответствует первой, а $i=2$ – второй цилиндрической оболочке, составляющей подпорные стенки (рис. 1); u_i, ϑ_i, w_i – смещения ребер, R_i, h_i – радиус и толщина цилиндрических оболочек, $b_{11i}, b_{22i}, b_{12i}, b_{66i}$ – основной модуль упругости ортотропного материала и E_{1i}, E_{2i} – модули упругости в направлении осей координат x_i и θ_i соответственно; ν_{1i}, ν_{2i} – коэффициент Пуассона, где $b_{11i}, b_{22i}, b_{12i}, b_{66i}$ выражаются через E_{1i}, E_{2i} и ν_{1i}, ν_{2i} следующим образом:

$$b_{11i} = \frac{E_{1i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}}; \quad b_{22i} = \frac{E_{2i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}}; \quad b_{12i} = \frac{\nu_{2i}E_{1i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}} = \frac{\nu_{1i}E_{2i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}};$$

s_i – поверхность цилиндрических оболочек, составляющих подпорные стенки.

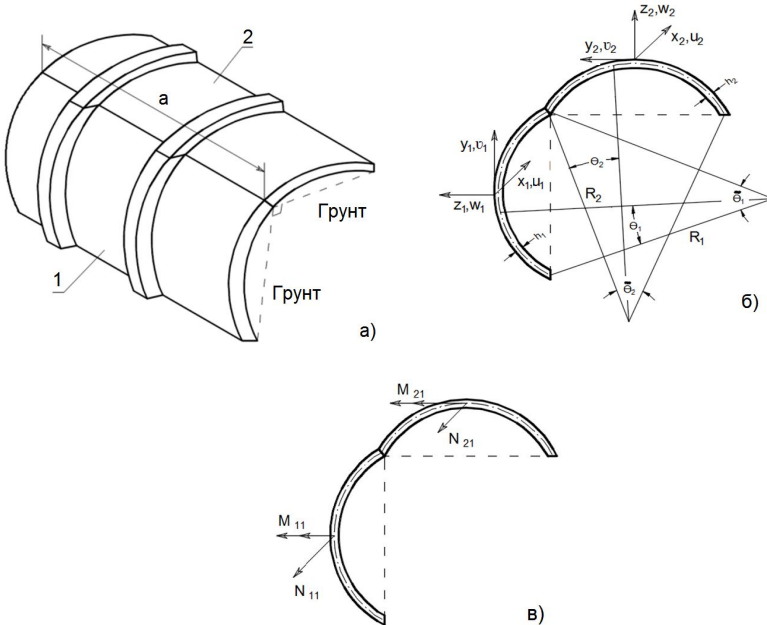


Рис. 1 – Схема усиленной подпорной стенки, выполненной из соединения ортотропных цилиндрических оболочек

Влияние грунта на цилиндрические оболочки заменяется внешними силами q_{xi}, q_{yi}, q_{zi} . Работа, выполняемая этими силами при смещении точек покрытия, вычисляется по формуле

$$A_i = - \int_0^a \int_0^{\bar{\theta}_i} (q_{xi}u_i + q_{yi}\vartheta_i + q_{zi}w_i) dx_i d\theta_i. \quad (2)$$

Запишем полную энергию колец, используемых в усилении [14]

$$\begin{aligned} H_j = & \frac{R_i}{2} \sum_{j=1}^{k_i} \int_0^{\theta_i} \left[E_{ji} F_{ji} \left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial \vartheta_{ji}}{\partial \theta_i} - \frac{w_j}{R_i} \right)^2 + E_{ji} J_{xji} \left(\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \theta_i^2} + \frac{w_j}{R_i^2} \right)^2 + \right. \\ & + E_{ji} J_{zji} \left(\frac{1}{R_i^2} \frac{\partial^2 u_{ji}}{\partial \theta_i^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R_i} \right)^2 + G_{ji} J_{kpi} \frac{1}{R_i} \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial \theta_i} + \left. \frac{1}{R_i^2} \frac{\partial u_{ji}}{\partial \theta_i} \right] d\theta_i + \quad (3) \\ & + \sum_{j=1}^{k_i} \rho_{ji} F_{ji} R_i \int_0^{\theta_i} \left[\left(\frac{\partial u_{ji}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_{ji}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{ji}}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_{ji}} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] d\theta_i. \end{aligned}$$

Считается, что условия жесткого контакта между оболочкой и стержнями удовлетворены [2]:

$$\begin{aligned} u_{ji}(\theta_i) &= u_i(x_{ji}, \theta_i) + h_{ji} \varphi_1(x_{ji}, \theta_i); \\ \vartheta_{ji}(\theta_i) &= \vartheta_i(x_{ji}, \theta_i) + h_{ji} \varphi_1(x_{ji}, \theta_i); \\ w_{ji} &= w(x_{ji}, \theta_i); \quad \varphi_{ji}(\theta_i) = \varphi_2(x_{ji}, \theta_i); \\ \varphi_{kpi}(\theta_i) &= \varphi_1(x_{ji}, \theta_i); \quad h_{ji} = 0,5h_i + H_{ji}^i. \end{aligned} \quad (4)$$

В выражениях (3), (4) $i=1$ соответствует первой цилиндрической оболочке, $i=2$ – второй цилиндрической оболочке, составляющей подпорные стенки; $u_{ji}, \vartheta_{ji}, w_{ji}$ – смещения точек стержней, используемых в упрочнении; F_{ji} – площади поперечных сечений j -го стержня, прикрепленного к оболочке в круговом направлении; E_{ji} – модуль упругости при растяжении j -го стержня, прикрепленного к цилиндрической оболочке в круговом направлении; J_{xji}, J_{zji} – моменты инерции j -го стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения; J_{kpi} – моменты инерции при кручении j -го стержня; t – время; k_i – количество стержней, используемых в подкреплении;

H_{ji}^i – расстояние от осей j -го стержня до поверхности цилиндрической оболочки; ρ_{ji} – плотность материала j -го стержня; ϕ_{ji}, ϕ_{kpi} – углы поворота и закручения поперечного сечения j -го стержня, через смещения оболочки выражаются следующим образом

$$\phi_{kpi}(\theta_i) = \phi_1(x_{ji}, \theta_i) = - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_{ji}}.$$

В результате получаем полную энергию системы в виде:

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 (G_i + K_i + H_i + A_i). \quad (5)$$

Внешние силы q_{xi}, q_{yi}, q_{zi} , действующие на цилиндрические оболочки и содержащиеся в выражении (2), будут взяты в виде:

$$\begin{aligned} q_{xi} = q_{yi} = 0; \quad q_{z1} = k_1(x)w_1 - \int_0^t \Gamma(t-\tau)w_1(\tau)d\tau; \\ q_{z2} = k_2(x)w_2 - k_s(x) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)w_2(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\Gamma(t) = Ae^{-\psi t}$ – ядро релаксации; A, ψ – постоянные; k_1, k_2, k_s – коэффициенты жесткости неоднородного грунта при сжатии и скольжении соответственно, и принято, что эти величины меняются по закону:

$$k_1(x) = k_{10} \left(1 + \alpha \frac{x}{a} \right), \quad k_2(x) = k_{20} \left(1 + \beta \frac{x}{a} \right), \quad k_s(x) = k_{s0} \left(1 + \gamma \frac{x}{a} \right); \quad (7)$$

α, β, γ – параметры неоднородности; k_{10}, k_{20}, k_{s0} – коэффициенты жесткости однородного грунта при сжатии и скольжении соответственно.

К выражениям (2) и (5) добавляются контактные и граничные условия. Предположим, что цилиндрическая оболочка упруго связана, то есть в контакте (вдоль линии АВ) выполняются условия

$$\begin{aligned} w_1(x) \Big|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = \vartheta_2(x) \Big|_{\theta_2=0}; \quad \vartheta_1(x) \Big|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = w_2(x) \Big|_{\theta_2=0}; \\ u_1(x) \Big|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = u_2(x) \Big|_{\theta_2=0}; \quad \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \Big|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} = \frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial x} \Big|_{\theta_2=0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Принято считать, что цилиндрические оболочки надежно закреплены на идеальных диафрагмах на линиях $x=0$ и $x=a$, в этом случае граничные условия выражаются следующим образом:

$$\vartheta_i = 0, \quad w_i = 0, \quad T_{i1} = 0, \quad M_{i1} = 0. \quad (9)$$

Здесь T_{i1} , M_{i1} – силы и моменты, действующие в поперечных сечениях цилиндрических оболочек (рис. 1, в).

Используя условие стационарности Гамильтона – Остроградского, определяющее колебание подпорных стенок, создаваемых соединением цилиндрических оболочек, можно получить уравнение частоты

$$\delta W = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$$

представляет собой действие Гамильтона.

Если в равенстве $\delta W = 0$ выполнить операцию вариации и учитывая, что независимые вариации δu_i , $\delta \vartheta_i$, δw_i произвольны, для нахождения частот свободных колебаний подпорных стенок, полученных соединением цилиндрических оболочек, динамически контактирующих с грунтом, получаем уравнение частоты. Таким образом, решение проблемы колебаний подпорных стенок, полученных соединением цилиндрических оболочек, динамически контактирующих с грунтом, сводится к совместному интегрированию полной энергии конструкции (5) при контактных условиях (8) и граничных условиях (9).

Решение задачи о собственных колебаниях оболочки. Смещение точек цилиндрических оболочек ищем в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} \cos \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1; \\ \vartheta_i &= \vartheta_{0i} \sin \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1; \\ w_i &= w_{0i} \sin \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь u_{0i} , ϑ_{0i} , w_{0i} – неизвестные константы; $\xi_i = x_i/a$; $t_1 = \omega_{01}t$; χ, n – волновые числа цилиндрической оболочки в направлении образующей и кругового направления; $\omega_1 = \sqrt{(1 - \nu_{11}^2)} \rho_1 R_1^2 \omega^2 / E_{11}$, $0 \leq \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1$,

$$0 \leq \theta_2 \leq \tilde{\theta}_2.$$

Используя решения (11) из условия контакта (8), константы u_{02} , ϑ_{02} , w_{02} выражаем через константы u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} :

$$\begin{aligned}
 u_{02} &= u_{01} (\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1); \\
 \vartheta_{02} &= w_{01} (\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1); \\
 w_{02} &= \vartheta_{01} (\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1).
 \end{aligned}$$

Подставляя решения (11) в (5) и учитывая выражения u_{02} , ϑ_{02} , w_{02} через константы u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} , для полной энергии (5), получаем полином второго порядка относительно u_{01} , ϑ_{01} , w_{01}

$$\Pi = \varphi_{11}u_{01}^2 + \varphi_{22}\vartheta_{01}^2 + \varphi_{33}w_{01}^2 + \varphi_{44}u_{01}\vartheta_{01} + \varphi_{55}u_{01}w_{01} + \varphi_{66}\vartheta_{01}w_{01}.$$

Поскольку выражения коэффициентов φ_{11} , φ_{22} , φ_{33} , φ_{44} , φ_{55} , φ_{66} громоздки, мы их не приводим.

Если варьировать выражение Π по константам u_{01} , ϑ_{01} , w_{01} и приравнять коэффициенты независимых вариаций к нулю, то получим следующую систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}
 2\varphi_{11}u_{01} + \varphi_{44}\vartheta_{01} + \varphi_{55}w_{01} = 0; \\
 \varphi_{44}u_{01} + 2\varphi_{22}\vartheta_{01} + \varphi_{66}w_{01} = 0; \\
 \varphi_{55}u_{01} + \varphi_{66}\vartheta_{01} + 2\varphi_{33}w_{01} = 0.
 \end{cases} \quad (12)$$

Поскольку (12) является однородной системой линейных алгебраических уравнений, необходимым и достаточным условием существования ее ненулевого решения является равенство нулю ее главного определителя. В результате получаем следующее частотное уравнение

$$\begin{vmatrix}
 2\varphi_{11} & \varphi_{44} & \varphi_{55} \\
 \varphi_{44} & 2\varphi_{22} & \varphi_{66} \\
 \varphi_{55} & \varphi_{66} & 2\varphi_{33}
 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Запишем уравнение (13) в виде:

$$4\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{44}\varphi_{55}\varphi_{66} - \varphi_{55}^2\varphi_{22} - \varphi_{66}^2\varphi_{11} - \varphi_{44}^2\varphi_{33} = 0. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) было найдено численным методом для следующих параметров:

$$\begin{aligned}
 k_{10} = k_{20} &= 7 \cdot 10^8 \text{ H / м}^2, & k_{s0} &= 11 \cdot 10^6 \text{ H / м}^2, & a/R_i &= 3, & v_{1i} = v_{2i} &= 0,35; \\
 R_i &= 160 \text{ мм}; & b_{11} &= 18,3 \text{ QПа}; & b_{12} &= 2,77 \text{ QПа}; & b_{22} &= 25,2 \text{ QПа}; \\
 b_{66} &= 3,5 \text{ QПа}; & \rho_i = \rho_{ji} &= 1850 \text{ кг / м}^3; & E_{ji} &= 6,67 \cdot 10^9 \text{ H / м}^2; & \chi &= 1; & n &= 8;
 \end{aligned}$$

$h_{ji} = 1,39 \text{ мм}$; $I_{kpi} = 0,48 \text{ мм}^4$; $I_{xji} = 19,9 \text{ мм}^4$; $F_{ji} = 0,45 \text{ мм}^2$;
 $h_i = 0,45 \text{ мм}$; $\beta = \gamma = 0,5$; $\Psi = 0,05$; $A = 0,1615$.

Результаты расчетов приведены на рис. 2 в виде зависимости частотного параметра от θ_1 , на рис. 3 – от отношения a/R_1 , на рис. 4 – от количества стержней на поверхности первого цилиндра, на рис. 5 – от параметра неоднородности α .

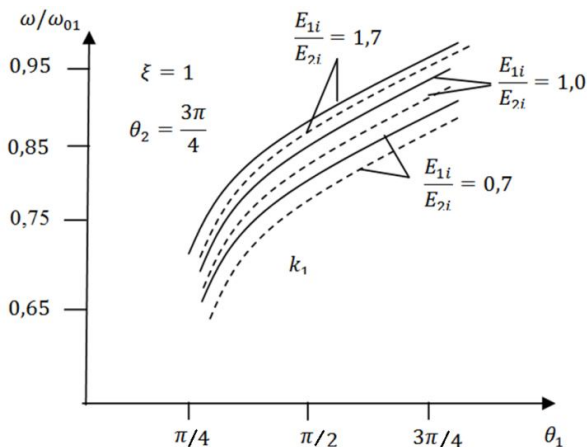


Рис. 2 – Зависимость частотного параметра от θ_1

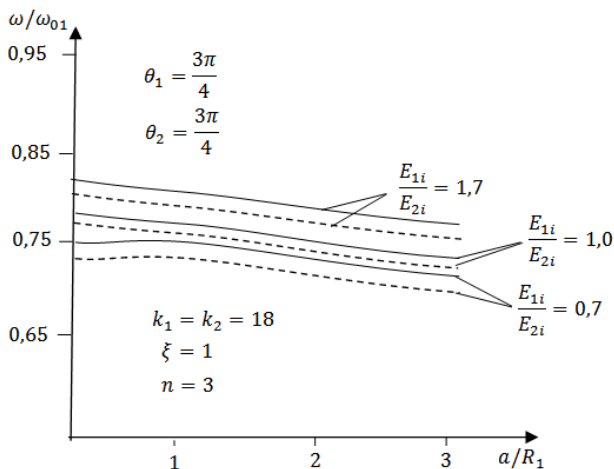


Рис. 3 – Зависимость частотного параметра от отношения a/R

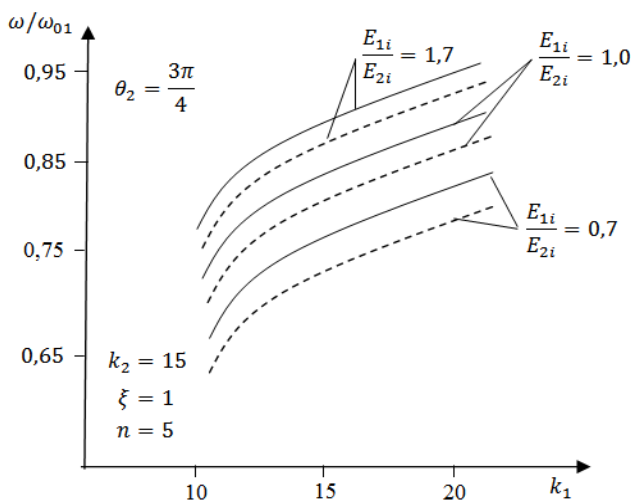


Рис. 4 – Зависимость частотного параметра от k_1

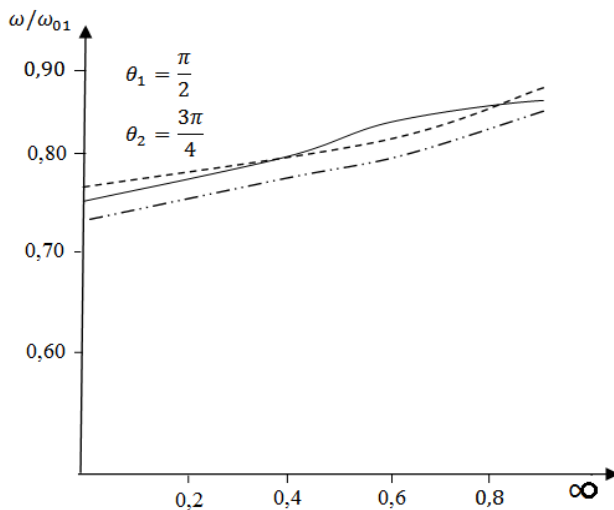


Рис. 5 – Зависимость частотного параметра от ∞

Выводы. Как видно из рис. 2, при увеличении угла значение параметра частоты увеличивается. По мере увеличения длины цилиндрических оболочек (рис. 3) значение частотного параметра уменьшается. Значение частотного параметра возрастает с возрастанием ортотропных свойств цилиндрической оболочки. Частоты собственных колебаний подпорных стенок увеличиваются с увеличением количества стержней (рис. 4). Рис. 5 показывает, что с увеличением параметра

неоднородности, частоты собственных колебаний подпорных стенок тоже увеличиваются. Во всех рисунках сплошным линиям соответствуют колебания подпорных стенок с упругим грунтом, а пунктирным линиям – колебания подпорных стенок с вязкоупругим грунтом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Агаханов Е. К., Акаев А. И.** Анализ треугольной удерживающей стенки // Транспортное строительство. 2010. № 4. С. 14–15.
2. **Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С.** Ребристые цилиндрические оболочки. Киев: Наукова думка, 1973. 245 с.
3. **Босяков С. М., Чжывэй В.** Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стекловолокна при граничных условиях Навье // Международный научно-технический журнал Механика машин, механизмов и материалов. Минск: Изд-во объединенного института машиностроения НАН Беларуси. 2011. № 3(10). С. 24–27.
4. **Власов В. З.** Избранные статьи. В 3 томах. Т. 1 – Общая теория оболочек. Документы. 528 с.; Т. 2 – Тонкостенные эластичные стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. 507 с. Т.3 – Тонкостенные космические системы 472 с. М.: АН СССР. 1962–1964.
5. **Ганиев Д. С.** Применение и расчеты цилиндрических оболочек в подпорных стенах // Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика. 2006. № 2. С.7–10.
6. **Ганиев Д. С.** Решение задачи подпорных стен, состоящих из цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании // Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика. 2007. № 1. С.103–107.
7. **Ганиев Д. С.** Исследование облегченных подпорных стен при плоской деформации // Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика. 2013. № 1. С.43–47.
8. **Емельянов Л. М.** Анализ параллельных связей // Гидротехника и мелиорация. 1955. № 12. С. 41– 46.
9. **Кадолы Ракириран, Ганесан Н. Ю.** Анализ устойчивости и свободного вибрации функционально градуированных цилиндрических оболочек, подвергнутых температурному граничному условию // Звук и вибрация. 2006. Т. 289. № 3.С. 450–480.
10. **Сейфуллаев Х. Р.** К расчету пологих оболочек с большим прямоугольным отверстием, открытых на упругий контур // Изв. вузов Строительство и архитектура. Новосибирск. 1978. № 4. С. 60–66.
11. **Сейфуллаев Х. Р.** Об одном методе исследования несущей способности пологих оболочек при больших прогибах // Сб. науч. тр. по механике. Баку. 1994. № 4. С. 4–7.
12. **Сейфуллаев Х. Р.** Об одном методе решения краевых задач непологих оболочек // Стоительство и архитектура. Новосибирск: Изд-во. Вузов. 1975. № 7. С. 56–61.
13. **Сейфуллаев Х. Р., Азимов Н. А.** К решению уравнений теории пологих оболочек переменной толщины и кривизны при произвольных граничных условиях // Прикладная механика. Киев. 1980. Вып. XVI. № 10. С. 47–53.
14. **Сейфуллаев Х. Р., Гусейнли Е. А.** Расчет пологих ребристых оболочек на основе модели конструктивно-ортотропных систем // Сб. науч. тр. по механике. 1997. № 7 (часть I). С. 112– 116.
15. **Снитко Н. М.** Статическое и динамическое давление грунтов и анализ подпорных стенок. М.: Госстройиздат, 1963. 142 с.

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ПІДПІРНИХ СТІНОК, ЩО СКЛАДАЮТЬСЯ З ПІДКРІПЛЕНИХ ОРТОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, КОНТАКТУЮЧИХ З НЕОДНОРІДНИМ В'ЯЗКОПРУЖНИМ ГРУНТОМ

Досліджено одну з динамічних характеристик міцності – частоту власних коливань підпірної стінки, що складається з двох ортотропних циліндричних оболонок, контактуючих з неоднорідним в'язкопружним ґрунтом і посилених дискретно розподіленими кільцевими стрижнями. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського для знаходження частот коливань підпірних стінок побудовано частотне рівняння, знайдені його корені і вивчен вплив фізичних та геометричних параметрів, що характеризують систему. В якості контактних умов прийнято урахування спільної роботи на лінії контакту двох циліндричних оболонок.

Ключові слова: ортотропна оболонка, підпірна стінка, вільні коливання, неоднорідний ґрунт, варіаційний принцип, частота коливання.

UDC 539.3

F. S. Latifov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), D. S. Ganiev, Phd (Tech.)

FREE VIBRATIONS OF RETAINING WALLS CONSISTING OF REINFORCED ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS IN CONTACT WITH NON-UNIFORM VISCOELASTIC SOIL

This article is devoted to the study of one of the dynamic strength characteristics of the frequency of natural oscillations of the retaining wall, consisting of two orthotropic cylindrical shells in contact with a heterogeneous viscoelastic soil and reinforced with discretely distributed ring rods. Using the Hamilton – Ostrogradsky variational principle to find the oscillation frequencies of the retaining walls, a frequency equation was constructed, its roots were found, and the effects of the physical and geometric parameters characterizing the system were studied. The contact conditions are taken into account joint work on the contact line of two cylindrical shells.

Keywords: orthotropic shell, retaining wall, free oscillations, heterogeneous soil, variational principle, frequency of oscillation.

Introduction. Of great importance is the manufacture and use of new designs that ensure their strength and stability by reducing the consumption of materials used on high-altitude retaining walls. Under working conditions, they are subjected to dynamic loads.

It should be noted that in his works V. Z. Vlasov [4] studied retaining walls and hydraulic installations, obtained from the use of three thin-walled spatial structures filled with a granular medium, lying on an elastic base.

Agahanov E. K., Akayev A. I. [1] obtained a solution for a retaining wall of a triangular cross section, taking into account the pressure of the soil and the bulk filtration forces on the vertical side of the wall.

N. M. Snitko proposed a joint consideration of holding the movement of the wall and the deformation of the foundation. Its results are given in [15]. The influence of soil with a horizontal surface on a vertical smooth flat wall of

a retaining wall was considered. N. M. Snitko suggested that in a state of elastic equilibrium in the ground a sliding plane appears, and this is similar to the Coulomb theory. For the forces acting on the retaining wall, the equations of the projection on the horizontal axis and the equation of moments were constructed. The third equation was written as an equation in projections onto the slip plane. It was assumed that the reactive forces are proportional to the displacements, the coefficient of proportionality is equal to the coefficient of the bed.

In [8] L. M. Emelyanov considered the justification for the stability of deep supports in a spatial system. In the calculations, in addition to the normal, tangential pressures of the soil, the reaction at the bottom was also taken into account. In most cases, the rules for calculating some of the supports associated with anchors are given. It was shown that the results of the calculations do not depend on the characteristics of the elasticity of the soil and that the influence of tangential slip and pressure in the lower part of the reaction of the soil can be ignored.

In the works of Kh. R. Seyfullayev [5 – 7, 9, 14] solved the problems of connecting concave shells with contour structures. Solutions of the differential equations of the moment theory of concave shells under arbitrary boundary conditions were constructed, various problems for various compounds were solved. Examples include plates and shells, weakened by a rectangular hole, orthogonal lattice ribbed shells and plates, solving problems with mixed boundary conditions in a contour. In [11], static deformations of the retaining walls of spatial construction structures formed by cylindrical shells of an isotropic material were studied. In [12], an analysis of retaining walls in the form of a cylindrical shell consisting of three different isotropic materials in a flat deformed state is given. The tasks were reduced to solving ordinary differential equations and an analytical solution was obtained. Article [13] was devoted to the development of a method for calculating cylindrical shells of isotropic material, taking into account the work of the soil in compression and sliding in the contact surface. Calculations and studies were carried out on the basis of the moment theory of cylindrical shells. An analysis of the work performed shows that during the construction of retaining walls, reinforced cylindrical shells were not used and the reaction of the soil was not taken into account.

Formulation of the problem. To apply the Hamilton – Ostrogradsky variational principle, we write down the total energy of the retaining wall under study. Since the retaining wall under investigation consists of two cylindrical shells with an open contour, connected at the right-angle edge and supporting elements, their number varies. In addition, the construction is in contact with the ground from the inside (Fig.1a). The effect of soil on cylindrical shells is replaced by external forces. The work performed by these forces in shifting the coverage points

$$A_i = - \int_0^a \int_0^{\bar{\theta}_i} (q_{xi}u_i + q_{yi}\vartheta_i + q_{zi}w_i) dx_i d\theta_i \quad (1)$$

External forces q_{xi}, q_{yi}, q_{zi} acting on cylindrical shells and contained in expression (1) will be taken in the form:

$$q_{xi} = q_{yi} = 0; \quad q_{zi} = k_1(x)w_1 - \int_0^t \Gamma(t-\tau)w_1(\tau) d\tau; \quad (2)$$

$$q_{z2} = k_2(x)w_2 - k_s(x) \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)w_2(\tau) d\tau.$$

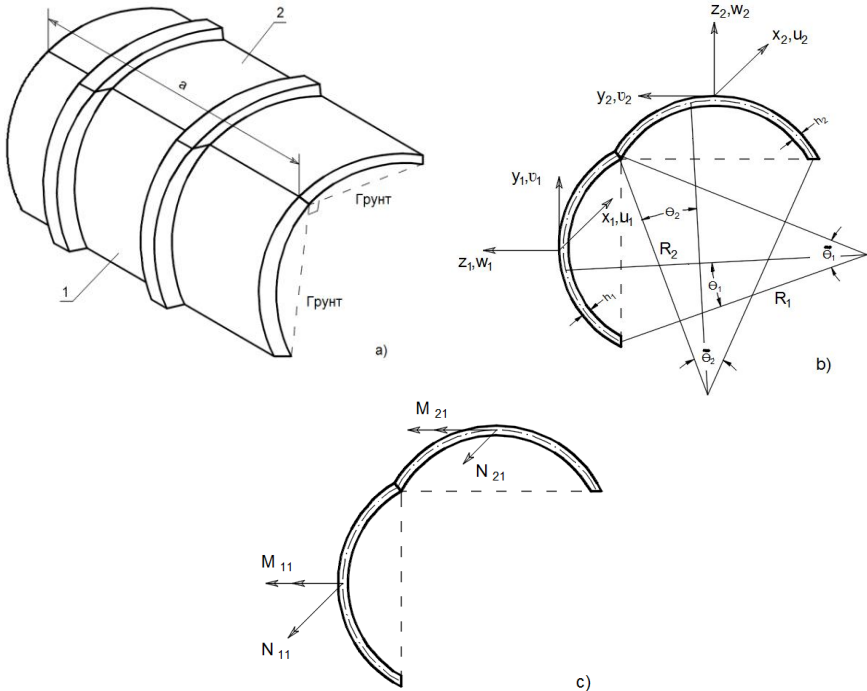


Fig.1 – The scheme of reinforced retaining wall made of compound orthotropic cylindrical shells

Here is $\Gamma(t) = Ae^{-\psi t}$ the core of relaxation, A, ψ – are constant, k_1, k_2, k_s is the coefficient of stiffness of a heterogeneous soil during compression and sliding, respectively, and it is accepted that these values change according to the law

$$k_1(x) = k_{10} \left(1 + \alpha \frac{x}{a} \right), \quad k_2(x) = k_{20} \left(1 + \beta \frac{x}{a} \right), \quad k_s(x) = k_{s0} \left(1 + \gamma \frac{x}{a} \right) \quad (3)$$

Here α, β, γ – parameters of heterogeneity, k_{10}, k_{20}, k_{s0} – are the stiffness coefficient of a homogeneous soil during compression and sliding, respectively.

Contact and boundary conditions are added to expression (2). Suppose that the cylindrical shell is elastically connected, that is, in contact (along the line AB), conditions

$$\begin{aligned} w_1(x)|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= \vartheta_2(x)|_{\theta_2=0}; & \vartheta_1(x)|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= w_2(x)|_{\theta_2=0}; \\ u_1(x)|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= u_2(x)|_{\theta_2=0}; & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x}\bigg|_{\theta_1=\tilde{\theta}_1} &= \frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial x}\bigg|_{\theta_2=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

fulfilled.

It is believed that the cylindrical shells are securely fixed on the ideal diaphragms on the lines $x=0$ and $x=a$, and this time the boundary conditions are expressed as:

$$\vartheta_i = 0, \quad w_i = 0, \quad T_{i1} = 0, \quad M_{i1} = 0. \quad (5)$$

Here T_{i1}, M_{i1} are the forces and moments acting on the cross sections of cylindrical shells (Fig. 1c)).

Using the stationary condition of Ostrogradsky-Hamilton, which determines the oscillation of the retaining walls created by the connection of cylindrical shells, we can obtain the equation of frequency

$$\delta W = 0. \quad (6)$$

Here

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$$

is Hamilton's action. If we perform $\delta W = 0$ the variation operation in equality and taking into account that the independent variations $\delta u_1, \delta \vartheta_1, \delta w_1$ are arbitrary, to find the frequencies of free vibrations of the retaining walls obtained by connecting cylindrical shells dynamically in contact with the ground, we obtain the frequency equation.

The solution of the problem of natural oscillations of the shell. The offset points of the cylindrical shells are looking in the form:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} \cos \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_i t_i; \\ \vartheta_i &= \vartheta_{0i} \sin \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_i t_i; \\ w_i &= w_{0i} \sin \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_i t_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Here, $u_{0i}, \vartheta_{0i}, w_{0i}$ the unknown constants, $\xi_i = x_i/a$, $t_1 = \omega_{01}t$, χ, n are the wavenumbers of the cylindrical shell in the direction of the generator and circular direction, $0 \leq \theta_1 \leq \tilde{\theta}_1$, $0 \leq \theta_2 \leq \tilde{\theta}_2$, $\omega_1 = \sqrt{(1 - \nu_{11}^2)} \rho_1 R_1^2 \omega^2 / E_{11}$.

Substituting solutions (7) we obtain a second-order polynomial with respect to

$$\Pi = \varphi_{11}u_{01}^2 + \varphi_{22}\vartheta_{01}^2 + \varphi_{33}w_{01}^2 + \varphi_{44}u_{01}\vartheta_{01} + \varphi_{55}u_{01}w_{01} + \varphi_{66}\vartheta_{01}w_{01}.$$

Since the expression of the coefficients $\varphi_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{33}, \varphi_{44}, \varphi_{55}, \varphi_{66}$ are cumbersome, we do not give them.

If we vary Π the expression over the constants $u_{01}, \vartheta_{01}, w_{01}$ and equate the coefficients of independent variations to zero, we get the following system of homogeneous algebraic equations

$$\begin{cases} 2\varphi_{11}u_{01} + \varphi_{44}\vartheta_{01} + \varphi_{55}w_{01} = 0; \\ \varphi_{44}u_{01} + 2\varphi_{22}\vartheta_{01} + \varphi_{66}w_{01} = 0; \\ \varphi_{55}u_{01} + \varphi_{66}\vartheta_{01} + 2\varphi_{33}w_{01} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Since system (8) is a homogeneous system of linear algebraic equations, a necessary and sufficient condition for the existence of its non-zero solution is the equality of its main determinant to zero. As a result, we obtain the following frequency equation

$$\begin{vmatrix} 2\varphi_{11} & \varphi_{44} & \varphi_{55} \\ \varphi_{44} & 2\varphi_{22} & \varphi_{66} \\ \varphi_{55} & \varphi_{66} & 2\varphi_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

We write equation (9) in the form:

$$4\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{44}\varphi_{55}\varphi_{66} - \varphi_{55}^2\varphi_{22} - \varphi_{66}^2\varphi_{11} - \varphi_{44}^2\varphi_{33} = 0. \quad (10)$$

Equation (10) was calculated numerically. The parameters contained in the solution of the problem were taken as:

$$\begin{aligned} k_{10} = k_{20} = 7 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2, \quad k_{s0} = 11 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2, \quad a/R_i = 3, \quad \nu_{1i} = \nu_{2i} = 0,35; \\ R_i = 160 \text{ mm}; \quad b_{11} = 18,3 \text{ QPa}; \quad b_{12} = 2,77 \text{ QPa}; \quad b_{22} = 25,2 \text{ QPa}; \\ b_{66} = 3,5 \text{ QPa}; \quad \rho_i = \rho_{ji} = 1850 \text{ kg/m}^3; \quad E_{ji} = 6,67 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2; \quad \chi = 1; \quad n = 8; \\ h_{ji} = 1,39 \text{ mm}; \quad I_{kpxi} = 0,48 \text{ mm}^4; \quad I_{xji} = 19,9 \text{ mm}^4; \quad F_{ji} = 0,45 \text{ mm}^2; \\ h_i = 0,45 \text{ mm}; \quad \beta = \gamma = 0,5; \quad \Psi = 0,05; \quad A = 0,1615. \end{aligned}$$

Conclusion. The results of the calculations were shown in Fig. 2 in the form of dependence θ_1 of frequency parameter on, on Fig. 3 from the

relation a / R_1 , in Fig. 4 of the number of rods on the surface of the first cylinder, in Fig. 5 of the inhomogeneity parameter α .

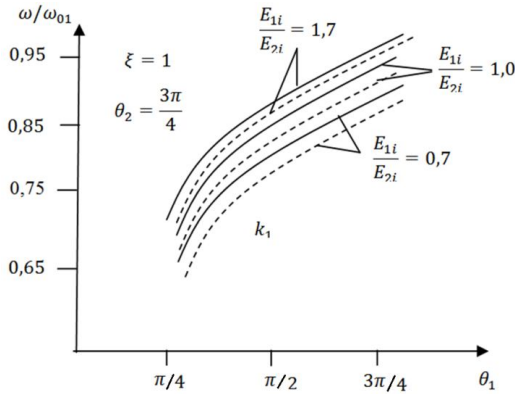


Fig. 2 – Dependence of frequency parameter on θ_1

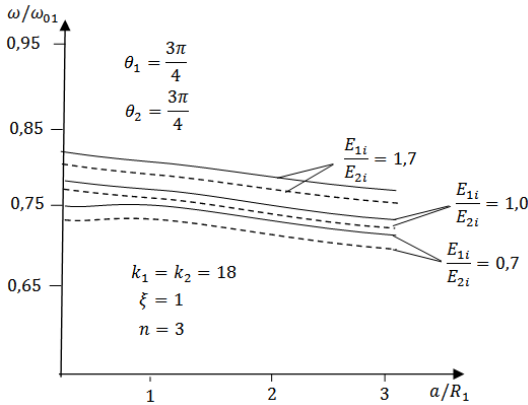


Fig. 3 – The dependence of the frequency parameter on the ratio a / R

As can be seen from Fig. 2, as the angle increases, the value of the frequency parameter increases. As the length of the cylindrical shells increases, as can be seen from Fig. 3, the value of the frequency parameter decreases. The value of the frequency parameter increases with increasing orthotropic properties of the cylindrical shell. As can be seen from Fig. 4, the natural vibration frequencies of the retaining walls increase with an increase in the number of rods. Fig.5 shows that with an increase in the non-uniformity parameter, the frequencies of the natural oscillations of the retaining walls also increase. In all Figures, solid lines correspond to

oscillations of retaining walls with elastic soil, and dotted lines of oscillations of retaining walls with viscoelastic soil.

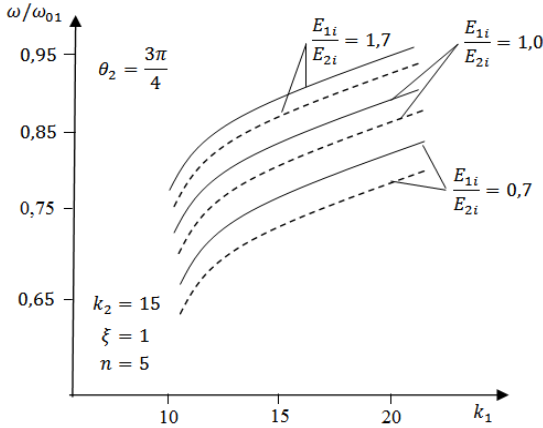


Fig. 4 – Dependence of frequency parameter on k_1

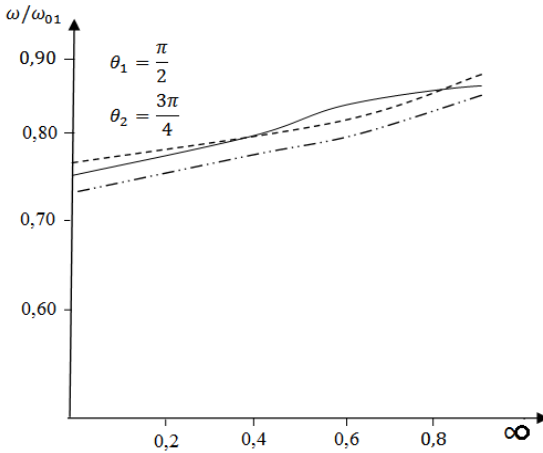


Fig. 5 – Dependence of frequency parameter on α

REFERENCES

1. **Agakhanov E. K., Akayev A. I.** Analysis of the triangular retaining wall // Transport Construction. 2010. No 4. P. 14–15. (in Russian).
2. **Amiro I. Ya., Zarutsky V. A., Polyakov P. S.** Ribbed cylindrical shells. Kiev: Naukova Dumka, 1973. 245 p. (in Russian).
3. **Bosakov S. M., Chivay V.** Analysis of free oscillations of a cylindrical shell of fiberglass under the boundary conditions Navier // International Scientific and Technical Journal, Mechanics of machines, mechanisms and materials. Minsk: Joint Institute for

Mechanical Engineering of the National Academy of Sciences of Belarus. 2011. No 3 (10). P. 24–27. (in Russian).

4. **Vlasov V. Z.** Selected articles. In 3 volumes. Moscow: Academy of Sciences of the USSR. 1962-1964. Vol. 1. The general theory of shells. Documents. - 528 p. Vol. 2. Thin-walled elastic rods. Principles of construction of a general technical theory of shells. 507 p. Vol. 3. Thin-walled space systems. 472 p.(in Russian).

5. **Ganiev D. S.** Application and calculations of cylindrical shells in retaining walls / DSGaniyev // Azerbaijan University of Architecture and Construction, Theoretical and applied mechanics. - 2006.- № 2.- P.7-10 (in Russian).

6. **Ganiev D. S.** Solution of the problem of retaining walls consisting of cylindrical shells lying on an elastic base // Azerbaijan Architectural and Construction University, Theoretical and Applied Mechanics. 2007. No 1. P. 103–107 (in Russian).

7. **Ganiev D. S.** Studies of lightweight retaining walls in plane deformation // Azerbaijan University of Architecture and Construction, Theoretical and Applied Mechanics. 2013. No 1. P.43–47 (in Russian).

8. **Emelyanov L. M.** Analysis of parallel connections // Hydraulic Engineering and Land Reclamation.1955. No 12. P. 41–46. (in Russian).

9. **Cadoli Ravikiran, Ganesan N. Yu.** Analysis of stability and free vibration of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature boundary condition // Sound and vibration. 2006. Vol. 289. No 3. C. 450–480. (in Russian).

10. **Seyfullaev Kh. R.** To the calculation of gentle shells with a large rectangular opening open to an elastic contour // Izv. Universities "Construction and Architecture". Novosibirsk Publishing House. 1978. No 4. P. 60–66 (in Russian).

11. **Seyfullaev Kh. R.** On a method of studying the carrying capacity of gentle shells with large deflections // Coll. scientific papers on mechanics. Baku. 1994. No 4. P. 4–7 (in Russian).

12. **Seyfullaev Kh. R.** On a method of solving boundary problems of non-homogeneous shells // Izv. Universities "Construction and Architecture" Novosibirsk: Publishing House. 1975. No 7. P. 56–61 (in Russian).

13. **Seyfullaev Kh. R., Azimov N. A.** To solving the equations of the theory of shallow shells of variable thickness and curvature under arbitrary boundary conditions // Applied Mechanics. Kiev. 1980. Iss. XVI. No 10. P. 47–53 (in Russian).

14. **Seyfullaev Kh.R., Huseynli E.** A Calculation of gentle ribbed shells based on the model of constructively orthotropic systems // Collection of scientific works on mechanics. 1997. No 7 (part I). P. 112–116 (in Russian).

15. **Snitko N.M.** Static and dynamic pressure of soils and analysis of retaining walls. - Gosstroydat, 1963.- 142 p. (in Russian).

Друкється за рекомендацією програмного комітету VII міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки та міцності конструкцій», 23-26 травня 2019 р. м. Запоріжжя.

*Азербайджанський
архітектурно-будівельний університет,
Баку, Азербайджан*

Надійшла до редколегії 06.03.2019