УДК 539.3

К. В. Панин, канд. физ.-мат. наук

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Рассматривается квазистатическая задача о двухосном сложном нагружении квадратной упругопластической пластинки с круговым отверстием. В качестве физических уравнений использованы уравнения теории пластичности, учитывающей микродеформации. С использованием метода конечных элементов получены численные результаты, которые свидетельствуют о том, что влияние истории нагружения на концентрацию напряжений в пластинке может быть существенной.

Ключевые слова: пластичность, пластинка, напряженно-деформированное состояние, концентрация напряжений, метод конечных элементов, метод простой итерации.

Введение. Многие элементы конструкций имеют отверстия конструктивного или технологического назначения. Эти отверстия при эксплуатации конструкций становятся концентраторами напряжений и оказывают существенное влияние на их прочность. При анализе возникающего в таких случаях напряженно-деформированного состояния обычно используются величины коэффициентов концентрации напряжений, полученные на основе решения плоской задачи теории упругости. При упругопластическом деформировании, в связи с тем, что точных аналитических решений соответствующих задач в нелинейной постановке нет, концентрация напряжений исследуется в каждом конкретном случае приближенными методами с использованием различных вариантов теории пластичности. Следует отметить, что решения подобных задач получены, в основном, в рамках простейших вариантов теории пластичности [1, 3, 5, 6]. Представляет интерес при решении задачи об определении напряженно-деформированного состояния пластинки с отверстием воспользоваться одним из дифференциально-нелинейных вариантов теории пластичности. Это позволит рассмотреть вопрос о влиянии истории нагружения на концентрацию напряжений вблизи отверстий, который к настоящему времени является недостаточно изученным.

Постановка задачи. Рассматривается квадратная ($a \times a$) пластинка, ослабленная круговым отверстием радиуса r , находящаяся в условиях плоского напряженного состояния (рис. 1). К боковым границам пластинки приложены распределенные нормальные усилия $p_1 = p_1(t)$ и $p_2 = p_2(t)$. Нагружение считается квазистатическим. Материал пла-

стинки - упрочняющийся упругопластический. Его физико-механические характеристики считаются известными. Требуется определить компоненты напряженно-деформированного состояния пластинки в произвольный момент времени t .

Рис. 1 – Квадратная пластинка с круговым отверстием

Для описания процессов сложного упругопластического деформирования пластинки используются уравнения состояния теории пластичности, учитывающей микродеформации (В. В. Новожилова, Ю. И. Кадашевича, Ю.А. Чернякова) [2], которые для случая плоского напряженного состояния могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{11} &= a_{11}\dot{\epsilon}_{11} + a_{12}\dot{\epsilon}_{22} + a_{13}\dot{\epsilon}_{12}, \\ \dot{\sigma}_{22} &= a_{21}\dot{\epsilon}_{11} + a_{22}\dot{\epsilon}_{22} + a_{23}\dot{\epsilon}_{12}, \\ \dot{\tau}_{12} &= a_{31}\dot{\epsilon}_{11} + a_{32}\dot{\epsilon}_{22} + a_{33}\dot{\epsilon}_{12},\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= K + 2/3 \cdot A_{11}, \quad a_{12} = a_{21} = K - 1/3 \cdot A_{11} + 1/\sqrt{3} \cdot A_{12}, \\ a_{13} = a_{31} &= 2/\sqrt{3} \cdot A_{13}, \quad a_{22} = K + 1/6 \cdot A_{11} - 1/\sqrt{3} \cdot A_{12} + 1/2 \cdot A_{22}, \\ a_{23} = a_{32} &= A_{23} - 2/\sqrt{3} \cdot A_{13}, \quad a_{33} = A_{33}.\end{aligned}\quad (2)$$

Коэффициенты A_{ij} в (2) имеют вид:

$$A_{ij} = 2G\left(\delta_{ij} - G_{ij}^{(1)}\right),$$

где

$$G_{ij}^{(1)} = \left(\delta_{ij} + \frac{B_2}{B_1} G_{ik}^{(2)} \right)^{-1} G_{kj}^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
G_{kj}^{(2)} &= \frac{1}{B_1} \left(G_{kj} - \frac{\mu_1}{1 + \mu_1 \Omega} F_k F_j \right), \\
\Omega &= 2\pi \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2(\theta_1)} \int_0^{\alpha_3(\theta_1, \theta_2)} \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\
F_k &= 2\pi \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2(\theta_1)} \int_0^{\alpha_3(\theta_1, \theta_2)} \lambda_k \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\
G_{km} &= 2\pi \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2(\theta_1)} \int_0^{\alpha_3(\theta_1, \theta_2)} \lambda_k \lambda_m \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\
\lambda_1 &= \cos \theta_1, \lambda_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \lambda_3 = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь G – модуль сдвига; K – объемный модуль упругости; δ_{ij} – символ Кронекера; $\mu_1 = B_3/B_1$; B_1, B_2, B_3 – универсальные функции материала; λ_k – направление активного микропластического деформирования.

Для нахождения параметра α_1 и функций $\alpha_2(\theta_1)$, $\alpha_3(\theta_1, \theta_2)$, определяющих область направлений активного микропластического деформирования, используются соотношения

$$E(\lambda_k, t) \leq \mathfrak{E}_k \lambda_k, \tag{4}$$

$$\dot{r}_k \lambda_k - \frac{\mu}{1 + \mu \Omega} F_k \dot{r}_k > 0,$$

где $\dot{r}_k = \dot{S}_k - B_2 G_{km}^{(1)} \dot{\mathfrak{E}}_m$, $\dot{\mathfrak{E}}_m$, $\dot{S}_k$ – компоненты векторов скорости активных деформаций, деформаций и напряжений соответственно.

Изменение интенсивности разрешающих деформаций $E(\lambda_k, t)$ определяется с использованием формул

$$\dot{E}(\lambda_k, t_0) = \varepsilon_s, \dot{E}(\lambda_k, t) = \begin{cases} \dot{\mathfrak{E}}_k \lambda_k, & \lambda_k \lambda'_k = 1; \\ B_2 \dot{\mathfrak{E}}_k^p \lambda_k + \dot{\chi} & \lambda_k \lambda'_k \neq \pm 1; \\ \eta \dot{\mathfrak{E}}_k \lambda_k + B_2 \dot{\mathfrak{E}}_k^p \lambda_k + (1 + \eta) \dot{\chi} & \lambda_k \lambda'_k = -1. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $\dot{\chi} = \frac{\mu}{1 + \mu \Omega} F_k \dot{r}_k$; ε_s – начальный предел текучести по деформациям; η – универсальная функция материала.

С учетом того, что определяющие соотношения (1) – (5) записываются в скоростях, рассматриваемая граничная задача формулируется

также в скоростях. Она сводится к построению полей скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{11}$, $\dot{\sigma}_{22}$, $\dot{\tau}_{12}$, деформаций $\dot{\varepsilon}_{11}$, $\dot{\varepsilon}_{22}$, $\dot{\varepsilon}_{12}$ и перемещений v_1 и v_2 из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\tau}_{12}}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{\tau}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{22}}{\partial x_2} &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

к которой необходимо добавить определяющие соотношения (1) – (5) и граничные условия

$$\dot{\sigma}_{km} v_m = \dot{p}_k \text{ на } S_p, \quad v_k = v_{k0} \text{ на } S_v. \quad (7)$$

Решение задачи по определению полей напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , деформаций ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} и перемещений u_1 и u_2 при известном решении задачи в скоростях достигается вычислением квадратур

$$u_i = \int_{t_0}^t v_i dt, \quad \varepsilon_{ij} = \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}_{ij} dt, \quad \sigma_{ij} = \int_{t_0}^t \dot{\sigma}_{ij} dt, \quad (i, j = 1, 2). \quad (8)$$

Упругопластическая задача решается в приращениях. Задается траектория нагружения в пространстве внешней нагрузки. Далее дается приращение нагрузки, и на каждом шаге приращения ищется решение задачи. Найденные на каждом шаге решения суммируются до тех пор, пока нагрузка не достигнет заданного значения. В результате получаем искомые поля. Таким образом, можно записать:

$$\begin{aligned} \{P\}_i &= \{P\}_{i-1} + \{\Delta P\}_i, & \{u\}_i &= \{u\}_{i-1} + \{\Delta u\}_i, \\ \{\sigma\}_i &= \{\sigma\}_{i-1} + \{\Delta \sigma\}_i, & \{\varepsilon\}_i &= \{\varepsilon\}_{i-1} + \{\Delta \varepsilon\}_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Нижние индексы соответствуют номерам шагов; $\{P\}$, $\{u\}$, $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ обозначают нагрузку, перемещение, напряжение и деформацию, а $\{\Delta P\}$, $\{\Delta u\}$, $\{\Delta \sigma\}$, $\{\Delta \varepsilon\}$ их приращения.

Векторы $\{\Delta P\}$, $\{\Delta u\}$, $\{\Delta \sigma\}$ и $\{\Delta \varepsilon\}$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \{\Delta P\} &= \{\dot{P}\} \cdot \Delta t, & \{\Delta u\} &= \{\dot{v}\} \cdot \Delta t, \\ \{\Delta \sigma\} &= \{\dot{\sigma}\} \cdot \Delta t, & \{\Delta \varepsilon\} &= \{\dot{\varepsilon}\} \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (10)$$

где t – монотонно изменяющийся параметр.

Для решения задачи на каждом шаге используется принцип максимума для скоростей перемещений

$$\int_V (\dot{\sigma}_{11} \delta \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\sigma}_{22} \delta \dot{\varepsilon}_{22} + 2 \dot{\tau}_{12} \delta \dot{\varepsilon}_{12}) dV - \int_{S_p} (p_1 \delta v_1 + p_2 \delta v_2) dS = 0. \quad (11)$$

Для нахождения поля $\{v\}$, удовлетворяющего (11), применяется метод конечных элементов [4]. После сборки на i -м шаге решение упругопластической задачи сводится к определению скорости перемещений из глобальной системы нелинейных алгебраических уравнений равновесия для всего тела

$$[K(\{u_{i-1}\}, \{v_i\})] \{v_i\} = \{\dot{P}_i\}. \quad (12)$$

Для решения этой системы используется метод простой итерации, описываемый формулой

$$\{v_i^n\} = [K_{n-1}]^{-1} \{\dot{P}_i\}. \quad (13)$$

Результаты численного моделирования. При проведении численных расчетов рассмотрена квадратная ($a \times a$) пластинка, ослабленная круговым отверстием радиуса $r = 0,35a$. Материал пластинки – сталь 45. В силу симметрии задачи рассматривалась только четвертая часть пластинки. На рис. 2 представлены три разные схемы нагружения пластинки – OBA, OCA, ODA.

Рис. 2 – Схемы внешнего нагружения

На рис. 3,а приведены результаты расчетов зон пластичности, полученные в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, при соответствующих схемах внешнего нагружения (сплошная линия – OBA; штриховая – OCA; пунктирная – ODA). На рис. 3,б показаны зоны пластичности, полученные при схеме нагружения OBA, в рамках двух вариантов теории пластичности (сплошная линия – теория пластичности, учитывающая микродеформации; пунктирная линия – теория течения с изотропным упрочнением). Здесь же приведен результат расчета по деформационной теории (пунктирная линия) при простом нагружении по схеме OA.

**Рис. 3 – Зоны пластичности
при разных схемах нагружения пластинки**

На рис. 4 показаны точки в пластинке, для которых в процессе расчетов строились траектории деформации.

**Рис. 4 – Точки пластинки,
для которых построена траектория деформации**

На рис. 5 представлены траектории деформации в точках 1 – 4 пластинки, полученные при расчете по схеме нагружения ОВА. Эти результаты свидетельствуют о том, что в пластинке реализуются процессы сложного нагружения. При этом использование простейших вариантов теории пластичности не позволяет адекватно описывать напряженно-деформированное состояние пластинки.

Рис. 5 – Траектории деформации в разных точках пластинки
а) –1; б) –2; в) –3; г) – 4

Выводы. В рамках дифференциально-нелинейного варианта теории пластичности, учитывающей микродеформации, решена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругопластической пластинки, ослабленной круговым отверстием. При различных схемах её внешнего нагружения построены зоны пластичности в ней. Исследовано влияние истории нагружения на конфигурацию зон пластичности в окрестности отверстия. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что такое влияние может быть существенным.

Перспективным направлением дальнейших исследований представляется применение изложенного алгоритма для определения напряженно-деформированного состояния различных элементов конструкций, работающих в условиях сложного комбинированного нагружения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Грубин А. Н.** Нелинейные задачи концентрации напряжений в деталях машин. Л.: Машиностроение, 1972. 160 с.
2. **Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняков Ю. А.** Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // ПММ. 1986. Т.50. №6. С. 821–823.
3. **Махутов Н. А.** Концентрация напряжений и деформаций в упругопластической области деталей // Машиноведение. 1971. № 6. С. 54–60.
4. **Морозов Е. М., Никишков Г. П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. М: Наука, 1980. 250 с.
5. **Мустафин Ч. Г.** Приближенный расчет концентрации напряжений и деформаций в пластической области и при ползучести // Проблемы прочности. 1976. № 5. С. 78–87.
6. **Neuber H., Hahn H.G.** Stress concentration in scientific research and engineering // Applied Mechanics Reviews. 1966. 19. No. 3. P. 187–199.

К. В. Панін, канд. фіз.-мат. наук

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ ПРИ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Розглядається квазістатична задача про складне двохосьове навантаження квадратної пружно-пластичної пластинки з круговим отвором. В якості фізичних рівнянь використаний диференціально-нелінійний варіант теорії пластичності, що враховує мікродеформації. З використанням методу скінченних елементів отримані числові результати, що свідчать про те, що вплив історії навантаження на концентрацію напружень пластинки може бути значним.

Ключові слова: пластичність, пластинка, напружено-деформований стан, концентрація напружень, метод скінченних елементів, метод простої ітерації.

UDC 539.3

K. V. Panin, PhD (Phys.-Math.)

ELASTOPLASTIC STRESS CONCENTRATION

The quasistatic problem of biaxial complex loading of a square elastoplastic plate with a circular hole is considered. The equations of plasticity theory that takes into account microstrains are used as physical equations. Using the finite element method, numerical results were obtained, which indicate that the influence of the loading history on the stress concentration in the plate can be significant.

Keywords: plasticity, plate, stress-strain state, stress concentration, finite element method, simple iteration method.

At present, in the solution of elastoplastic boundary problems in which the concentration of stresses is studied, as a rule, the simplest theories of plasticity, such as the theory of small elastic-plastic strains and the theory of flow plasticity, are used [1, 3, 5, 6]. Obviously, the applicability of the solu-

tions obtained in this case is limited by the limitations of the possibilities of the theories used in describing the complex loading.

The problem of determining the stress-strain state of a rectangular plate with a circular hole is considered. An algorithm for solving a given boundary problem is proposed, when differential-nonlinear relations of the plasticity theory taking into account microstrains (Novozhilov, Kadashevich, Chernyakov) [2] are used as the physical equations.

This differential non-linear variant of the plasticity theory is to be used in investigation of inelastic deformation of polycrystalline metals. In the theories of such a type no uniform plastic strains caused both by a granular structure of a polycrystal and nonuniform distribution of damages is taken into account in an approximate way by presenting the tensor of plastic strain as a sum of unit plastic strains each of which has a correspondent yield surface and a correspondent system of internal forces. The presented approach has been based upon an assumption that statistics of anisotropic crystals can be replaced by statistics of isotropic particles having various yield limits and random field of microstresses and microstrains.

Mathematically, the boundary problem is formulated as a nonlinear boundary problem with respect to spatial coordinates and the Cauchy problem with respect to the loading parameter.

The algorithm is based on a variational formulation. The nonlinear variational problem by the variable elasticity parameter method reduces to a sequence of linear problems. Further, the standard procedure of the finite element method [4] is applied, which makes it possible to reduce the solution of the boundary value problem to the solution of a system of first-order differential equations with respect to the velocities of nodal displacements. The latter is achieved using the Euler method with intermediate iterations. At each step of the Euler method, the direction of active microplastic deformation is determined by the simple iteration method. As the basic for the finite element method, an isoparametric quadrangular finite element is used. To calculate the stiffness matrices of finite elements, effective algorithms are proposed that allow decreasing the number of multiple integrals to be calculated in the defining relations of the theory of plasticity, taking into account microstrains up to the dimensionality of the loading trajectory.

The described algorithm is implemented as a FORTRAN program. With its help, calculations were made of the stress-strain state of a rectangular plate with a circular hole under various schemes of external loading. Taking into account the processes of complex loading, stress-strain state, zones of plasticity near the hole were built and stress concentration coefficients were found. It is shown that the loading history can have a significant effect on the stress-strain state of a plate with a hole and on the stress concentration. Comparison of the results obtained with calculations using the simplest plasticity theories is also carried out. It indicates that the simplest variants of the theory of plasticity, usually used in calculations, make it possible to obtain satisfactory results only under simple loading. In the case of complex loading, it is necessary to use such variants of the theory of plasticity, which more adequately describe the elastic-plastic behavior of the material.

REFERENCES

1. **Grubin A. N.** Non-linear stress concentration problems in machine parts. Leningrad: Mashinostroenie, 1972. 160 c. (in Russian).
2. **Kadashevich Yu. I., Novozhilov V. V., Chernyakov Yu. A.** Theory of plasticity and creep taking into account microstresses // Applied Mathematics and Mechanics. 1986. T. 50. No 6. P. 821–823. (in Russian).
3. **Makhutov N. A.** Concentration of stresses and deformations in the elastoplastic area of parts // Mashinovedenie. 1971. No 6. C. 54–60. (in Russian).
4. **Morozov E. M., Nikishkov G. P.** Finite element method in fracture mechanics. Moscow: Nauka, 1980. 256 p. (in Russian).
5. **Mustafin Ch. G.** Approximate calculation of stress concentration and deformation in plasticity and creep // Problems of Strength. 1976. No 5. C. 78–87. (in Russian).
6. **Neuber H., Hahn H. G.** Stress concentration in scientific research and engineering // Applied Mechanics Reviews. 1966. Vol. 19. No. 3. P. 187–199.

*Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 05.04.2019