DOI: 10.15421/4219026
УДК 539.3

А. П. Дзюба, д-р техн. наук, І. А. Сафронова, Л. Д. Левитіна

АЛГОРИТМ РОЗРАХУНКУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ ЗМІННОЮ В ОКРУЖНОМУ НАПРЯМКУ ЖОРСТКІСТЮ НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПІДХОДУ

Викладено алгоритм дискретно-континуального методу прямих для розрахунку напружено-деформованого стану циліндричної оболонки довільно змінної у меридіональному і окружному напрямку товщиною стінки при несиметричному навантаженні. Прискорення збіжності здійснюється за допомогою розробленого алгоритму прогнозування. Подані результати числового аналізу.

***Ключові слова:** циліндрична оболонка, змінна в двох напрямках жорсткість, дискретно-континуальна модель, прискорення збіжності.*

Вступ. Практика сучасного машинобудування, зокрема, створення авіаційної та ракетно-космічної техніки при наявності вимог максимальної конструктивної ефективності і найбільшої міцності характеризується широким застосуванням кругових циліндричних оболонок. Розвиток сучасних технологій машинобудування уже сьогодні дозволяє виготовляти конструктивні оболонкові елементи неоднорідної структури, зокрема змінної жорсткості, які виявляються більш ефективними з точки зору матеріаломісткості, міцності, надійності та інших показників [2, 3, 5 – 8, 11, 14 – 16].

При всій різноманітності застосовуваних у механіці методів досліджень, задачі розрахунку напружено-деформованого стану довільно навантажених оболонок і пластинок зі змінною у двох напрямках товщиною стінки залишаються все ще недостатньо дослідженими.

При цьому слід зазначити, що використання методу скінчених елементів для розрахунку таких оболонок [9, 12] в ряді випадків виявляється ускладненим. Зокрема, в задачах оптимального проектування, коли закони змінювання товщини стінки оболонки виявляються різними на кожному кроці ітераційного оптимізаційного алгоритму [11], або в задачах дослідження довговічності тонкостінних елементів, що функціонують в агресивному середовищі, коли товщина стінки оболонки змінюється з часом в результаті корозійної деградації поверхні [15]. У цих випадках виникає проблема перебудови скінченно-елементної сітки в залежності від зміни товщини стінки в процесі відповідного ітераційного алгоритму, що суттєво ускладнює можливість безпосереднього застосування відомих пакетів скінченно-елементного розрахунку [9].

Слід зазначити, що змінність товщини в двох напрямках не дозволяє звести вихідну задачу до систем звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладень основних параметрів поведінки оболонки в тригонометричні ряди за круговою координатою при застосуванні методу Фур'є аналогічно випадку змінності товщини стінки лише у повздовжньому напрямку [14].

Одним з підходів (див. [5 – 8]) до розв'язування задач розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних оболонок зі змінною у двох напрямках товщиною стінки є подання частинних похідних за окружною координатою у різницевому вигляді. Далі задача зводиться до вирішення крайової задачі для $8 \times m$ звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами в меридіональному напрямку, де m – кількість (в окружному напрямі) «вузлових» ліній у напрямку твірної. Таким чином, змінність товщини стінки оболонки в окружному напрямку враховується при різницевому поданні відповідних похідних математичної моделі за круговою координатою, а змінність товщини вздовж меридіану враховується при розв'язуванні виникаючих крайових задач з застосуванням методу прогонки з ортогоналізацією за С. К. Годуновим [4].

Зазначений дискретно-континуальний підхід є достатньо ефективним засобом розв'язання таких задач. У той же час відмінність величин коефіцієнтів рівнянь для двох сусідніх, часто досить близьких (для підвищення точності розрахунку) ліній часто виявляється досить малою, що може призвести до поганої обумовленості матриці коефіцієнтів відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що виникають в методі прогонки, і, як наслідок, до збільшення похибки обчислень та інших проблем чисельної реалізації алгоритму.

Побудова вихідних рівнянь. Рівняння напружено-деформованого стану моментної теорії для ізотропних пружних тонкостінних циліндричних оболонок зі змінною товщиною стінки $h = h(s, \varphi)$ при несиметричному навантаженні можуть бути зведені до системи восьми рівнянь у частинних похідних, які можна подати у вигляді [2, 5, 7].

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= -\frac{\mu}{r} u + \frac{1}{Kr} (N_1 r) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{2}{K(1-\mu)r} (S_1^* r) - \left(\frac{1}{r} + \frac{4D}{Kr^3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -\vartheta; \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial s} &= \frac{(M_1 r)}{Dr} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{\partial(N_1 r)}{\partial s} = \frac{2(1-\mu)}{r^3} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} - \frac{2D(1-\mu)}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2D(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial(S_1^* r)}{\partial \varphi} - r q_1;$$

$$\frac{\partial(S_1^* r)}{\partial s} = -\frac{(1-\mu^2)}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial(M_1 r)}{\partial \varphi} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial(N_1 r)}{\partial \varphi} - \frac{K(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{(1-\mu^2)}{r} \left(\frac{1}{r} K + \frac{1}{r^3} D \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{(1-\mu^2)}{r} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - r q_2;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Qr)}{\partial s} = & \frac{K(1-\mu^2)}{r} w + \frac{\mu}{r} (N_1 r) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2(M_1 r)}{\partial \varphi^2} - \frac{2D(1-\mu)}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \\ & - \frac{2D(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{D(1-\mu^2)}{r^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \frac{(1-\mu^2)}{r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} - K \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{2(1-\mu^2)}{r^3} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{2(1-\mu^2)}{r^3} \frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{D(1-\mu^2)}{r^3} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \\ & + \frac{2(1-\mu^2)}{r^3} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - r q_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(M_1 r)}{\partial s} = & (Qr) - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} + \frac{2(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial D}{\partial \varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{2D(1-\mu)}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{2D(1-\mu)}{r} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2}; \end{aligned}$$

де $s_0 \leq s \leq s_l$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ – координати в меридіональному та окружному напрямках; $u, v, w, \vartheta_1, N_1 r, S_1^* r, Q_1^* r, M_1 r$ – компоненти (в загальноприйнятих позначеннях [2]) вектора основних змінних напружено-деформованого стану циліндричної оболонки, під дією розподіленого зовнішнього навантаження $q_1(s, \varphi)$, $q_2(s, \varphi)$, $q_3(s, \varphi)$; $K = Eh / (1 - \mu^2)$, $D = Eh^3 / (12(1 - \mu^2))$ – жорсткість на розтяг та циліндрична жорсткість, відповідно; E, μ, r – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і радіус оболонки, відповідно.

Для розв'язання системи (1) пропонується використання методу прямих [3 – 8, 17], суть якого полягає в заміні похідних за окружною координатою на різницеві схеми, що дозволяє отримати сукупність одновимірних задач вздовж кожного i -го ($i = \overline{1, m}$) меридіану (рис. 1), розв'язок яких здійснюється методом прогонки з ортогоналізацією за С. К. Годуновим [3, 4] за вузловими точками j ($j = \overline{1, N}$).

У залежності від способу заміни похідних різницевиими співвідношеннями можна мати різні системи методу прямих, що відрізняються точністю апроксимуючих співвідношень для похідних.

Вважаючи, що параметри стану оболонки є достатньо гладкими в коловому напрямі, в поданій роботі частинні похідні за змінною $\varphi = \varphi_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$) рівнянь (1) замінюються скінченними різницями четвертого порядку точності [13]:

Рис. 1 – Схема поділу поверхні оболонки вузловими точками

$$\begin{aligned} y' &= (y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}) / (12\Delta); \\ y'' &= (-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2}) / (12\Delta^2); \\ y''' &= (y_{i-3} - 8y_{i-2} + 13y_{i-1} - 13y_{i+1} + 8y_{i+2} - y_{i+3}) / (8\Delta^3); \\ y^{iv} &= (-y_{i-3} + 12y_{i-2} - 39y_{i-1} + 56y_i - 39y_{i+1} + 12y_{i+2} - y_{i+3}) / (6\Delta^4), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\Delta = \Delta\varphi_i$ крок різницевої сітки в окружному напрямку з похибкою апроксимації $O(\Delta^4)$.

Слід зазначити, що метод прямих, як правило, вносить меншу похибку у порівнянні з методом сіток, хоча іноді вимагає більших обчислювальних витрат для доведення результату «до числа». При цьому питання збіжності наближених розв'язків, отриманих по методу прямих, для основних різницевих рівнянь математичної фізики вивчені досить повно [1], в той час як для рівнянь теорії оболонок ці питання залишаються менш дослідженими.

Після заміни похідних за координатою φ в системі рівнянь (1) у відповідності з (2) та зведення подібних членів при компонентах вектора напружено-деформованого стану $\bar{Y} = (u, v, w, \vartheta_1, N_1 r, S_1^* r, Q_1^* r, M_1 r)^T$ для кожної i -ої ($i = 1, 2, \dots, m$) смуги можна отримати крайову задачу для системи 8^*m звичайних диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned}
\frac{du_i}{ds} &= -\mu \frac{1}{r} w_i + \frac{1}{K_i r} (N_1 r)_i - \mu \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (v_{i-2} - 8v_{i-1} + 8v_{i+1} - v_{i+2}); \\
\frac{dv_i}{ds} &= \frac{2}{K_i (1-\mu)} \frac{1}{r} (S_1^* r)_i - \left(\frac{1}{r} + \frac{4D_i}{K_i r^3} \right) \frac{1}{12\Delta} (u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}) + \\
&\quad + \frac{4D_i}{K_i r^2} \frac{1}{12\Delta} (\vartheta_{1i-2} - 8\vartheta_{1i-1} + 8\vartheta_{1i+1} - \vartheta_{1i+2}); \\
\frac{dw_i}{ds} &= -\vartheta_{1i}; \\
\frac{d\vartheta_{1i}}{ds} &= -\mu \frac{1}{r^2} \frac{30}{12\Delta^2} w_i + \frac{1}{D_i r} (M_1 r)_i - \mu \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta} (v_{i-2} - 8v_{i-1} + 8v_{i+1} - v_{i+2}) + \\
&\quad + \mu \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta^2} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} + 16w_{i+1} - w_{i+2}); \\
\frac{d(N_1 r)_i}{ds} &= -\frac{2D_i (1-\mu)}{r^3} \frac{30}{12\Delta^2} u_i - \frac{2D_i (1-\mu)}{r^2} \frac{30}{12\Delta^2} \vartheta_{1i} + \\
&\quad + \frac{2(1-\mu)}{r^3} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \frac{1}{12\Delta} (u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}) - \\
&\quad - \frac{2(1-\mu)}{r^2} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \frac{1}{12\Delta} (\vartheta_{1i-2} - 8\vartheta_{1i-1} + 8\vartheta_{1i+1} - \vartheta_{1i+2}) - \\
&\quad - \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (S_1^*)_i + \\
&\quad + \frac{2D_i (1-\mu)}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} (-u_{i-2} + 16u_{i-1} + 16u_{i+1} - u_{i+2}) - \\
&\quad - \frac{2D_i (1-\mu)}{r^2} \frac{1}{12\Delta^2} (-\vartheta_{1i-2} + 16\vartheta_{1i-1} + 16\vartheta_{1i+1} - \vartheta_{1i+2}) - r q_{1i}; \\
\frac{\partial (S_1^* r)_i}{\partial s} &= - \left(\frac{\partial K}{\partial \varphi} \right)_i (1-\mu^2) \frac{1}{r} w - \\
&\quad - (1-\mu^2) \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial K}{\partial \varphi} \right)_i + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \right) \frac{1}{12\Delta} (v_{i-2} - 8v_{i-1} + 8v_{i+1} - v_{i+2}) - \\
&\quad - K_i (1-\mu^2) \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (w_{i-2} - 8w_{i-1} + 8w_{i+1} - w_{i+2}) - \\
&\quad - \mu \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} ((N_1 r)_{i-2} - 8(N_1 r)_{i-1} + 8(N_1 r)_{i+1} - (N_1 r)_{i+2}) -
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta} \left((M_1 r)_{i-2} - 8(M_1 r)_{i-1} + 8(M_1 r)_{i+1} - (M_1 r)_{i+2} \right) - \\
& - \left(1 - \mu^2 \right) \left(K_i \frac{1}{r} - D_i \frac{1}{r^3} \right) \frac{1}{12\Delta^2} (-v_{i-2} + 16v_{i-1} - 30v_i + 16v_{i+1} - v_{i+2}) + \\
& + \frac{1}{r^3} \left(1 - \mu^2 \right) \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \frac{1}{12\Delta^2} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} - 30w_i + 16w_{i+1} - w_{i+2}) + \\
& + \left(1 - \mu^2 \right) D_i \frac{1}{r^3} \frac{1}{8\Delta^3} (w_{i-3} - 8w_{i-2} + 16w_{i-1} - 13w_{i+1} + 8w_{i+2} - w_{i+3}) - r q_{2i};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(Q_1^* r)_i}{ds} &= \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \left(1 - \mu^2 \right) \frac{2}{r^3} \frac{30}{12\Delta^2} v_i + \\
& + \left(1 - \mu^2 \right) \left(K_i \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right)_i \frac{1}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} + D_i \frac{1}{r^3} \frac{56}{6\Delta^4} \right) w_i + \mu \frac{1}{r} (N_1 r)_i + \\
& + \frac{\mu}{r^2} \frac{30}{12\Delta} (M_1 r)_i - \left(1 - \mu^2 \right) \frac{1}{r} \left(\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right)_i \frac{1}{r^2} - K_i \right)^* \\
& * \frac{1}{12\Delta} (v_{i-2} - 8v_{i-1} + 8v_{i+1} - v_{i+2}) - \\
& - \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \left(1 - \mu^2 \right) \frac{2}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} (-v_{i-2} + 16v_{i-1} + 16v_{i+1} - v_{i+2}) - \\
& - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right)_i \left(1 - \mu^2 \right) \frac{1}{r^3} \frac{1}{12\Delta^2} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} + 16w_{i+1} - w_{i+2}) - \\
& - \frac{\mu}{r^2} \frac{1}{12\Delta} \left((M_1 r)_{i-2} + 16(M_1 r)_{i-1} + 16(M_1 r)_{i+1} - (M_1 r)_{i+2} \right) - \\
& - D_i \left(1 - \mu^2 \right) \frac{1}{r^3} \frac{1}{8\Delta^3} * \\
& * (v_{i-3} - 8v_{i-2} + 13v_{i-1} - 13v_{i+1} + 8v_{i+2} - v_{i+3}) + \\
& + \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \left(1 - \mu^2 \right) \frac{2}{r^3} \frac{1}{8\Delta^3} (w_{i-3} - 8w_{i-2} + 13w_{i-1} - 13w_{i+1} + 8w_{i+2} - w_{i+3}) + \\
& + D_i \left(1 - \mu^2 \right) \frac{1}{r^3} \frac{1}{6\Delta^4} * \\
& * (-w_{i-3} + 12w_{i-2} - 39w_{i-1} - 39w_{i+1} + 12w_{i+2} - w_{i+3}) - r q_{3i};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(M_1 r)}{ds} = & -2D(1-\mu) \frac{1}{r^2} \frac{30}{12\Delta^2} u_i + 2D(1-\mu) \frac{1}{r} \frac{30}{12\Delta^2} \vartheta_{1i} + (Q_1^* r) + \\
& + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta} (u_{i-2} - 8u_{i-1} + 8u_{i+1} - u_{i+2}) - \\
& - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta} (\vartheta_{1i-2} - 8\vartheta_{1i-1} + 8\vartheta_{1i+1} - \vartheta_{1i+2}) + \\
& + 2D(1-\mu) \frac{1}{r^2} \frac{1}{12\Delta^2} (-u_{i-2} + 16u_{i-1} + 16u_{i+1} - u_{i+2}) - \\
& - 2D(1-\mu) \frac{1}{r} \frac{1}{12\Delta^2} (-\vartheta_{1i-2} + 16\vartheta_{1i-1} + 16\vartheta_{1i+1} - \vartheta_{1i+2}).
\end{aligned}$$

Тут $\Delta = \Delta\varphi_i$, $\Delta\varphi_i = 2\pi/m$, $\varphi_i = \Delta\varphi_i(i-1)$;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial K}{\partial \varphi} \right)_i &= \frac{K_{i-2} - 8K_{i-1} + 8K_{i+1} - K_{i+2}}{12\Delta}; \\
\left(\frac{\partial D}{\partial \varphi} \right)_i &= \frac{D_{i-2} - 8D_{i-1} + 8D_{i+1} - D_{i+2}}{12\Delta}; \\
\left(\frac{\partial^2 D}{\partial \varphi^2} \right)_i &= \frac{-D_{i-2} + 16D_{i-1} - 30D_i + 16D_{i+1} - D_{i+2}}{12\Delta^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Вирази для N_2 , M_2 і M записуються, за необхідності, через основні змінні з використанням скінченних різниць. Для чисельного розв'язування виникаючої одновимірної крайової задачі використовується метод дискретної ортогоналізації С. К. Годунова [4].

Слід зазначити, що для замкненої циліндричної оболонки при заміні похідних в окружному напрямку їх різницевиими поданнями використовуються лише центральні різниці. Що стосується виконання крайових умов, то для випадку відкритої оболонки на кінцях інтервалу апроксимації застосовуються однібічні різниці, де для прямих 0 і n враховуються значення відповідних параметрів, обумовлених умовами закріплення. Граничні умови на меридіональних краях оболонки ($s=0$, $s=L$, де L – довжина оболонки) враховуються при розв'язанні крайової задачі вздовж меридіана методом прогонки.

Алгоритм розв'язання задачі. В роботах [5 – 8] пропонується загальний алгоритм вирішення сформульованої задачі шляхом розв'язування повної системи 8^*m рівнянь (3). До труднощів реалізації такого підходу слід віднести забезпечення стійкості розв'язування крайової задачі для системи диференціальних рівнянь з досить значною 8^*m кількістю невідомих та змінними коефіцієнтами, а також близькістю значень коефіцієнтів рівнянь для двох сусідніх прямих. У поданій статті розв'язування задачі пропонується здійснювати шляхом декомпозиції розглядуваної системи з застосуванням методу прямих і послідовних наближень.

Суть модифікації підходу полягає в тому, що замість розв'язування крайової задачі для всієї системи із $8*m$ рівнянь (3) в загальній схемі послідовних наближень m раз розв'язуються окремі системи по 8 рівнянь для кожного $i = \overline{1, m}$. При цьому значення параметрів в (3) з відмінними від i індексами приймаються до розгляду за результатами розрахунку на попередній ітерації. Якщо на першому кроці рішення (хоча б якесь наближене) поставленої задачі виявляється невідомим, то ці значення приймаються нульовими. Критерієм збіжності служить умова близькості двох послідовних розв'язків на ω -ому і $(\omega + 1)$ -ому кроці наближень по одній або декільком змінним, зокрема, у вигляді

$$\max_{i,j} \left| \bar{Y}^{(\omega+1)} - \bar{Y}^\omega \right| / \left| Y^{(\omega+1)} \right| \leq \varepsilon; \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (5)$$

Таким чином, якщо процес збігається за ω кроків, то для розв'язування задачі розрахунку необхідно $\omega*m$ разів розв'язати крайову задачу для системи восьми звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Для забезпечення збіжності та зменшення кількості наближень ω використовується наступний підхід.

Суть розробленого алгоритму для прискорення збіжності розв'язування послідовності крайових задач полягає у використанні екстраполяцій значень складових коефіцієнтів системи рівнянь (3) (які не належать до i -ї прямої на поточний момент інтегрування відповідних 8-ми рівнянь (3)) на основі результатів вдалих попередніх кроків розрахунку та побудови прогноз-точок замість інтегрування всієї системи $8*m$ рівнянь (3) [10].

Це дозволяє замінити процес розв'язування крайової задачі для $8*m$ рівнянь обчисленнями за простими формулами на певних кроках ітераційного процесу. В якості екстраполяційних методів пропонується використовувати комбінації методів релаксуючих множників (лінійної екстраполяції) та поліномів Лагранжа і Ньютона (в формі аналогу методу Адамса) та ітераційного процесу Ейткена – Стеффенсена [10, 17].

На перших трьох кроках ітераційного процесу складові $\bar{Y}_{i \pm k}^{(\omega-1)}$ уточнюються з використанням методу верхньої релаксації

$$\bar{Y}_{i \pm k}^{(\omega+1)} = \bar{Y}_{i \pm k}^\omega + \gamma \left(\bar{Y}_{i \pm k}^{\omega*} - \bar{Y}_{i \pm k}^{(\omega-1)} \right). \quad (6)$$

Для $n = 0$ задача розв'язується при початковому значенні компонентів $\bar{Y}_{i \pm k}^0$, де $\bar{Y}_{i \pm k}^{\omega*}$ – значення компонент вектора основних змінних, безпосередньо отриманих на ω -му кроці наближень.

Визначення невідомих складових вектора $\bar{Y}_{i \pm k}^{(\omega+1)}$ основних змінних системи (3) на наступних кроках ітераційного процесу полягає в екстраполяції (імітації) їх значень за результатами значень цих параметрів $\bar{Y}_{i \pm k}^{(\omega-2)}, \bar{Y}_{i \pm k}^{(\omega-1)}, \bar{Y}_k^\omega$ (де k може приймати значення у відповідності з (2)) на

трьох попередніх ω , $\omega - 1$, $\omega - 2$ кроках ітераційного процесу, отриманих шляхом розв'язування відповідних крайових задач методом прогонки для кожної із вузлових ліній φ_i (прямих) інтегрування системи (3) з урахуванням (6).

При цьому форма прогнозу поділяється за виглядом ітераційного процесу. У випадку, коли послідовність компонентів векторів $\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-2)}, \bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)}, \bar{Y}_{i\pm k}^{\omega}$ немонотонна $\left(\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)} - \bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-2)}\right)\left(\bar{Y}_{i\pm k}^{\omega} - \bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)}\right) < 0$, прогноз пропонується здійснювати за формулою Ейткена – Стеффенсена [17]

$$\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega+1)} = \frac{\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-2)} - \left(\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)}\right)^2}{\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-2)} - 2\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)} + \bar{Y}_{i\pm k}^{\omega}}, \quad \omega \geq 2, (i = \overline{0, m}), (k = 1, 2, 3), \quad (7)$$

а у випадку, коли процес для компонентів цих векторів монотонний $\left(\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)} - \bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-2)}\right)\left(\bar{Y}_{i\pm k}^{\omega} - \bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)}\right) \geq 0$ – у формі аналогу методу Адамса

$$\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega+1)} = \frac{23\bar{Y}_{i\pm k}^{\omega} - 16\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-1)} + 5\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega-2)}}{12}, \quad \omega \geq 2, (i = \overline{0, m}), (k = 1, 2, 3), \quad (8)$$

що ґрунтується на екстраполяційних залежностях Лагранжа і Ньютона і, як відомо, є досить ефективним при розв'язуванні задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Далі, за основним алгоритмом, знову здійснюється розв'язування послідовності (для $i = \overline{0, m}$) крайових задач на двох наступних кроках і процес продовжується до досягнення заданої точності з урахуванням одержаних трьох нових точок, починаючи з прогноз-точка.

Такий підхід дозволяє уникати необхідності «зайвого» розв'язання крайової задачі на кожному третьому кроці. Крім того, обчислювані прогнозні значення $\bar{Y}_{i\pm k}^{(\omega+1)}$ часто виявляються більш близькими до відшукованого розв'язку ніж ті, що могли б бути отримані за основним ітераційним процесом. Все це дозволяє суттєво скоротити кількість ітерацій методу послідовних наближень.

Числові дослідження. Як приклад, що ілюструє можливості підходу, розглянута задача розрахунку кругової циліндричної оболонки, геометрія та інші параметри якої відповідають прийнятим в [7] (стор. 168). Несиметричне навантаження внутрішнім тиском задається у вигляді $q_n(s, \varphi) = q_0(1 + 0.3 \cos \varphi) \sin(\pi s / L)$, а товщина оболонки змінюється за законом $h = h_0(1 + 0.3 \cos \varphi)$, $q_0 = \text{const}$, $h_0 = \text{const}$. Поперечний перетин такої оболонки для $s = L/2$ зображено на рис. 2.

Розглянуто випадки для затиснутих та шарнірно-закріплених торців оболонки. Крайові умови для цих випадків приймаються у вигляді:

$$1) \omega = u = v = \vartheta_1 = 0; \quad 2) u = v = w = M_1 = 0. \quad (9)$$

У відповідності до методу прямих кількості смуг вздовж напрямної (для половини перерізу оболонки у зв'язку з симетрією) була прийнята $m = 30$, а точок інтегрування за методом С. Г. Годунова – 60. Слід зазначити, що на відміну від [7] збільшення цих параметрів (за необхідності більш точного врахування параметрів неоднорідності оболонки) не призводить до зниження ефективності підходу.

На рис. 3 та рис. 4 подані розподіл прогинів w та напружень σ_2 на внутрішній поверхні оболонки уздовж твірної при $\varphi = 0$, лінія 1, лінія 2 відповідно для випадків закріплення країв (9). Відхилення від даних, наведених в [7], не перебільшує 0,15%.

Рис. 2 – Навантаження та розподіл матеріалу у поперечному перетині оболонки

Рис. 3 – Розподіл прогинів в оболонці з різними граничними умовами

Рис. 4 – Розподіл напружень в оболонці з різними граничними умовами

Далі приведені результати розрахунку циліндричної оболонки під внутрішнім тиском $q = 1$ МПа з параметрами $r = 0,5$ м; $L = 2,5$ м; $\mu = 0,3$; $E = 1,9 \cdot 10^{11}$ Па; $h = h_0(1 + \cos(\varphi/2))$; $h_0 = 0,005$ м. При $s = 0$ крайові умови прийняті у вигляді затиснення, а при $s = L$ – шарнірного закріплення (див. (9)). На рис. 5 приведені графіки залежностей згинального моменту M_1 уздовж оболонки при $\varphi = 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180^\circ$ – лінії (1) – (7), відповідно.

Збіжність методу послідовних наближень, на кожному кроці якого розв'язувалась по m крайових задач для системи із 8-ми рівнянь, була забезпечена за 7 ітерацій. Розрахунки основних параметрів напружено-деформованого стану для випадку оболонки постійної товщини співпа-

дають з точним (аналітичним) розв'язком з розбіжністю не більше 0,2%, що вказує на високу достовірність розробленого алгоритму.

Рис. 5. – Залежності згинального моменту M_1 за довжиною оболонки

Висновки. У поданій роботі представлено модифікований варіант алгоритму реалізації дискретно-континуального методу прямих для дослідження впливу довільно змінної (в окружному та меридіональному напрямках) товщини стінки циліндричної оболонки на параметри її напружено-деформованого стану.

Поєднання різницевого (в окружному напрямку) та континуального (в меридіональному напрямку) подання рівнянь стану оболонки у вигляді сукупності крайових задач для системи диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами і подальшого застосування методу послідовних наближень та методики прискорення збіжності дозволило побудувати ефективний алгоритм реалізації підходу.

Такий підхід може бути ефективно застосованим в задачах вагової оптимізації, дослідження корозійної деградації матеріалу стінок оболонок обертання та в інших галузях. Достовірність алгоритму продемонстрована порівняннями з результатами відомих досліджень.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.** Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.
2. **Бидерман В. Л.** Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
3. **Булакаєв П. І., Дзюба А. П., Сафронова І. А.** Дискретно – континуальний алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану оболонок обертання змінної у двох напрямках жорсткості // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Д.: Ліра, 2011. Вип. 16. С. 69–78.

4. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук. 1961. Т. 16. Вып. 3 (99). С. 171–174.
5. **Григоренко Я. М., Василенко А. Т.** Методы расчета оболочек. Теория оболочек переменной жесткости. К.: Наукова думка, 1981. Т. 4. 544 с.
6. **Григоренко Я. М., Драйгор Н. Д., Шинкарь А. И.** К решению задач о напряженном состоянии ортотропных цилиндрических оболочек с переменной жесткостью в двух направлениях // Сопротивление материалов и теория сооружений. М. 1977. Вып. 30. С. 3–10.
7. **Григоренко Я. М., Мукоед А. П.** Решение задач теории оболочек на ЭВМ. К.: Вища школа, 1979. 280 с.
8. **Григоренко А. Я., Яремченко Н. П., Яремченко С. Н.** Напряженно-деформированное состояние прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины при различных граничных условиях // Доп. НАН Украины. 2016. № 6. С.31–37.
9. **Дашенко А. Ф., Лазарева Д. В., Сурьянинов Н. Г.** ANSYS в задачах инженерной механики: монография. Изд. 2-е перероб и доп. / под ред. Сурьянинова Н. Г. Харьков: «Бурун и К», 2011. 504 с.
10. **Дзюба А. П., Сафронова І. А.** Алгоритми прискорення збіжності ітераційних процесів розрахунку оболонок обертання складної форми меридіану при великих переміщеннях // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2015. Вип. 19. Т. 2. С.38–55.
11. **Дзюба А. П., Сіренко В. М., Дзюба А. А., Сафронова І. А.** Моделі та алгоритми оптимізації елементів неоднорідних оболонкових конструкцій // в кн.: Актуальні проблеми механіки: монографія / під ред. М. В. Полякова. Д.: Ліра. 2018. 225–243 с.
12. **Зенкевич В.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
13. **Иванов В. В.** Методы вычислений на ЭВМ: справочное пособие. К.: Наукова думка, 1986. 584 с.
14. **Мяченков В. И., Григорьев И. В.** Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 212 с.
15. **Овчинников И. Г., Почтман Ю. М.** Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа: Расчет и оптимизация. Д., 1995. 190 с.
16. **Синева Н. Ф., Селиванов Ф. С., Никитюк Д. В.** Расчёт цилиндрической оболочки переменной жесткости, взаимодействующей с нелинейно упругим основанием // Вестн. Саратовского ГТУ, Сер.: Строительство и архитектура. 2011. № 4(60). Вып. 2. С.15–21.
17. **Шаманский В. Е.** Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. К.: АН УССР, 1963. Ч. 1. 196 с., 1966. Ч. 2. 242 с.

УДК 539.3

А. П. Дзюба, д-р техн. наук, І. А. Сафронова, Л. Д. Левитина

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПЕРЕМЕННОЙ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ ЖЕСТКОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА

Изложен алгоритм дискретно-континуального метода прямых для расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с переменной в меридиональном и окружном направлениях толщиной стенки при несимметричном нагружении. Ускорение сходимости осуществляется с помощью разработанного алгоритма прогнозирования. Представлены результаты численного анализа.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, переменная в двух направлениях жесткость, дискретно-континуальная модель.

UDC 539.3

A. P. Dzyuba, Dr. Sci. (Tech.), I. A. Safronova, L. D. Levitina

CALCULATION ALGORITHM ON THE BASIS OF A DISCRETE-CONTINUOUS APPROACH FOR CYLINDRICAL SHELL OF VARIABLE RIGIDITY IN CIRCULAR DIRECTION

The algorithm of the discrete-continuum method for calculating the stress-strain state of a cylindrical shell of an arbitrary variable in the meridional and circumferential direction of the wall thickness under asymmetric load is described. The convergence is accelerated using the developed prediction algorithm. Numerical analysis results are presented.

Keywords: cylindrical shell, variable in two directions stiffness, discrete-continuous model.

With all the variety of research methods used in mechanics, the problems of calculating the stress-strain state of arbitrarily loaded shells and plates with a variable in two directions of the wall thickness are still insufficiently investigated [2, 3, 5 – 8, 11, 14 – 16].

One approach to solving the problems of calculating the stress-strain state of cylindrical shells with a variable in two directions of the wall thickness is to represent partial derivatives by a circular coordinate in the difference form [5 – 8]. Then the problem comes to the boundary problem of $8 \times m$ ordinary differential equations with variable coefficients in the meridional direction, where m is the number (in the circumferential direction) of the "nodal" lines in the direction of the generatrix.

This discrete-continuum approach is a enough effective way of solving such problems. At the same time, the difference between the values of the coefficients of the equations for two adjacent, often quite close (to improve the accuracy of calculation) lines is often quite small. This can lead to low conditionality of the matrix of coefficients of the corresponding system of linear algebraic equations arising in the sweep method and, as a consequence, to increase the error of calculations and other problems of numerical implementation of the algorithm.

This paper proposes a modification of this approach, the essence of which is that instead of solving the boundary-value problem for the whole system with $8 \times m$ equations in the iterative process, we solve m times 8 systems for each $i = \overline{1, m}$. The values of parameters with indices other than i are taken into consideration by the results of the calculation of the previous iteration. The convergence criterion is the condition of the closeness of two consecutive solutions on the ω -th and $(\omega+1)$ -th step of approximations of one or more variables.

To accelerate the convergence of boundary-order sequences, it is suggested to use extrapolation of the coefficients of the system of equations of the shell state equation, which do not belong to the i -th straight line at the moment of integration of the corresponding 8 equations, based on the results of successful previous steps of calculation and construction of forecast points instead of simultaneous integration of the whole system of $8 \times m$ equations [9].

This allows the individual steps of the iterative process to replace the solution of the boundary-value problem for $8 \times m$ equations by simple formulas. As extrapolation methods, it is proposed to use combinations of relaxation factor methods (linear extrapolation) and Lagrangian and Newton polynomials (in the form of the Adams method) and the Aitken - Steffensen iteration process [10].

The combination of differential (in the circumferential direction) and continuous (in the meridional direction) representation of the equations of state of the shell in the form of a set of boundary value problems for a system of differential equations with variable coefficients and the subsequent application of the method of successive approximations and methods of acceleration of convergence allowed to build an effective algorithm.

The influence of arbitrary variable (in the circumferential and meridional directions) of the thickness of the wall of a cylindrical shell on the parameters of its stress-strain state is investigated.

In general, this approach might be useful for solving the problems of weight optimization, the study of corrosion degradation of the material of the walls of the shells of revolution and in other fields. The reliability of the algorithm is demonstrated by comparison with the results of known studies.

REFERENCES

1. **Babushka I., Vitasek E., Prager M.** Numerical processes for solving differential equations: monograph. Moscow: Mir, 1969. 368 p. (in Russian).
2. **Biderman V. L.** Mechanics of thin-walled structures. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 488 p. (in Russian).
3. **Bulakaev P. I., Dzyuba A. P., Safronova I. A.** Discrete - continual algorithm for calculating the stress-strain state of shells of rotation of a variable in two directions of rigidity // Problems of computational mechanics and strength structures: Collection of sciences. Dnipropetrovsk: Lira. 2011. Vol. 16. P. 69–78. (in Ukrainian).
4. **Godunov S. K.** On the numerical solution of boundary value problems for systems of linear ordinary differential equations // Advances in Mathematical Sciences. 1961. Vol. 16. Iss.3 (99). P. 171–174. (in Russian).
5. **Grigorenko Ya. M., Vasilenko A. T.** Methods for calculating shells. Theory of shells of variable rigidity. Kiev: Naukova Dumka, 1981. Vol. 4. 544 p. (in Russian).
6. **Grigorenko Ya. M., Draigor N. D., Shinkar A. I.** On solving stress problems of orthotropic cylindrical shells with variable stiffness in two directions // Resistance of materials and theory of structures. Moscow. 1977. Iss. 30. P. 3–10. (in Russian).
7. **Grigorenko Ya. M., Mukoed A. P.** Solving the problems of shell theory on a computer. Kiev: High School, 1979. 280 p. (in Russian).

8. **Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N. P., Yaremchenko C. N.** Stress-strain state of shallow rectangular shells of variable thickness under various boundary conditions // *Bul. of NAS Ukraine*. 2016. No 6. P. 31–37. (in Russian).
9. **Dashchenko A. F., Lazareva D. V., Suryaninov N. G.** ANSYS in the problems of mechanical engineering: monograph. Ed. 2-nd processed and complemented / ed. by Suryaninov N. G. Kharkiv: «BURUN and K», 2011. 504 p. (in Russian).
10. **Dzyuba A. P., Safronova I. A.** Algorithms of acceleration of convergence of iterative processes of calculation of shells of rotation of a complex form of a meridian at large displacements // *Bull. of Dnipropetrovsk un-ty. Ser.: Mechanics*. 2015. No. 19. Vol. 2. P. 38–55. (in Ukrainian).
11. **Dzyuba A. P., Sirenko V. N., Dzyuba A. A., Safronova I. A.** Models and algorithms for optimization of elements of nonuniform shell structures // *Actual problems of mechanics: Monograph / ed. by Polyakov N. V. Dnipro: Lira*. 2018. P. 225–243. (in Ukrainian).
12. **Zenkevich O.** Finite element method in engineering. Moscow: Mir, 1975. 544 p. (in Russian).
13. **Ivanov V. V.** Computer methods for ECM: a reference guide. Kiev: Naukova Dumka, 1986. 584 p. (in Russian).
14. **Myachenkov V. I., Grigoryev I. V.** Calculation of composite shell structures on a computer: Reference. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 212 p. (in Russian).
15. **Ovchinnikov I. G., Pochtman Yu. M.** Thin-walled structures under conditions of corrosion wear: Calculation and optimization. Dnepropetrovsk, 1995. 190 p. (in Russian).
16. **Sineva N. F., Selivanov F. S., Nikityuk D. V.** Calculation of a cylindrical shell of variable stiffness interacting with a nonlinear elastic base // *Bull. Saratov State Techn. Un-ty. Ser.: Construction and architecture*. 2011. No 4(60). Iss 2. P.15–21. (in Russian).
17. **Shamansky V. E.** Methods of numerical solution of boundary value problems on a computer. Kiev: Academia Science USSR 1963. Part. 1. 196 p., 1966. Part. 2. 242 p. (in Russian).

*Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 10.10.2019