DOI:10.15421/4220001
УДК 539.3

*Д. В. Білий, О. В. Комаров, канд. фіз.-мат. наук,
В. В. Лобода, д-р. фіз.-мат. наук*

АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ТРІЩИНИ В 1D П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ КВАЗІКРИСТАЛІ

Досліджено електроізольовану тріщину у п'єзоелектричному квазікристалі з віссю квазіперіодичності атомів, ортогональною берегам тріщини. Сформульовано задачу лінійного спряження, для якої представлено точний аналітичний розв'язок. Отримані представлення фононних і фазонних електромеханічних характеристик у вигляді досить простих аналітичних формул. Проілюстровано взаємний вплив зовнішнього навантаження, а також фононних і фазонних факторів.

Ключові слова: п'єзоелектричний квазікристал; фононні і фазонні напруження; тріщина.

Вступ. Нещодавно виявлені структури, які були названі квазікристалами (КК), відрізняються від звичайних кристалів і некристалічних структур. КК мають багато позитивних властивостей, таких як висока міцність, висока зносостійкість, низька тепловіддача. Тому вони мають великі перспективи розвитку і широко застосовуються в області технологій та машинобудування.

КК мають особливу атомну або молекулярну структуру, яка відрізняється як від строгої періодичної атомної структури з групами симетрії II, III, IV і VI порядків звичайних кристалів, так і від аморфних твердих тіл, де атоми повністю невпорядковані. Для КК притаманний дальній орієнтаційний порядок, але відсутня періодичність у розташуванні атомів. КК характеризуються ротаційною симетрією 5-го, 8-го, 10-го або 12-го порядку, яка заборонена в кристалах. Залежно від того, по скільком напрямках атомне розташування є квазіперіодичним, КК можна розділити на три підкласи – 1D, 2D і 3D, які означають квазіперіодичність в одному, двох та трьох напрямках, відповідно.

З моменту відкриття КК [7] була створена узагальнена теорія пружності КК [3, 4]. Автори роботи [2] розв'язали задачу взаємодії між гвинтовою дислокацією і напів-нескінченною тріщиною в декагональних КК. П'єзоелектрика є важливою фізичною властивістю КК. П'єзоелектричні КК були досліджені в [6], [9]. Функції Гріна одновимірного квазікристалічного біматеріалу з п'єзоелектричним ефектом досліджені в [10]. Аналітично-числовим методом досліджувалась тріщина довільної форми в одновимірному гексагональному термо-електро-пружному квазікристалічному матеріалі в [11, 12]. Однак тріщина в 1D п'єзоелектричному КК

аналітично не досліджена. У даній роботі проведено аналітичне дослідження тріщини у згаданому вище типі квазікристалів. Результати наведені у вигляді простих формул і проілюстровані графічно.

Основні рівняння для 1D п'єзоелектричних КК. Для лінійної теорії пружності визначальні співвідношення, рівняння рівноваги і геометричні рівняння 1D п'єзоелектричних КК без внутрішніх сил і вільних зарядів можуть бути виражені у вигляді [10]

$$\sigma_{ij} = c_{ijks} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s + R_{ij3s} W_{3s},$$

$$D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \xi_{is} E_s + \tilde{e}_{i3s} W_{3s},$$

$$H_{3i} = R_{ks3i} \varepsilon_{ks} - \tilde{e}_{s3i} E_s + K_{3i3s} W_{3s}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad H_{3i,i} = 0. \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad W_{3i} = W_{3,i} \quad (3)$$

де $i, j, k, s=1, 2, 3$, а позначення « $\cdot$ » представляє похідну для просторових змінних; u_i , W_3 та φ – фононні і фазонні переміщення та електричний потенціал відповідно, причому, атоми розміщені періодично в площині $x_1 - x_2$, та квазіперіодично по осі x_3 ; σ_{ij} та ε_{ks} – фононні напруження та деформації; H_{3i} та W_{3i} – фозонні напруження та переміщення; D_i та E_i – електричні зміщення та електричні поля, напрям поляризації співпадає з напрямком осі x_3 ; c_{ijks} та K_{3j3s} – пружні константи у фононних і фазонних полях відповідно; R_{ij3k} – пружні константи зв'язку фононних і фазонних полів; e_{jks} та $\tilde{e}_{jks}$ – п'єзоелектричні константи фононних і фазонних полів відповідно; ξ_{is} – константа діелектричної проникності.

З (1) – (3) отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{cases} (c_{ijks} u_k + e_{sij} \varphi + R_{ij3s} W_3)_{,si} = 0, \\ (e_{iks} u_k - \xi_{is} \varphi + \tilde{e}_{i3s} W_3)_{,si} = 0, \\ (R_{ik3s} u_k + \tilde{e}_{i3s} \varphi + K_{3i3s} W_3)_{,si} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Далі вводимо вектори:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi, W_3\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, H_{33}\}^T, \quad (5)$$

де тут і далі верхній індекс Т означає транспоновану матрицю.

Загальний розв'язок рівнянь (4). Припускаючи, що всі поля є незалежними від координати x_2 , розв'язок рівнянь (4) за методом, запропонованим в [1], можна представити у вигляді:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} \mathbf{f}(z), \quad (6)$$

де $z = x_1 + p x_3$, а вектор $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4]^T$ можна знайти із співвідношень

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) + p^2 \mathbf{T}] \mathbf{a} = 0. \quad (7)$$

Елементи матриць 5 порядку $\mathbf{Q}$, $\mathbf{E}$ та $\mathbf{T}$ визначаються як

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c_{1jk1} & e_{1j1} & R_{1j31} \\ e_{1k1} & -\xi_{11} & \tilde{e}_{131} \\ R_{k131} & \tilde{e}_{131} & -K_{3131} \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} c_{1jk2} & e_{21j1} & R_{j132} \\ e_{1k2} & -\xi_{12} & \tilde{e}_{132} \\ R_{k231} & \tilde{e}_{132} & K_{3132} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{2jk2} & e_{2j2} & R_{j232} \\ e_{2k2} & -\xi_{22} & \tilde{e}_{232} \\ R_{k232} & \tilde{e}_{232} & K_{3232} \end{bmatrix}.$$

Нетривіальний розв'язок рівнянь (7) існує, якщо p - корінь рівняння

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{E} + \mathbf{E}^T) + p^2 \mathbf{T}] = 0. \quad (8)$$

Оскільки рівняння (8) не має дійсних коренів [8], позначимо корені цього рівняння з позитивними уявними частинами як p_α та відповідні власні вектори рівняння (7) як $\mathbf{a}_\alpha$ (індекс α тут і далі набуває значень 1–5). Найбільш загальний дійсний розв'язок рівнянь (4) можна представити як [8]

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{f}}(\overline{z}), \quad (9)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5]$ – матриця, що складається з власних векторів; $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4), f_5(z_5)]^T$ – довільна векторна функція; $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3$; рисочка зверху означає комплексне спряження.

Використовуючи рівняння (1), вектор $\mathbf{t}$, введений в рівнянні (5), може бути представлений у вигляді

$$\mathbf{t} = \mathbf{B} \mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{f}}'(\overline{z}), \quad (10)$$

де матриця п'ятого порядку $\mathbf{B}$ визначається як

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5],$$

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{R}^T + p_\alpha \mathbf{T}) \mathbf{a}_\alpha \text{ (сумування по індексу } \alpha \text{ не проводиться),} \quad (11)$$

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{df_1'(z_1)}{dz_1}, \frac{df_2'(z_2)}{dz_2}, \frac{df_3'(z_3)}{dz_3}, \frac{df_4'(z_4)}{dz_4}, \frac{df_5'(z_5)}{dz_5} \right]^T. \quad (12)$$

Розв'язок для композитного матеріалу, складеного з двох 1D ге-ксагональних КК зі змішаними граничними умовами на межі поділу матеріалів. Розглянемо біматеріал, що складається з двох різних 1D п'єзоелектричних КК півпросторів $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$ з властивостями, визначеними рівняннями (1) для кожного матеріалу. Будемо вважати, що вектор $\mathbf{t}$ є неперервним по всьому біматеріальному інтерфейсу, а частина $L = \{(-\infty, c) \cup (b, \infty)\}$ інтерфейсу $-\infty < x_1 < \infty$, $x_3 = 0$ механічно і електрично неперервна, тобто граничні умови на межі розділу $x_3 = 0$ наступні

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (13)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \quad \text{для } x_1 \in L. \quad (14)$$

У цьому випадку на основі формул (9), (10) розв'язки рівняння (4) можуть бути записані для кожної з областей у формі

$$\mathbf{V}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (15)$$

$$\mathbf{t}^{(j)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{f}^{(j)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(j)} \bar{\mathbf{f}}^{(j)}(\bar{z}), \quad (16)$$

де $j=1$ для $x_3 > 0$ і $j=2$ для $x_3 < 0$; вектор-функції $\mathbf{f}^{(1)}(z)$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z)$ аналітичні у верхній ($x_3 > 0$) та нижній ($x_3 < 0$) областях, відповідно.

За допомогою рівняння (16) і граничних умов (13) маємо:

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(x_1) = \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(x_1) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1) \quad \text{для } -\infty < x_1 < \infty. \quad (17)$$

Ліва частина рівняння (17) є крайове значення аналітичної функції в області $x_3 > 0$, а права частини рівняння (17) – крайове значення іншої аналітичної функції в області $x_3 < 0$. Рівняння (17) означає, що обидві функції можуть бути аналітично продовжені у всій площині, тобто вони дорівнюють для $x_3 > 0$ та $x_3 < 0$, відповідно, функції $\mathbf{M}(z)$, аналітичній у всій площині. Беручи до уваги, що фононні та фазонні напруження і електричне зміщення обмежені на нескінченності, з рівняння (16) отримуємо, що $\mathbf{M}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \mathbf{M}^{(0)} = \text{const}$. Але це також означає, що $\mathbf{M}(z) = \mathbf{M}^{(0)}$ справедливо для всієї площини. Таким чином, з рівнянь (16) випливає

$$\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)} \bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) = \mathbf{M}^{(0)} \quad \text{для } x_3 > 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) = \mathbf{M}^{(0)} \quad \text{для } x_3 < 0, \quad (19)$$

де $\mathbf{M}^{(0)}$ є довільним постійним вектором.

Припускаючи, що власні значення різні і враховуючи, що матриці в рівнянні (19) є несингулярними [8], одержуємо

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) - (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) - (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{M}^{(0)} \text{ для } x_3 < 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Оскільки $\mathbf{f}^{(1)}(z)$ та $\mathbf{f}^{(2)}(z)$ є довільними функціями, можна вибрати $\mathbf{M}^{(0)} = \mathbf{0}$. Тоді з рівняння (20) отримаємо

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}}^{(2)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(z) \text{ для } x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(\bar{z}) &= (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1} \mathbf{B}^{(2)} \mathbf{f}^{(2)}(z) \text{ для } x_3 < 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Розглянемо далі вектор похідних стрибків переміщень і електричного потенціалу при переході через інтерфейс матеріалу

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1, 0). \quad (22)$$

За допомогою рівнянь. (15) і (21) його можна записати як

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{D} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1), \quad (23)$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)}$.

Завдяки формулам (16) вектор $\mathbf{t}^{(1)}$ на інтерфейсі матеріалу може бути записаний як

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{B}}^{(1)} \bar{\mathbf{f}}^{(1)}(x_1). \quad (24)$$

Введення вектор-функції $\Sigma(z)$ за формулою

$$\Sigma(z) = \begin{cases} \mathbf{D} \mathbf{N}(z) & \text{для } x_3 > 0 \\ -\bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{N}}(z) & \text{для } x_3 < 0 \end{cases},$$

де $\mathbf{N}(z) = [f_1^{(1)}(z), f_2^{(1)}(z), f_3^{(1)}(z), f_4^{(1)}(z), f_5^{(1)}(z)]$, призводить до таких виразів:

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \Sigma^+(x_1) - \Sigma^-(x_1), \quad (26)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G} \Sigma^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}} \Sigma^-(x_1), \quad (27)$$

де $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$, $\Sigma^+(x_1) = \Sigma(x_1 + i0)$, $\Sigma^-(x_1) = \Sigma(x_1 - i0)$.

Рівняння (26), (27) можна використовувати для аналізу композитів, складених з одновимірних гексогональних п'єзоелектричних КК з довільною кількістю тріщин на межі поділу матеріалів.

Розглянемо далі плоску задачу в системі координат $x_1 - x_3$ припускаючи, що всі поля незалежні від координати x_2 . Ми будемо використовувати позначення, при яких пара індексів трансформується в єдиний індекс відповідно до правила: 11 → 1, 22 → 2, 33 → 3, 23 та 32 → 4, 13 та

31→5, 12 та 21→6. Визначальні співвідношення для 1D гексогонального п'єзоелектричного КК в декартових координатах (x_1, x_2, x_3) для вказаного плоского випадку мають вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ 0 & R_2 \\ R_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{31} \\ W_{33} \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{11} & 0 \\ 0 & \xi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{31} \\ W_{33} \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{31} \\ H_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2R_3 \\ R_1 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{31} \\ W_{33} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

При цьому вважається, що $(x_1, 0, x_2)$ збігається з площиною періодичності, а вісь x_3 є квазі-періодичним напрямком. Рівняння рівноваги та геометричні рівняння у цьому випадку слідує з (2) та (3), відповідно.

Матриця **G** з рівняння (27) без другого рядка і стовпця має в даному випадку наступну структуру:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} & g_{15} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} & ig_{35} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} & ig_{45} \\ g_{51} & ig_{53} & ig_{54} & ig_{55} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

де всі g_{ij} – дійсні, для яких справедливі співвідношення $g_{31} = -g_{13}$, $g_{41} = -g_{14}$, $g_{51} = -g_{15}$, $g_{53} = g_{35}$, $g_{43} = g_{34}$, $g_{45} = g_{54}$.

Єдина електрично непроникна тріщина в 1D гексагональному п'єзоелектричному КК. Розглянемо тріщину $-b \leq x_1 \leq b$, $x_2 = 0$ в нескінченному 1D п'єзоелектричному КК просторі під дією фазон $\sigma_{22} = \sigma^\infty$ і фазон $H_{33} = H_{33}^\infty$ напружень, а також електричних зміщень $D_3 = D^\infty$ на нескінченності (рис. 1). Вважається, що тріщина електрично непроникна і всі поля не залежать від координати x_2 .

У цьому випадку справедливі співвідношення (26), (27) та, крім того, відсутні напруження зсуву σ_{13} та стрибок $\langle u_1 \rangle$ зсувного переміщення уздовж всієї осі x_1 . Це означає, що перші рівняння співвідношень (26),

(27), а також перший рядок і стовпець матриці $\mathbf{G}$ можна опустити. Тобто, замість матриці $\mathbf{G}$ можна розглядати матрицю $\mathbf{G}_0 = [G_{ij}]_{i,j=3,4,5}$.

Рис. 1 – Тріщина у п'єзоелектричному квазікристалі

Беручи до уваги, що $\bar{\mathbf{G}}_0 = -\mathbf{G}_0$, співвідношення (26), (27) можна представити у вигляді:

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}_0 [\Sigma^+(x_1) + \Sigma^-(x_1)], \quad (32)$$

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = \Sigma^+(x_1) - \Sigma^-(x_1), \quad (33)$$

де $\mathbf{P}(x_1) = [\sigma_{33}(x_1, 0), D_3(x_1, 0), H_{33}(x_1, 0)]^T$; $\mathbf{G} = [G_{ij}]_{i,j=3,4,5}$ – матриця, що визначається характеристиками матеріалу; $\Sigma(z) = [\Sigma_3(z), \Sigma_4(z), \Sigma_5(z)]$ – вектор-функція, яка є аналітичною у всій площині з розрізом вздовж області тріщини, $\mathbf{V}(x_1) = [u_3(x_1, 0), \phi(x_1, 0), W_3(x_1, 0)]^T$.

Умови на інтерфейсі мають наступний вигляд

$$\sigma_{33}^\pm = 0, \quad H_{33}^\pm = 0, \quad D_3^\pm = 0 \quad \text{для} \quad -b < x_1 < b; \quad (34)$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = 0, \quad \langle H_{33} \rangle = 0, \quad \langle u_3 \rangle = 0, \quad \langle W_3 \rangle = 0, \quad \langle \phi \rangle = 0, \quad \langle D_3 \rangle = 0$$

для $x_1 \notin (-b, b)$. (35)

З урахуванням граничних умов (34), (35) за допомогою (32), (33) отримуємо наступну векторну задачу лінійного спряження:

$$\Sigma^+(x_1) + \Sigma^-(x_1) = 0, \quad |x_1| \leq b. \quad (36)$$

З урахуванням (4) умови на нескінченності можуть бути записані у формі

$$\Sigma(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0.5 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{P}^\infty, \quad (37)$$

де $\mathbf{P}^\infty = [\sigma^\infty, D^\infty, H_{33}^\infty]^T$.

Умови однозначності фонов та фазон переміщень, а також електричного поля при обході контуру тріщини можуть бути записані в вигляді

$$\int_{-b}^b [\Sigma^+(x_1) - \Sigma^-(x_1)] dx_1 = \mathbf{0}. \quad (38)$$

Згідно з [6] розв'язок задачі (36) за умов (37), (38) можна представити у вигляді:

$$\Sigma(z) = 0.5 \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{P}^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - b^2}}. \quad (39)$$

Підставляючи (39) в (32), отримуємо

$$\mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{P}^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} \quad \text{для } x_1 > b. \quad (40)$$

З рівнянь (33) та (39) випливає

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = i \mathbf{G}_0^{-1} \mathbf{P}^\infty \sqrt{b^2 - x_1^2} \quad \text{для } -b < x_1 < b. \quad (41)$$

Інтегрування (41) призводить до наступного виразу

$$\langle \mathbf{V}(x_1) \rangle = 4 \Lambda \mathbf{P}^\infty \sqrt{b^2 - x_1^2} \quad \text{для } -b < x_1 < b, \quad (42)$$

де $\Lambda = i \mathbf{G}_0^{-1} / 4$.

Вектор коефіцієнтів інтенсивності (KI) в точці b визначається як:

$$\mathbf{K} = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \mathbf{P}^{(1)}(x_1, 0), \quad (43)$$

де $\mathbf{K} = [K_1, K_4, K_5]^T$.

З використанням формули (40) отримуємо

$$K = \sqrt{\pi b} P^\infty. \quad (44)$$

Числові результати та їх обговорення. Розглянемо 1D п'єзоелектричний КК з наступними фізичними характеристиками [10]:

- фононні пружні константи (ГПа): $c_{11} = 150$, $c_{12} = 100$, $c_{13} = 90$, $c_{33} = 130$, $c_{44} = 50$;
- фазонні пружні константи (ГПа): $K_1 = 0,18$; $K_2 = 0,3$;
- константи зв'язку фононних і фазонних полів (ГПа): $R_1 = -1,50$; $R_2 = 1,20$, $R_3 = 1,20$;
- п'єзоелектричні константи ($Kл \times M^{-2}$): $e_{31} = \tilde{e}_{15} = -0,160$; $e_{33} = 0,347$; $e_{15} = -0,138$; $\tilde{e}_{33} = 0,350$;
- діелектричні константи ($10^{-9} Кл^2 H^{-1} M^{-2}$): $\xi_{11} = 0,0826$, $\xi_{33} = 0,0903$.

Вважаємо, що тріщина має довжину $10 мм$, $H_{33}^\infty = 0$, $D^\infty = 0$, а значення σ^∞ варіюються. На рис. 2 і рис. 3 наведені графіки зміни фононного розкриття тріщини $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ вздовж її довжини та нормального напруження $\sigma_{33}(x_1, 0)$ на її продовженні для $\sigma^\infty = 10 МПа$ (крива I), $9 МПа$ (II) і $8 МПа$ (III). Видно, що напруження різко зростають при наближенні до вершини тріщини. Це пояснюється тією обставиною, що вказані напруження мають кореневу особливість у вершинах тріщини.

Рис. 2 – Зміна фононного розкриття тріщини $\langle u_3(x_1, 0) \rangle$ вздовж її довжини

Рис. 3 – Поведінка нормального напруження $\sigma_{33}(x_1, 0)$ на продовженні тріщини при різних рівнях зовнішнього навантаження

На Рис. 4 і рис. 5 для тріщини тієї ж довжини наведені графіки зміни фазонного розкриття тріщини $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$ вздовж її правої половини та фазонного напруження $H_{33}(x_1, 0)$ справа від вершини тріщини для $\sigma^\infty = 0$, $D^\infty = 0$ і $H_{33}^\infty = 4 \text{ МПа}$ (крива I), $3,6 \text{ МПа}$ (II) і $3,2 \text{ МПа}$ (III). Видно, що поведінка фазонного розкриття тріщини подібна поведінці її фазонного розкриття, тільки амплітуди цих розкриттів є різними.

Рис. 4 - Варіація фазонного розкриття тріщини $\langle W_3(x_1, 0) \rangle$ вздовж її правої частини для різних значень H_{33}^∞

Рис. 5 - Варіація фазонного напруження $H_{33}(x_1, 0)$ на продовженні тріщини

Висновки. За допомогою аналітичного методу проведено аналіз електроізолюваної тріщини у 1D п'єзоелектричному квазікристалі, у якому вісь квазіперіодичності атомів ортогональна берегам тріщини. Отримані представлення фонових і фазонних компонент електропружного стану через кусково-аналітичну вектор-функцію, з використанням яких сформульовано задачу лінійного спряження. Точний аналітичний розв'язок цієї задачі дозволив отримати представлення усіх необхідних електромеханічних характеристик у вигляді досить простих аналітичних формул. Проведена ілюстрація деяких отриманих результатів, яка продемонструвала залежність фонових і фазонних факторів від зовнішнього навантаження.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Eshelby J.D.**, Read W.T., Shockley W. Anisotropic elasticity with application to dislocation theory // *Acta Metall.* 1953. No1, P. 251–259.
2. **Gao Y.**, Ricoeur A., Zhang L. L. Plane problems of cubic quasicrystal media with an elliptic hole or a crack // *Physics Letters A.* 2011. Vol. 375. No 28. P. 2775–2781.
3. **Hu C. Z.**, Wang R. H., Ding D. H. Symmetry groups, physical property tensors, elasticity and dislocations in quasicrystals // *Reports on Progress in Physics.* 2000. Vol. 63. No 1. P. 1–39.
4. **Li X. Y.** Elastic field in an infinite medium of one-dimensional hexagonal 1D hexagonal piezoelectric QCs quasicrystal with a planar crack // *International Journal of Solids and Structures.* 2014. Vol. 51. No 6. P. 1442–1455.
5. **Muskhelishvili N.I.** Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Leyden, 1975. 732 p.
6. **Rao K.R.M.**, Rao P.H., Chaitanya B.S.K. Piezoelectricity in quasicrystals // *Pramana-Journal of Physics.* 2007. Vol. 68. No 3. P. 481–487.
7. **Shechtman D.**, Blech I., Gratias D., Cahn J.W. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry // *Physical Review Letters.* 1984. Vol. 53. No 20. P. 1951–1953.
8. **Suo Z.**, Kuo C M., Barnett D.M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // *J. of Mechanics and Physics of Solids.* 1992. Vol. 40. P. 739–765.

9. **Yu J.**, *Guo J.H., Xing Y.M.* Complex variable method for an anti-plane elliptical cavity of one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals // Chinese Journal of Aeronautics. 2015. Vol. 28. No 4. P. 1287–1295.

10. **Zhang L.**, *Wu D., Xu W., Yang L., Ricoeur A., Wang Z., Gao Y.* Green's functions of one-dimensional quasicrystal bi-material with piezoelectric effect. Physics Letters A 2016. No 380. P. 3222–3228.

11. **Zhao M. H.**, *Dang H. Y., Fan C. Y., Chen Z.T.* Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material. Part 1: Theoretical solution // Engineering Fracture Mechanics 2017. No179. P. 59–78.

12. **Zhao M. H.**, *Dang H. Y., Fan C. Y., Chen Z.T.* Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material. Part 2: Numerical method // Engineering Fracture Mechanics 2017. No180. P. 268–281.

УДК 539.3

*Д. В. Билый, А. В. Комаров, канд. физ.-мат. наук,
В. В. Лобода, д-р физ.-мат. наук*

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ТРЕЩИНЫ В 1D ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КВАЗИКРИСТАЛЛЕ

Исследована электроизолированная трещина в пьезоэлектрическом квазикристалле с осью квазипериодичности атомов, ортогональной берегам трещины. Сформулирована задача линейного сопряжения, для которой представлено точное аналитическое решение. Полученны представления фоновых и фазонных электромеханических характеристик в виде достаточно простых аналитических формул. Проиллюстрировано взаимное влияние внешней нагрузки, а также фоновых и фазонных факторов.

Ключевые слова: пьезоэлектрический квазикристалл; фоновые и фазонные напряжения; трещина.

UDC 539.3

*D. V. Bilyi, A. V. Komarov, PhD (Phys.-Math.),
V. V. Loboda, Dr.Sci. (Phys.-Math.)*

ANALYTICAL APPROACH TO THE ANALYSIS OF A CRACK IN 1D PIEZOELECTRIC QUASICRISTAL

An electro isolated crack in a piezoelectric quasicrystal with the axis of the quasiperiodicity of atoms orthogonal to the crack faces is investigated. A problem of linear relationship is formulated and its exact analytic solution is presented. The representations of phonon and phason electromechanical characteristics are obtained in the form of simple analytical formulas. The mutual influence of external loading, as well as phonon and phason factors is illustrated.

Keywords: piezoelectric quasicrystal; phonon and phason stresses; crack

Introduction. Recently discovered structures that have been called quasicrystals (QCs) are different from ordinary crystals and non-crystalline struc-

tures. QCs have many positive properties. Therefore, they have great prospects and are widely used in technology and engineering. For QC, there is a long-range orientation, but there is no periodicity in the arrangement of atoms. QCs are characterized by the rotational symmetry of the 5th, 8th, 10th, or 12th order, which is forbidden in crystals. Depending on the number of directions of the atomic quasi-periodicity, the QCs can be divided into three subclasses - 1D, 2D, and 3D, which mean the quasi-periodicity in one, two, and three directions, respectively.

Since the opening of the QQs [7], their generalized theory of elasticity [3-4] has been established. However, till now the crack in 1D piezoelectric QC has not been analytically investigated. In this work, an analytical analysis of a crack in the above-mentioned type of QCs is performed. The results are presented in simple formulas and are graphically illustrated.

Formulation of the problem. The crack $-b \leq x_1 \leq b$, $x_2 = 0$ in an infinite 1D piezoelectric QCs spaces under the action of a uniform phonon $\sigma_{22} = \sigma^\infty$ and phason $H_{33} = H_{33}^\infty$ stresses as well as electrical displacement $D_3 = D^\infty$ at infinity is considered. It is assumed that the crack is electrically impermeable and all fields are independent on the coordinate x_2 .

The interface conditions have the following form

$$\sigma_{33}^\pm = 0, \quad H_{33}^\pm = 0, \quad D_3^\pm = 0 \quad \text{for } -b < x_1 < b$$

$$\langle \sigma_{33} \rangle = 0, \quad \langle H_{33} \rangle = 0, \quad \langle u_3 \rangle = 0, \quad \langle W_3 \rangle = 0, \quad \langle \phi \rangle = 0, \quad \langle D_3 \rangle = 0$$

Conclusion. A Riemann problem of linear relationship is formulated for the above problem. Exact solution of this problem is obtained. Simple analytical expressions for the phonon and phason displacement jumps along the crack region and also the phonon and phason stresses along the crack continuation as well as their stress intensity factors are given.

A numerical analysis is carried out for the QCs from Ref. [4]. The obtained results are presented in graph form and demonstrate the dependencies of phonon and phason displacement jumps as well as associated stresses on the intensity of external fields of stresses applied far from the crack.

REFERENCES

1. **Eshelby J.D.**, *Read W.T., Shockley W.* Anisotropic elasticity with application to dislocation theory // *Acta Metall.* 1953. No1. P.251–259.
2. **Gao Y., Ricoeur A., Zhang L. L.** Plane problems of cubic quasicrystal media with an elliptic hole or a crack // *Physics Letters A.* 2011. Vol. 375. No 28. P. 2775–2781.
3. **Hu C. Z., Wang R. H., Ding D. H.** Symmetry groups, physical property tensors, elasticity and dislocations in quasicrystals // *Reports on Progress in Physics.* 2000. Vol. 63. No 1, P. 1–39.
4. **Li X.Y.** Elastic field in an infinite medium of one-dimensional hexagonal 1D hexagonal piezoelectric QCs quasicrystal with a planar crack // *International Journal of Solids and Structures.* 2014. Vol. 51. No 6. P. 1442–1455.
5. **Muskhelishvili N.I.** Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff, Leyden, 1975. 732 p.

6. **Rao K.R.M.**, *Rao P.H., Chaitanya B.S.K.* Piezoelectricity in quasicrystals // *Pramana-Journal of Physics*. 2007. Vol. 68. No 3. P. 481–487.
7. **Shechtman D.**, *Blech I., Gratias D., Cahn J.W.* Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry // *Physical Review Letters.*, 1984. Vol. 53. No 20. P. 1951–1953.
8. **Suo Z.**, *Kuo C.M., Barnett D.M., Willis J. R.* Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // *J. of Mechanics and Physics of Solids*. 1992. Vol. 40. P. 739–765.
9. **Yu J.**, *Guo J.H., Xing Y.M.* Complex variable method for an anti-plane elliptical cavity of one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2015. Vol. 28. No 4. P. 1287–1295.
10. **Zhang L.**, *Wu D., Xu W., Yang L., Ricoeur A., Wang Z., Gao Y.* Green's functions of one-dimensional quasicrystal bi-material with piezoelectric effect. *Physics Letters A* 2016. No 380. P. 3222–3228.
11. **Zhao M. H.**, *Dang H. Y., Fan C. Y., Chen Z.T.* Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material. Part 1: Theoretical solution // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. No179. P. 59–78.
12. **Zhao M. H.**, *Dang H. Y., Fan C. Y., Chen Z.T.* Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material. Part 2: Numerical method // *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. No180 P. 268–281.

*Дніпровський національний університет
Імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна*

Надійшла до редколегії 03.02.2020