DOI 10.15421/4220003
УДК 539.3

*Е. Л. Гарт, д-р фіз.-мат. наук, А. Г. Пацюк, канд. техн. наук,
В. С. Бейцун*

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ДВОШАРОВОГО ПІДКРІПЛЕННЯ

Здійснено комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану плоского елемента пружного неоднорідного середовища з центрально розташованим круговим отвором та одним/двома кільцевими підкріпленнями при використанні методу скінченних елементів. Досліджено вплив двошарового підкріплення кругового отвору у матриці на напружено-деформований стан пластини, що знаходиться в умовах одновісного розтягу, за різних механічних властивостей матеріалу матриці і включень та кількості підкріплень.

Ключові слова: пружне неоднорідне середовище; напружено-деформований стан; круговий отвір; двошарове підкріплення; контактна границя; коефіцієнт концентрації напружень; метод скінченних елементів.

Вступ. Елементи конструкцій з підкріпленнями знайшли широке розповсюдження у багатьох сферах: промисловості, будівництві, конструюванні, техніці, медицині та ін. Підкріплення застосовують для зміцнення структури, реалізації конструкторсько-технологічних рішень, унеможливлення росту і впливу різних дефектів. Підкріпленнями слугують, наприклад, підпорки тунелів (рис. 1), галерей дамб, мостів, які піддаються різноманітним видам навантажень [8, 9].

У разі суцільних масивів матеріалів з однаковим перерізом доцільно розглядати спрощену модель конструкції у вигляді оболонки чи пластини, яка має особливості у вигляді отворів, тріщин, включень з іншого матеріалу тощо. Вказані неоднорідності матеріалу, перш за все тонкостінні, є потужними концентраторами напружень, саме в їх околі починаються процеси пластичного деформування і руйнування [1, 7]. Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл з такого роду концентраторами напружень відноситься до однієї з важливих проблем механіки деформівного твердого тіла.

При дослідженні НДС конструкцій з неоднорідностями (отворами, включеннями тощо) доцільно використовувати числові методи механіки, які на відміну від аналітичних є досить універсальними. До найбільш ефективних відносять сіткові методи: метод скінченних елементів (МСЕ) [18], метод скінченних різниць, метод локальних варіацій та їх проекційно-ітераційні схеми реалізації, які дозволяють суттєво зменшивши витрати комп'ютерного часу розрахунків при отриманні розв'язку задачі [4, 16, 17].

Велика кількість робіт присвячена дослідженню напруженого стану пластин з отворами та включеннями за різних зовнішніх навантажень

[3–5, 12]. Проблема визначення концентрації напружень біля отворів у пластинах з підкріпленнями, підданих внутрішньому і зовнішньому тиску, становить надзвичайно важливий клас інженерних задач [6, 9–13]. Фундаментальні результати з дослідження розподілу напружень в пластинах біля різноманітних отворів отримані Г. М. Савіним і наведені у його монографії [12].

Рис. 1 – Приклад двошарового підкріплення – підземний тунель ремонтної бази м. Балаклава (підкріплення виконані з бетонних кілець марки М300 та М200)

Підкріплені підземні споруди в умовах плоскої деформації можуть бути представлені у вигляді двовимірної моделі, що знаходиться під впливом початкових тектонічних напружень, рівномірного внутрішнього тиску та ін. У [11] за допомогою методу граничних елементів розв'язано крайову задачу для вказаної моделі неоднорідного тіла, в якому отвори підкріплені декількома кільцями. До таких задач, зокрема, призводять практично важливі задачі розрахунку оброблення тунелів і підземних споруд в масиві гірських порід, оглядових галерей в тілі земляних гребель, які в основному складаються з двох шарів бетону з різними модулями пружності і коефіцієнтами Пуассона.

У даній роботі за допомогою МСЕ проводиться дослідження впливу двошарового підкріплення кругового отвору в матриці плоского елемента пружного неоднорідного середовища на концентрацію напружень в околі отвору елемента при дії одновісного навантаження розтягу, за різних механічних властивостей матеріалу матриці і включень.

Постановка задачі. Розглянемо неоднорідний плоский елемент Ω ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$) розмірами $L_1 \times L_2$ пружного середовища Ω_1 (матриці) з центрально розташованим круговим отвором діаметра d та одним/двома кільцевими підкріпленнями (включеннями) Ω_2, Ω_3 ($d_1=d, d_2$ – внутрішні діаметри першого (внутрішнього) і другого (зовнішнього) кільця; b_1, b_2 – ширина першого і другого кільця). Розміри плоского еле-

мента такі, що граничні умови не впливають на НДС поблизу отвора і включень. Підкріплення моделюються вставками (включеннями) з іншого матеріалу, розташованими у площині плоского елемента Ω , на контактних границях задані умови жорсткого зчеплення.

Рис. 2 – Геометрія та схема навантаження пластини з двома кільцевими підкріпленнями

На границі γ області Ω ($0 \leq y \leq L_2$, $x = 0$ та $0 \leq y \leq L_2$, $x = L_1$) задані навантаження одновісного рівномірного розтягу $P(x, y) = (P_x(x, y), P_y(x, y))^T$, де $P_x(x, y) = P = \text{const}$, $P_y(x, y) = 0$. Інша частина границі області Ω ($0 \leq x \leq L_1$, $y = 0$ та $0 \leq x \leq L_1$, $y = L_2$) вільна від навантаження (рис. 2).

Необхідно визначити вплив одно- і двошарового кільцевих підкріплень кругового отвору та їх механічних властивостей на концентрацію напружень навколо отвору.

Як відомо, за допомогою моделей плоских задач можна виявити головні особливості НДС, зокрема при деформації середовищ з урахуванням їх взаємодії з включеннями різної форми [5, 12–14].

У варіаційній постановці вихідна задача призводить до мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії деформації системи [2]:

$$\begin{aligned}
I[u, v] = & \int_{\Omega_1} \left\{ 2\mu_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \\
& + \sum_{i=2}^{n+1} \int_{\Omega_i} \left\{ 2\mu_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right. \\
& \left. + \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{\gamma} (P_x u + P_y v) d\gamma, \quad (1)
\end{aligned}$$

де λ_1, μ_1 – константи Ляме матеріалу пружного середовища (матриці) Ω_1 ; λ_i, μ_i – константи Ляме матеріалу $(i-1)$ -го включення Ω_i ($i = \overline{2, n+1}$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ – область визначення x та y .

Метод розв'язування. Розв'язання задачі здійснено за допомогою МСЕ [18], основна ідея якого полягає у дискретизації області неперервної зміни аргументів шуканої функції (переміщень, температури, тиску і т. п.) сукупністю скінченного числа підобластей – скінченних елементів, і апроксимації цієї неперервної функції в межах кожного скінченного елемента деяким поліномом. У результаті вихідна варіаційна задача замінюється дискретною моделлю – системою лінійних або нелінійних алгебричних рівнянь з невідомими значеннями шуканої функції у вузлах скінченно-елементної сітки.

У розрахунках використовували трикутні (шестивузлові) лагранжеві скінченні елементи другого ступеня, при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимували квадратичним поліномом. В областях концентрації напружень, на межі включення і отвору, включення і матриці, у перехідному шарі між включеннями використовували адаптивну сітку.

Результати числового аналізу. Числові результати для вихідної задачі одержані на персональному комп'ютері Intel (R) Celeron (R) i5-3337U (1,80 GHz) з 8 GB оперативної пам'яті. Розглянуто пружні ізотропні однорідні прямокутні пластини з матеріалів: алюміній ($E = 70 \text{ ГПа}$; $\nu = 0,36$; $\sigma_{0,2} = 90 \text{ МПа}$; $\sigma_B = 190 \text{ МПа}$) і легована сталь ($E = 210 \text{ ГПа}$; $\nu = 0,32$; $\sigma_{0,2} = 440 \text{ МПа}$; $\sigma_B = 676 \text{ МПа}$). Розміри плоского елемента $L_1 \times L_2 = 200 \times 200h$; радіус центрально розташованого кругового отвору $r = 10h$. Границя отвору підкріплена бікільцем, у якого $b_1 + b_2 = 3h$, де b_1, b_2 – ширина кілець; h – товщина пластини ($b_1 = 2h, b_2 = h$). Зовнішні діаметри кілець: $\tilde{d}_1 = 24h, \tilde{d}_2 = 26h$.

Матеріал кілець варіювався: алюміній, легована сталь, мідь ($E = 110 \text{ ГПа}$; $\nu = 0,37$; $\sigma_{0,2} = 394 \text{ МПа}$; $\sigma_B = 403 \text{ МПа}$). Плоский елемент середовища знаходився під дією рівномірного одновісного навантаження розтягу $P = 1 \text{ МПа}$ (рис. 2).

Для зручності проведення числового аналізу було введено величину – коефіцієнт відносної жорсткості включення за правилом $k_{ж} = E_{вкл}/E_{матр}$ ($E_{вкл}$ – модуль пружності включення; $E_{матр}$ – модуль пружності матриці), і у подальшому під термінами «м'яке» та «жорстке» включення розумілося пружне включення, для якого $k_{ж} < 1$ та $k_{ж} > 1$ відповідно.

Проведено дослідження впливу кільцевого підкріплення (одно- і двошарового) на НДС пластини з круговим отвором у випадку «жорсткої» матриці. Отримані графічні інтерпретації полів напружень, деформацій і переміщень. У табл. 1 наведено відхилення ККН (у відсотках) від ККН у задачі без включень для досліджуваних варіантів сполучень матеріалів.

Таблиця 1 – Порівняльна таблиця ККН для задач з матрицею $k_{ж} < 1$ при варіюванні матеріалів включень

Задача	Матеріал внутрішнього кільця	Матеріал зовнішнього кільця	ККН	Відхилення ККН від ККН у задачі без включень, %
<i>Без кілець</i>	сталь	сталь	3,02	–
<i>З двома кільцями</i>	алюміній	мідь	1,80	-40,5
	мідь	алюміній	1,95	-35,5
<i>З одним внутрішнім кільцем</i>	алюміній	сталь	2,37	-21,6
	мідь	сталь	2,16	-28,6
<i>З одним зовнішнім кільцем</i>	сталь	алюміній	3,02	-0,3
	сталь	мідь	3,05	0,9

Порівняльний аналіз отриманих числових результатів із відомими аналітичними розв'язками [13] показав задовільну точність, похибка становить менше 1%.

На рис. 3 подано розподіл відносної інтенсивності напружень по розгортці контурів двошарового кільцевого підкріплення кругового отвору у матриці з $k_{ж} < 1$ (1 – границя отвору і внутрішнього кільця, 2 – контактна границя між кільцями, 3 – границя зовнішнього кільця і пластини) для двох варіантів сполучень матеріалів шарів кільця: 1) алюміній і мідь (рис. 3,а); 2) мідь і алюміній (рис. 3,б).

З рис. 3,а видно, що зони максимальної інтенсивності напружень знаходяться на границі зовнішнього кільця і пластини, що обумовлено більшими жорсткісними характеристиками матеріалу матриці, ніж кілець. Якщо матеріали шарів підкріплення розташовані у зворотному порядку (рис. 3,б), то області максимальної інтенсивності напружень зосереджені на границі внутрішнього кільця і отвору.

а)

б)

Рис. 3 – Розподіл відносної інтенсивності напружень по розгортці контурів двошарового кільцевого підкріплення кругового отвору у матриці з $k_{\text{ж}} < 1$; матеріали шарів: а) алюміній і мідь; б) мідь і алюміній

Якщо розглянути одношарове підкріплення отвору в матриці з $k_{\text{ж}} > 1$ (одне внутрішнє кільце мідь/алюміній), то локація зон максимальної інтенсивності напружень спостерігається не тільки на границі кільця з отвором, але і на границі кільця і матриці.

При використанні одного зовнішнього кільця (алюміній/мідь) навколо отвору в пластині з $k_{\text{ж}} < 1$ не було виявлено його значного впливу на концентрацію напружень в околі отвору.

Результати проведеного дослідження впливу одно- і двошарового кільцевого підкріплення на ККН у пластині з круговим отвором у разі «м'якій» матриці наведено у табл. 2.

Таблиця 2 – Порівняльна таблиця ККН для задач з матрицею $k_{ж} > 1$ при варіюванні матеріалів підкріплень

Задача	Матеріал внутрішнього кільця	Матеріал зовнішнього кільця	ККН	Відхилення ККН від ККН задачі без підкріплень, %
Без кілець	алюміній	алюміній	3,00	–
З двома кільцями	сталь	мідь	5,92	≈ в 2 рази
	мідь	сталь	3,86	28,5
З одним внутрішнім кільцем	сталь	алюміній	5,98	≈ в 2 рази
	мідь	алюміній	4,18	39,1
З одним зовнішнім кільцем	алюміній	сталь	4,41	46,8
	алюміній	мідь	2,91	-3,15

На рис. 4 подано розподіл відносної інтенсивності напружень по розгортці контурів двошарового кільцевого підкріплення кругового отвору у матриці з $k_{ж} > 1$ (1 – границя отвору і внутрішнього кільця, 2 – контактна границя між кільцями, 3 – границя зовнішнього кільця і пластини) для двох варіантів сполучень матеріалів шарів кільця: 1) сталь і мідь (рис. 4,а); 2) мідь і сталь (рис. 4,б).

З рис. 4,а випливає, що зони максимальної інтенсивності напружень зосереджені на границі отвору і внутрішнього кільця, що обумовлено жорсткісними властивостями матеріалу підкріплюючого кільця. При зміні матеріалу включень (мідь і сталь) (рис. 4,б) області максимальної інтенсивності напружень також знаходяться на границі отвору і внутрішнього кільця, при цьому на границі зовнішнього кільця і пластини спостерігаються сплески інтенсивності напружень, близькі до максимальних за значеннями.

У випадку пластини з «м'якого» матеріалу ($k_{ж} > 1$) з одним внутрішнім кільцем, незалежно від вибору розглядуваних варіантів матеріалу, максимальні значення інтенсивності напружень спостерігаються на межі отвору і підкріплення. Але у разі внутрішнього кільця із матеріалу середньої жорсткості (із розглядуваних матеріалів) інтенсивність напружень на цьому кільці має значення, близькі до максимальних.

У разі пластини з одним зовнішнім «жорстким» кільцем зони максимальної інтенсивності напружень знаходяться на підкріпленні.

Для пластини з двома круговими отворами було проведено експериментальне дослідження за допомогою поляризаційно-оптичного методу на стандартній установці ППУ-7 [15]. Зразок у вигляді прямокутної пластини з двома однаковими центральними розташованими круговими отворами мав такі розміри: довжину $L_1 = 1,35 \text{ м}$; ширину $L_2 = 0,6 \text{ м}$; товщину $h = 0,006 \text{ м}$. Діаметри отворів $d_1 = d_2 = 0,008 \text{ м}$, відстань між їх центрами $l = 0,014 \text{ м}$. Матеріал зразка – монолітний полікарбонат ($E = 2400 \text{ МПа}$; $\nu = 0,45$; $\sigma_B = 70 \text{ МПа}$). Розмір робочої частини зразка становила $0,6 \times 0,6 \times 0,006 \text{ м}$. Навантаження зразка на розтяг проводилось на пресі важільного

типу з кроком 500 Н до величини 4500 Н . Деякі результати експериментальних досліджень наведено на рис. 5.

а)

б)

Рис. 4 – Розподіл відносної інтенсивності напружень по розгортці контурів двошарового кільцевого підкріплення кругового отвору у матриці з $k_{жк} > 1$; матеріали шарів: а) сталь і мідь; б) мідь і сталь

а)

б)

Рис. 5 – Ізокліни, отримані при послідовному навантаженні зразка: а) $P = 2000\text{ Н}$; б) $P = 4000\text{ Н}$

Отримані числові результати розрахунків добре узгоджуються з експериментальними даними.

Висновки. За результатами проведеного комп'ютерного моделювання і серії обчислювальних експериментів щодо дослідження напружено-деформованого стану плоского елемента пружного неоднорідного середовища з круговим отвором та одно- або двошаровим кільцевим підкріпленням встановлено:

- при використанні навколо отвору кільця із більш «м'якого», ніж пластина матеріалу, вдається знизити напруження в області їх концентрації;
- розміщення двошарового кільця із матеріалу середньої жорсткості ближче до отвору в пластині з $k_{ж} < 1$ призводить до перерозподілу напружень: їх концентрація спостерігається не тільки поблизу контура отвору, але і на границі зовнішнього «м'якого» кільця з пластиною;
- застосування одношарового зовнішнього кільця з меншою жорсткістю, ніж жорсткість матриці, не показало суттєвого впливу на ККН;
- використання в «м'якої» матриці кілець із більш жорсткого матеріалу призводить до зростання концентрації напружень в пластині до 2 разів.

У перспективі представляє інтерес проведення досліджень щодо вибору раціональних параметрів підкріплюючих кілець (їх механічних і геометричних характеристик, кількості і розташування).

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Ванин Г.А.** Микромеханика композиционных материалов. К.: Наукова думка, 1985. 302 с.
2. **Васильду К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
3. **Гарт Е.Л., Бейцун В.С.** Напружено-деформований стан у двохфазному композиційному матеріалі з урахуванням впливу перехідного шару між включенням і матрицею // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Д: Ліра, 2018. Вип. 28. С. 34–44.
4. **Гарт Е.Л., Гудрамович В.С.** Проекційно-ітераційні схеми реалізації варіаційно-сіткових методів у задачах пружно-пластичного деформування неоднорідних тонкостінних конструкцій // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2018. Т. 61. № 3. С. 24–39.
5. **Гудрамович В.С., Гарт Э.Л., Струнин К.А.** Моделирование процесса деформирования пластины с упругими протяжёнными включениями на основе метода конечных элементов // Техническая механика. 2014. № 2. С. 12–23.
6. **Данилова С.В., Кулагина М.Ф.** Об одной контактной задаче теории упругости для составного кольца // Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Сер.: Механика деформируемого твердого тела. 2011. Вип. 4. С. 1468–1469.
7. **Морозов Н.Ф., Фрейдлин А.Б.** Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1998. Вип. 223. С. 220–223.
8. **Маковский В. Л.** Сооружение тоннелей метрополитенов. М.: Строительство Москвы, 1935. 425 с.
9. **Низомов Д.Н., Ходжибоев А.А.** Концентрации напряжений на контурах обделок смотровой галереи плотины Нурекской ГЭС // Докл. акад. наук респ. Таджикистан. Строит. механика. 2011. Т. 56. № 6. С. 497–503.
10. **Низомов Д.Н.** Система разрешающих уравнений метода граничных уравнений для полупространства с подкрепленным отверстием. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 2. С. 20–24.

11. **Низомов Д.Н., Ходжибоев А.А.** Численное моделирование задачи двухслойного подкрепления // Вестник МГСУ. 2012. Вып. 5. С. 67–71.
12. **Савин Г.Н.** Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.
13. **Савин Г.Н., Тульский В.И.** Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. К.: Наукова думка, 1971. 268 с.
14. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж.** Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
15. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справочное пособие / Под ред. Б. С. Касаткина. К.: Наукова думка, 1981. 584 с.
16. **Hart E.L., Hudramovich V.S.** Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No. 1. P. 55–69.
17. **Hart E.L., Hudramovich V.S.** Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80. Issue 2. P. 156–163.
18. **Zienkiewicz O.C., Teylor R.L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

УДК 539.3

*Э. Л. Гарт, д-р физ.-мат. наук, А. Г. Пацюк, канд. техн. наук,
В. С. Бейцун*

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДВУХСЛОЙНОГО ПОДКРЕПЛЕНИЯ

Проведено компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния плоского элемента упругой неоднородной среды с центрально расположенным круговым отверстием и одним/двумя кольцевыми подкреплениями с использованием метода конечных элементов. Исследовано влияние двухслойного подкрепления кругового отверстия в матрице на напряженно-деформированное состояние пластины, находящейся в условиях одноосного растяжения, при различных механических свойствах материала матрицы и включений, количества подкреплений.

Ключевые слова: упругая неоднородная среда; напряженно-деформированное состояние; круговое отверстие; двухслойное подкрепление; контактная граница; коэффициент концентрации напряжений; метод конечных элементов.

UDC 539:3

*E. L. Hart, Dr. Sci. (Phys.-Math.), A. G. Patsyuk, PhD (Tech.),
V. S. Beitsun*

COMPUTER SIMULATION OF THE TWO-LAYER REINFORCEMENT PROBLEM

Computer simulation of the stress-strain state of a flat element of an elastic inhomogeneous medium with a centrally located circular hole and one / two ring reinforcements using the finite element method is performed. The influence of two-layer reinforcement of a circular hole in the matrix on the stress-strain state of the plate under the action of uniaxial tensile load, with different mechanical properties of

the matrix material and inclusions, also the number of reinforcements is investigated.

Keywords: *elastic inhomogeneous medium; stress-strain state; circular hole; two-layer reinforcement; contact boundary; stress concentration factor; finite element method.*

Introduction. Elements of structures with reinforcements today can be found in almost every field of human activity: industry, building, construction, technology, medicine and others. Reinforcements serve to strengthen the structure, implement design and technological solutions, and prevent the growth and impact of defects. Widespread examples are the supports of tunnels, galleries of dams, bridges, which are subjected to various types of loads [8, 9]. If we are talking about solid arrays of materials with the same cross-section, it is more appropriate to consider a simplified model of the structure in the form of a shell or plate, which has features in the form of the inclusion of another material, hole or defect. These defects, not only cracks, but also arbitrary inhomogeneities of the material, primarily thin-walled, so they are powerful stress concentrators; it is in their vicinity that the processes of plastic deformation and fracture begin [1, 7]. Investigations of the stress-strain state (SSS) of bodies with such stress concentrators are one of the important problems in the mechanics of deformable solid.

A large number of works is devoted to the study of the stress state of plates with holes and inclusions at different external loads [3–5, 12]. The problem of determining the stress concentrations near the holes in the plates with reinforcements, subjected to internal and external pressure, is an extremely important class of engineering problems [6, 9–13].

In this work, we study the effect of two-layer reinforcement of a circular hole in the matrix on SSS of the plate under the action of uniaxial tensile load, with different mechanical properties of the matrix material and inclusions and the number of reinforcements.

Formulation of the problem. An inhomogeneous flat element Ω with dimensions $L_1 \times L_2$ of elastic medium Ω_1 (matrix) with centrally located circular hole and one / two annular reinforcements Ω_2 , Ω_3 and circular hole was considered. On the plate boundary the uniaxial stretching efforts are set. It is necessary to define SSS with the influence of one annular reinforcement and its location relative to the circular hole; the effect of two rings on the SSS plate; influence of mechanical properties of a matrix, inclusions on stress concentration factor ("hard" or "soft" inclusion).

The finite element method [18] is implemented to study the influence of mechanical properties of inclusions on the plates SSS in the places of stress concentration factors.

Conclusions. According to the results of computer modeling and a number of computational experiments on the study of SSS of a flat element of an elastic inhomogeneous medium with a circular hole and one-, two-layer reinforcement, it is established:

- when using around the hole rings with a material "softer" than the plate, it is possible to reduce the stress in the area of their concentration;
- placement of a two-layer ring made of medium-hardness material closer to the hole in the "hard" plate leads to a redistribution of stresses: their concentration is observed not only near the hole contour, but also at the border of the outer "soft" ring with the plate;
- the use of a one-layer outer ring with a lower rigidity than the matrix rigidity did not show a significant effect on the stress concentration factor;
- the use of rings made of a harder material in a "soft" matrix leads to an increase in the stress concentration in the plate up to 2 times.

In the future, it is of interest to conduct research on the choice of rational parameters of reinforcing rings (their mechanical and geometric characteristics, number and location).

REFERENCES

1. **Vanin G.A.** Micromechanics of composites. Kiev: Naukova dumka, 1985. 302 p. (in Russian).
2. **Washizu K.** Variation methods in the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Mir, 1987. 544 p. (in Russian).
3. **Hart E.L., Beitsun V.S.** Stressed-deformed condition in two-phase composition material taking into account the influence of the transition layer between the inclusion and the matrix // Problems of computational mechanics and strength of structures: col. of science works. Dnipro: Lira. 2018. No. 28. P. 34–44. (in Ukrainian).
4. **Hart E.L., Hudramovich V.S.** Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in problems of elastic-plastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // Mathematical methods and physical and mechanical fields. 2018. Vol. 61. No. 3. P. 24–39. (in Ukrainian).
5. **Hudramovich V.S., Hart E.L., Strunin K.A.** Modeling of the deformation process of a plate with elastic long inclusions on the basis of the finite element method // Techn. Mechanics. 2014. No. 2. P. 12–24. (in Russian).
6. **Danilova S.V., Kulagina M.F.** On a contact problem in the theory of elasticity for a compound ring // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Sci.: Solid mechanics. 2011. No.4. P. 1468–1469. (in Russian).
7. **Morozov N.F., Freydin A.B.** Zones of phase changes and phase changes of elastic bodies at different types of a stressed state // Works of V. A. Steklov's Mathematical Institute. 1998. Vol. 223. P. 220–223. (in Russian).
8. **Makovsky V.L.** Construction of subway tunnels. Moscow: Stroitel'stvo Moskvyy, 1935. 425 p. (in Russian).
9. **Nizomov D.N., Hojiboev A.A.** Stress concentrations on the contours of the lining of the viewing gallery of the Nurek HPP dam. // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Structural mechanics. 2011. Vol. 56. No. 6. P. 497–503. (in Russian).
10. **Nizomov D.N.** System of resolving equations of boundary integral approach for the half-space with reinforced hole. // Structural mechanics of engineering structures and structures. 2012. No. 2. P. 20–24. (in Russian).
11. **Nizomov D.N., Hojiboev A.A.** Numerical modelling of the problem of double-layer reinforcement. // Vestnik MGSU. 2012. No. 5. P. 67–71. (in Russian).
12. **Savin G.N.** Stress distribution around holes. Kiev: Naukova dumka, 1968. 888 p. (in Russian).

13. **Savin G.N., Tul'skij V.I.** Plates reinforced with compound rings and elastic pads. Kiev.: Naukova dumka, 1971. 268 p. (in Russian).
14. **Timoshenko S.P., Goodier J.** Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1975. 576 p. (in Russian).
15. Experimental Methods for Investigating Deformations and Stresses: A Handbook / Ed. B.S. Kasatkin. K.: Naukova Dumka, 1981. 584 p. (in Russian).
16. **Hart E.L., Hudramovich V.S.** Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No. 1. P. 55–69.
17. **Hart E.L., Hudramovich V.S.** Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80. Issue 2. P. 156–163.
18. **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

*Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро,
Україна*

Надійшла до редколегії 10.06.2020