DOI 10.15421/4220018
УДК 693.3

П. О. Стеблянко¹, д-р фіз.-мат. наук,
К. Е. Дьомічев², канд. техн. наук, О. Д. Петров³, PhD

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ ЕЛЕМЕНТІВ, ВИГОТОВЛЕНИХ ІЗ МАТЕРІАЛІВ З ПАМ'ЯТТЮ ФОРМИ ПРИ ЗНАЧНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ

Досліджено поведінку функціонально-неоднорідних матеріалів на прикладі матеріалів з пам'яттю форми при значних деформаціях (до 15%). Для розв'язання задач моделювання поведінки тіл із функціонально-неоднорідних матеріалів при великих деформаціях обов'язковою умовою є врахування нелінійності. При побудові фізичних співвідношень передбачається, що деформація в точці представлена як сума пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, пластичної деформації та деформації, яка викликана змінами температури. Задача розглядається в геометрично нелінійній постановці. При розв'язанні задачі пружно-пластичності враховується нелінійність в рівняннях руху (при деформаціях від 7% до 15%).

Ключові слова: функціонально-неоднорідні матеріали; математичне моделювання; геометрична не лінійність; матеріали з пам'яттю форми.

Вступ. Останнім часом важливі деталі елементів конструкцій і пристроїв виготовляються з матеріалів, які мають властивість пам'яті форми і ведуть себе псевдо-пружно-пластично [7]. У процесі виготовлення вони можуть отримувати великі пластичні деформації, перебувати під впливом складного нестационарного силового і температурного навантажень. До складних процесів деформування може призводити їх нерівномірне нагрівання разом з силовими чинниками. Для моделювання поведінки таких елементів конструкцій потрібно визначати нестационарний термомеханічний стан не тільки на псевдо-пружній стадії деформування, а й за межею пружності. Тому розробка методів розв'язання таких нестационарних задач термомеханіки для просторових тіл з пам'яттю форми та термо-псевдо-пружно-пластичністю є актуальною задачею.

Псевдо-пружно-пластичність – це здатність матеріалу при активному навантаженні накопичувати деформації певного значення в режимі більш високої температури, а потім після розвантаження (через петлю гістерезису) повертатися до початкового стану. Основним механізмом є зворотна мартенситна трансформація між фазами твердого тіла, яка може відбуватися при кімнатній температурі. Така трансформація може бути викликана зміною температури або за допомогою силових факто-

рів. Матеріал також характеризується нелінійною механічною поведінкою та великими деформаціями.

Сплавами, які демонструють пам'ять форми та псевдо-пружно-пластичність, є такі: NiTiAuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, NiFeGa, NiTiNb, NiNiGa, NiFeGa, NiPi, NiPeGa, NiPiGi [6, 3]. Такі характеристики роблять сплави з пам'яттю форми (СПФ) придатними для використання в різних пристроях або як складові частини в деяких передових композиційних матеріалах. Сплав NiTi лідирує в більшості таких застосувань завдяки своїм структурним властивостям.

Перші СПФ були розроблені в середині минулого століття; однак не існує строгих і надійних визначальних моделей постійного рівня, необхідних для інженерних застосувань цих матеріалів. Взаємозв'язок між мікроскопічною та макроскопічною поведінкою дуже складний і досі не розроблений в тій мірі, якої вимагають такі моделі і практичні задачі. Частково це пояснюється досить сильною залежністю механічних властивостей матеріалу від температури, швидкості навантаження, діапазону деформації, геометрії досліджуваного тіла, термомеханічної історії та природи навколишнього середовища, а також взаємодії між цими параметрами.

За результатами аналізу встановлено, що в даний час існує цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки СПФ, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю. Більшість з них будуються на підставі класичних уявлень, тобто ставлять собі за мету безпосередньо описати експериментальні дані, отримані на різних зразках при простому і складному навантаженні. Однак, як встановлено в експериментальних дослідженнях, поведінка матеріалу в точці тіла в загальному випадку відрізняється від поведінки зразка в цілому, і при цьому можуть мати місце значні деформації.

Постановка геометрично нелінійної задачі термо-пружно-пластичності при значних деформаціях. Основною задачею нестационарної теорії термо-пластичності є визначення швидкостей переміщень і компонентів тензорів напружень і деформацій, що виникають у тривимірному тілі в процесі його навантаження та нагріву, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу при значних деформаціях. Процес навантаження будемо розглядати таким, який змінюється в часі, що може викликати рух окремих частин тіла.

Спочатку ізотропне однорідне тривимірне тіло, обмежене заданою поверхнею, в початковий момент часу знаходиться в природному ненапруженому стані при визначеній температурі (для кожної точки тіла). Потім тіло піддається нагріву і навантаженню зовнішніми силами. Це можуть бути: об'ємні сили, що впливають на кожен елемент тіла; поверхневі сили, що діють на одній частині поверхні тіла. На другій частині поверхні тіла, яка може бути певним чином закріплена, задаються швидкості переміщень як функції координат і часу.

Припустимо, що нагрів і навантаження тіла протікають так, що виникають деформації, які можуть суттєво впливати на зміну температури цього елемента. Будемо розглядати такі процеси навантаження і рівні

температур, при яких реологічні властивості матеріалу не виявляються. Конфігурація тіла задається рівнянням поверхні, яка обмежує його. Крім того, потрібно задати теплофізичні і механічні характеристики матеріалу тіла і умови його теплообміну з навколишнім середовищем.

Теплофізичні властивості матеріалу характеризуються коефіцієнтами теплопровідності і температуропровідності, які можуть залежати від температури. Умови теплообміну задаються у вигляді відповідних граничних умов, а механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування по прямолінійних траєкторіях і траєкторія малої кривини задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків, отриманих при різних фіксованих температурах. Крім цього, задаються значення коефіцієнтів Пуассона ν і лінійного теплового розширення.

Виходячи з перерахованих даних, необхідно визначити температуру, три складові вектора швидкості переміщень, шість компонент тензора напружень і шість компонент тензора деформацій. Отже, треба визначити шістнадцять невідомих функцій часу і трьох координат. Для цього необхідно скористатися рівняннями руху, геометричними і фізичними рівняннями, а також рівнянням теплопровідності. Температурне поле в довільній точці тіла при наявності в ньому джерел тепла і в разі урахування тепла, яке виділяється в процесі його деформування, визначається шляхом розв'язання рівняння теплопровідності при певних початкових і граничних умовах [7, 4].

Після визначення поля температур для різних моментів часу розшукуються складові вектора швидкості переміщень і компоненти тензорів напружень і деформацій, що задовольняють три диференціальні рівняння руху, шість геометричних рівняння і шість фізичних рівняння. Ці рівняння розв'язуються при певних початкових і граничних умовах.

Визначення невідомих здійснюється за таким алгоритмом. За основні невідомі приймаються три складові вектора швидкості переміщень і шість компонент тензора напружень, для яких безпосередньо формулюються граничні умови. При цьому з шести фізичних рівнянь за допомогою геометрично нелінійних співвідношень Коші виключаються всі компоненти тензора деформацій, які потім визначаються на підставі вже відомих складових вектора швидкості переміщень.

При розв'язанні нестационарної задачі термо-пластичності будемо користуватися визначальними рівняннями, що описують неізотермічні процеси навантаження як по прямолінійних траєкторіях, так і по траєкторіях деформування малої кривини.

Повна система рівнянь. Рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується, в ортогональній системі координат $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ в *геометрично нелінійній* постановці представимо у вигляді [3]

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\sigma_{ij} + \sigma_{in}^0 \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_n} \right) + B(\sigma_{mn}; \dots),$$

$$i, j, n, m=1, 2, 3, \quad (1)$$

де ρ – густина. Величини, які знаходяться в правій частині рівняння (1), наведені в [2, 4]. Швидкість переміщень визначається як похідна від переміщення за часом

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad i=1, 2, 3.$$

Зазначимо, що після визначення швидкостей зміщень визначаються і самі переміщення шляхом безпосереднього інтегрування відповідних швидкостей.

В рамках запропонованого підходу будемо використовувати лінійні рівняння руху нескінченно малого об'ємного елемента суцільного середовища, що деформується. Вони мають вигляд

$$\frac{\partial v_j^0}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial \alpha_i} + B(\sigma_{mn}^0). \quad (2)$$

В формулах (1) і (2) через σ_{ij}^0 та v_j^0 позначено невідомі, які розшукуються за допомогою геометрично лінійного підходу.

Зазначимо, що при деформаціях, менших 7%, рівняння руху (1) доцільно використовувати в геометрично лінійній постановці (2)

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \alpha_i} + B(\sigma_{mn}).$$

В загальному випадку ортогональної системи координат тензор деформацій і складові вектора переміщень пов'язані такими нелінійними співвідношеннями [6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + e_{11} \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Інші складові тензора деформацій отримуються з (3) шляхом циклічної перестановки індексів. У випадку використання ортогональної декартової системи координат

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}; e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}; e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3};$$

$$\begin{aligned}
e_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}; e_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}; e_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}; \\
2\omega_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_3}; 2\omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}; 2\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}.
\end{aligned}
\tag{4}$$

З урахуванням цього, після диференціювання за часом в геометрично нелінійному випадку для швидкостей деформацій можна записати

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} &= (1 + e_{11}) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + (1 + e_{22}) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} &= \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + (1 + e_{33}) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{11}}{2} + \frac{e_{22}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{e_{12}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \\
&\quad + \frac{(e_{22} - e_{11})}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} \right) + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + \left(\frac{e_{13}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{22}}{2} + \frac{e_{33}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} \right) + \left(\frac{e_{23}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{23}}{2} + \omega_1 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \\
&\quad + \frac{(e_{33} - e_{22})}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} \right) + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{e_{21}}{2} - \omega_3 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3}; \\
\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial t} &= \left(1 + \frac{e_{33}}{2} + \frac{e_{11}}{2} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{e_{31}}{2} - \omega_2 \right) \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{31}}{2} + \omega_2 \right) \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + \\
&\quad + \frac{(e_{11} - e_{33})}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{e_{12}}{2} + \omega_3 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + \left(\frac{e_{32}}{2} - \omega_1 \right) \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1}.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Система рівнянь (1), (5) замикається фізичними співвідношеннями, що зв'язують напруження і деформації.

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженнями і деформаціями. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформування. У загальному випадку значення деформацій є функціями процесу зміни напружень і температури, які визначаються характеристиками всього попереднього процесу зміни фізичних факторів, а не тільки поточними значеннями. Докладні відомості з цього питання можна знайти в роботах Ю. М. Шевченка і його учнів [5].

Розглянемо прості або близькі до простих процеси деформування і процеси деформування по траєкторіях малої кривини. Траєкторіями деформування, близькими до прямолінійних, називають ті траєкторії, які відхиляються від прямих ліній, що проходять через початок координат і точку на траєкторії, що відповідає початку межі текучості, не більше, ніж на слід запізнювання векторних властивостей матеріалу (5 – 15 меж плинності за деформаціями). У цьому випадку найменший радіус кривизни траєкторії деформування більше сліду запізнювання. Якщо ж відхилення від прямої лінії більше сліду запізнювання, а радіус кривини траєкторії деформування менше його, то деформування відбувається по траєкторії малої кривини. При цьому вектор напружень спрямований по дотичній до траєкторії необоротних деформацій.

Запишемо фізичні співвідношення, придатні для дослідження обох процесів. Для цього розбіємо процес навантаження тіла за часом на окремі досить малі етапи, на кожному з них за допомогою постулату ізотропії і закону пружної зміни обсягу записується зв'язок між напруженнями і деформаціями [4, 5]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}, \quad (6)$$

де

$$a_{ijkl} = 2G^* \delta_{kl} \cdot \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{kl} - (1 - \frac{\delta_{kl}}{3})(G^* - G_t) \frac{l_{ij} \cdot l_{kl}}{I^2},$$

$$b_{ij} = b_T \delta_{ij}, \quad b_T = - \left[K \cdot \alpha_t + (T - T_0) \frac{\partial}{\partial t} (K \cdot \alpha_t) \right] \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

До вигляду, аналогічному (6), приводяться і співвідношення теорії процесів малої кривини. Тут

$$a_{kkkk} = 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu}, a_{kknn} = 2G \frac{\nu}{1-2\nu}, a_{knkn} = 2G, a_{knrr} = a_{knrs} = a_{kkrs} = 0, \quad (7)$$

$$b_{ij} = b_T \delta_{ij} - \sqrt{2} G \frac{S_{ij}}{S} (\dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^{(n)})^{1/2}, \quad k \neq n, \quad r \neq S.$$

Для подальшого викладання матеріалу приведемо вказані рівняння системи до дещо іншого вигляду. Виконаємо виключення швидкостей деформацій в визначальних співвідношеннях (6) за допомогою геометрично нелінійних співвідношень (5). Тоді можна записати

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = & C_{ij11} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1} + C_{ij21} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_1} + C_{ij31} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_1} + C_{ij12} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_2} + C_{ij22} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_2} + C_{ij32} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_2} + \\ & + C_{ij13} \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_3} + C_{ij23} \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_3} + C_{ij33} \frac{\partial v_3}{\partial \alpha_3} \equiv C_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial \alpha_r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут введено додаткові позначення

деформації зразка зникає. Стрибок деформації, викликаний фазовим переходом, також зникає і залишається лише пластична деформація.

Приклади застосування матеріалів з пам'яттю форми. Найчастіше функціональні матеріали з ефектом пам'яті форми застосовуються в сучасній техніці і медицині. Проектування пристроїв з елементами з МПФ значно відрізняється від розробки деталей із конструкційних матеріалів. За особливостями застосування пристроїв з ефектом пам'яті форми їх розбивають на кілька груп [6].

За принципом роботи пристрої поділяють на надпружні, які спрацюють один раз, та такі, які спрацюють багато разів.

За умовами протидії формозміни елемента з пам'яттю форми пристрою, існують такі варіанти. Відновлення форми виробів відбувається за відсутності протидії, тобто у вільному стані. Формозміна виробу здійснюється в умовах жорсткої протидії (термомеханічні з'єднання). У процесі відновлення форми протидія незначна або може змінюватися за величиною (термосилові елементи).

Однією з найбільш затребуваних в наш час областю застосування МПФ є медицина. Існує значна кількість таких імплантів з МПФ. Важливою особливістю тут є надпружна поведінка при температурі тіла людини. У такому стані імпланти здатні до значних змін своєї форми під дією функціонального навантаження. При цьому жорсткість імпланту близька до жорсткості біологічних тканин, які він повинен замінити або зміцнити (рис. 2).

Рис. 2 – Зовнішній вигляд деяких імплантів [8]:
а) – фіксатор для з'єднання фрагментів плісуючої кістки;
б) – межостісна зв'язка;
в) – імпланти, які застосовуються в стоматології;
г) – фіксатор для стабілізації хребта

На наш погляд, характерною особливістю усіх цих деталей є наявність точок тонкого тіла зі значною зміною кривини. Це означає, що при їх виготовленні з МПФ при відповідній температурі прутки в таких точках зазнавали значні пластичні деформації.

Таким чином, конфігурація області інтегрування (тіла) в кожен момент часу визначається полем переміщень. Загальна геометрично нелінійна задача термо-пружно-пластичності полягає у визначенні вектора переміщень, швидкостей переміщень, тензорів напружень та деформацій і температурного поля. Усі вони задовольняють повну систему рівнянь: рівняння руху (рівноваги), визначальні співвідношення, рівняння теплопровідності, кінематичні співвідношення, граничні умови і початкові умови.

Числові результати та їх обговорення. Розрахунок елементів конструкції, що трансформуються, в основному зводиться до вибору оптимальної схеми і ступеня деформації, які дозволяють визначити геометрію цього елемента і технологію його застосування. При виборі схеми деформації будемо керуватися такими міркуваннями. Максимальні переміщення можна реалізовувати при деформації вигином, мінімальні – при стисканні. При цьому ступінь деформації елемента, призначеного для багаторазового спрацьовування, не повинна перевищувати критичну ступінь деформації (до руйнування). В цьому випадку при нагріванні буде спостерігатися майже повне відновлення форми і після охолодження до робочої температури елемент можна повторно деформувати і нагрівати без небезпеки порушення його геометрії.

Розглянемо числових приклад: вигин прутка діаметром 0,01 м із МПФ у тривимірній постановці. Правий край затиснутий, тому радіальне переміщення дорівнює нулю. На лівому краю (10 мм від защемленого правого краю) задається швидкість радіального переміщення. Процес навантаження відбувається до моменту, коли в околі защемлення не виникають значні деформації, більше 15% при температурі 100°C . Поле інтенсивності в точці максимального вигину прутка подано на рис. 3.

Рис. 3 – Поле інтенсивності деформації в точці максимального вигину:
 а) – деформація 15%, температура 100°C ;
 б) – розподіл інтенсивності деформації після початку охолодження (80°C);
 в) – розподіл інтенсивності деформації при охолодженні до робочої температури 20°C

Висновки. Розроблено новий варіант методу дослідження поведінки елементів конструкцій з функціонально-неоднорідних матеріалів, який можна застосовувати в задачах термо-пружно-пластичності при наявності великих деформацій.

Розв'язано новий клас нестационарних задач теорії термопружної пластичності для псевдо-пружно-пластичних матеріалів із пам'яттю форми, в якому врахована можливість виникнення в деяких точках тіла значних пластичних деформацій.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Коллеров М.Ю., Гусев Д.Е., Гуртовая Г.В., Ручина Н.В., Гвоздева О.Н.** Функциональные материалы с эффектом памяти формы. М., 2015. 161 с.
2. **Новожилов В.В.** Теория упругости. Л: Судпромгиз, 1958. 371 с.
3. **Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.** Большие упруго-пластические деформации. Теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
4. **Стеблянко П.А.** Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. К.: Наукова думка, 1998. 304 с.
5. **Шевченко Ю.Н., Саеченко В.Г.** Пространственные задачи термо-вязко-пластичности: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикладная механика, 2016. Т. 52. № 3. С. 3–70.
6. **Abeyaratne R., Knowles J.K.,** Evolution of Phase Transitions: A Continuum Theory // Cambridge University Press: 2006, 242 p.
7. **Petrov A., Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V.** Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermopseudoelastic-plasticity // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.
8. **Shaw J.A., Kyriakides S.** Initiation and propagation of localized deformation in elastoplastic strips under uniaxial tension // International Journal of Plasticity. 1998. Vol.13. P. 837–871.
9. **Steblyanko P., Shevchenko Yu.** Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems. ETS-Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Verlag. 2014. N 7. P. 630–636.
10. **Steblyanko P., Chernyakov Yu., Petrov A., Loboda V.** Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading // Structural Integrity, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019. Vol. 8. P. 205–208.

УДК 693.3

*П. А. Стеблянко¹, д-р физ.-мат. наук,
К. Е. Демичев², канд. техн. наук, А. Д. Петров³, PhD*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Исследовано поведение функционально-неоднородных материалов на примере материалов с памятью формы при значительных деформациях (до 15%). При построении физических соотношений предполагается, что

деформация в точке представлена как сумма упругой составляющей, скачка деформации при фазовом переходе, пластической деформации и деформации, вызванной изменениями температуры. Задача рассматривается в геометрически нелинейной постановке. При решении задачи упругопластичности учитывается и нелинейность в уравнениях движения и геометрических соотношениях (при деформациях от 7% до 15%).

Ключевые слова: функционально-неоднородные материалы; математическое моделирование; геометрическая нелинейность; материалы с памятью формы.

UDC 539.3

*P. A. Steblyanko¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
K. E. Domichev², PhD (Tech.), A. D. Petrov³, PhD*

SIMULATION OF BEHAVIOR OF ELEMENTS MADE FROM MATERIALS WITH FORM MEMORY AT SIGNIFICANT DEFORMATIONS

The work is devoted to the study of the behavior of functionally inhomogeneous materials on the example of materials with shape memory at significant deformations (up to 15%). When constructing physical relations, it is assumed that the deformation at a point is represented as the sum of the elastic component, the jump deformation during the phase transition, plastic deformation and deformation caused by changes in temperature. The problem is posed in a geometrically nonlinear formulation. When solving the problem of elastic-plasticity, nonlinearity in the equations of motion is taken into account (at deformations from 7% to 15%).

Keywords: functionally inhomogeneous materials; mathematical modeling; geometric nonlinearity of materials with shape memory.

Introduction. Modern parts and elements of structures and devices are made of materials that have the property of shape memory and behave pseudo-elastic-plastic. In the manufacturing process, they can receive large plastic deformations, be under the influence of complex non-stationary force and temperature load. Their uneven heating in combination with force factors can also lead to complex deformation processes. To model the behavior of such structural elements, it is necessary to determine the nonstationary thermo-mechanical state not only at the pseudo-spring stage of deformation, but also beyond the boundary. Existing numerical methods for solving such non-stationary problems usually lead to significant computational difficulties and are not always effective. Therefore, the development of methods for solving non-stationary problems of thermo-mechanics for spatial bodies with shape memory and pseudo-elastic-plasticity is an urgent task.

Pseudo-elastic-plasticity is the ability of a material under active load to accumulate deformations of a certain value in the mode of higher temperature, and then after unloading (through the hysteresis loop) to return to the initial state. The main mechanism is the inverse martensitic transformation between the phases of the solid, which can occur at room temperature. Such a transformation can be caused by a change in temperature or by force factors. The material is also characterized by nonlinear mechanical behavior and large deformations. Alloys that exhibit shape memory and pseudo-

elastic-plasticity are as follows: NiTiAuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, NiFeGa, NiTiNb, NiNiGa, NiFeGa, NiPi, NiPeGa, NiPiGi [1; 3]. Such characteristics make SPF suitable for use in various devices or as components in some advanced composite materials. NiTi alloy leads in most such applications due to its structural properties.

The first shape memory alloys (SPFs) were developed in the middle of the last century; however, there are no rigorous and reliable fixed-level defining models required for the engineering applications of these materials. The relationship between microscopic and macroscopic behavior is very complex and has not yet been developed to the extent required by such models and practical tasks. This is partly due to the strong dependence of mechanical reactions on temperature, load velocity, deformation range, geometry of the studied body, thermo-mechanical history and nature of the environment, as well as the interaction between these parameters.

The analysis shows that there are currently a number of models to describe the thermo-mechanical behavior of alloys with shape memory, pseudo-elasticity and pseudo-elastic-plasticity. Most of them are based on classical ideas, in aim to directly describe the experimental data obtained on different samples under simple and complex loads. However, as established in experimental studies, the behavior of the material at the point of the body in the General case differs from the behavior of the sample as a whole and there may be significant deformations.

Formulation of the problem. The main task of the nonstationary theory of thermo-plasticity is to determine the velocities and components of stress and strain tensors that occur in a three-dimensional body during its loading and heating, when some elements of the body work beyond the elasticity of the material at significant deformations. The process of loading will be considered as changing over time, which can cause movement of certain parts of the body.

Initially, an isotropic and homogeneous three-dimensional body bounded by a given surface is initially in a natural unstressed state at a certain temperature (for each point of the body). Then the body is subjected to heating and loading by external forces. These can be three-dimensional forces that affect each element of the body. Surface forces act on one part of the body surface. On the second part of the surface of the body, which can be fixed in some way, the velocities are set as a function of coordinates and time.

Suppose that the heating and loading of the body occur so that there are deformations that can significantly affect the temperature change of this element. We will consider such load processes and temperature levels at which the rheological properties of the material are not detected. The configuration of a body is given by the equation of the surface that limits it. In addition, you need to specify the thermophysical and mechanical characteristics of the body material and the conditions of its heat exchange with the environment.

Thermo-physical properties of the material are characterized by coefficients of thermal conductivity and thermal conductivity, which may depend on temperature. The heat transfer conditions are set in the form of appropriate

ate boundary conditions, and the mechanical characteristics of the material in the study of deformation processes on straight trajectories and the trajectory of small curvature are set in the form of instantaneous tensile diagrams of samples obtained at different fixed temperatures. In addition, the values of the Poisson's ratios and linear thermal expansion are set.

Based on these data, it is necessary to determine the temperature, the three components of the velocity vector, the six components of the stress tensor and the six components of the strain tensor. Therefore, it is necessary to determine sixteen unknown functions of time and three coordinates. To do this, use the equations of motion, geometric and physical equations, as well as the equation of thermal conductivity. The temperature field at any point of the body in the presence of heat sources and in the case of heat, which is released during its deformation, is determined by solving the equation of thermal conductivity under certain initial and boundary conditions [2; 4].

After determining the temperature field for different points in time, the components of the velocity vector and components of stress and strain tensors satisfying three differential equations of motion, six geometric equations and six physical equations are searched. These equations are solved under certain initial and boundary conditions. The initial conditions are set for all unknowns at the initial time. On the part of the body surface where the forces $b(x_i, t)$ are given, the components of the stress tensor must satisfy three boundary conditions

$$\sigma_{in}(\alpha_k, t) = \sigma_{ij} \cdot n_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Where n_j – the directing cosines of the external normal to the body surface at the appropriate point. On the other part of the surface, where the specified components of the vector of the velocity, the velocity must take the specified values

$$v_i = V_i(x_j, t).$$

Another formulation of the boundary conditions is possible, when three conditions are set on the surface of the body, taken in a certain way from the above conditions.

The definition of the unknown will be found as follows. The main unknowns are three components of the velocity vector and six components of the stress tensor, for which the boundary conditions are directly formulated. In this case, all components of the strain tensor are excluded from the six physical equations by means of geometrically nonlinear Cauchy relations, which are then determined on the basis of already known components of the velocity vector.

When solving the nonstationary thermo-plasticity problem, we will use the defining equations that describe nonisothermal loading processes along both rectilinear trajectories and small curvature deformation trajectories.

Conclusion. A new variant of the method of studying the behavior of structural elements made of functionally inhomogeneous materials has been

developed, which can be used in thermo-elastic-plasticity problems in the presence of large deformations.

A new class of nonstationary problems of the theory of thermoelastic plasticity for pseudo-elastic-plastic materials with shape memory, which takes into account the possibility of significant plastic deformations in some parts of the body, is solved

REFERENCES

1. **Kollerov M.Yu., Gusev DE, Gurtovaya GV, Ruchina NV, Gvozdeva ON.** Functional materials with shape memory effect. M., 2015. 161 p. (in Russian).
2. **Novozhilov V.V.** Elasticity theory. Leningrad: Sudpromgiz, 1958. 371 p. (in Russian).
3. **Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.** Large elastic-plastic deformations. Theory, algorithms, applications. Moscow: Nauka, 1986. 232 p. (in Russian).
4. **Steblyanko P.A.** Splitting methods in spatial problems of plasticity theory. Kiev: Naukova Dumka, 1998. 304 p. (in Russian).
5. **Shevchenko Y.N. Savchenko V.G.** Spatial problems of thermo-viscous-plasticity: focus on Ukrainian research (review) // Applied Mechanics. 2016. Vol. 52. No. 3. P. 3–70. (in Russian).
6. **Abeyaratne R., Knowles J.K.,** Evolution of Phase Transitions: A Continuum Theory // Cambridge University Press, 2006. 242 p.
7. **Petrov A. Chernyakov Yu., Steblyanko P., Demichev K., Haydurov V.** Development of the method with enhanced accuracy for solving problems from the theory of thermo-pseudoelastic-plasticity // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 4/7 (94). P. 25–33.
8. **Shaw J.A., Kyriakides S.** Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension // International Journal of Plasticity. 1998. Vol.13. P. 837–871.
9. **Steblyanko P., Shevchenko Yu.,** Computational methods in stationary and non-stationary thermal-plasticity problems. ETS-Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Verlag. 2014. No 7. P. 630–636.
10. **Steblyanko P., Chernyakov Yu., Petrov A., Loboda V.** Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading // Structural Integrity, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, Springer Verlag, 2019. Vol. 8. P. 205–208.

¹ Університет митної справи і фінансів,
Дніпро, Україна,

² Київський міжнародний університет,
Київ, Україна,

³ Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна

Надійшла до редколегії 05.10.2020