DOI 10.15421/4220019
УДК 621.01:62-251:62-762

С. С. Шевченко, канд. техн. наук

МОДЕЛЬ И РАСЧЕТ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РОТОР – ЩЕЛЕВЫЕ УПЛОТНЕНИЯ

Построены модель гидромеханической системы ротор – щелевые уплотнения, модели однодисковых роторов, расчётная схема щелевого уплотнения с подвижной втулкой. Получены аналитические зависимости для расчета динамических характеристик гидромеханической системы, описывающие радиально - угловые колебания ротора центробежной машины в щелевых уплотнениях. Получены выражения для построения амплитудных и фазовых частотных характеристик

Ключевые слова: *математическая модель; гидромеханическая система; радиально – угловые колебания; частотные характеристики.*

Введение. В процессе создания центробежных насосов на любые параметры, помимо отработки экономичной проточной части, первостепенными задачами являются снижение вибраций, обеспечение требуемой надежности и долговечности опор и разработка надежных и достаточно герметичных уплотнений [1]. В центробежных насосах до 10% потребляемой мощности теряется на протечки через щелевые уплотнения рабочих колес и системы авторазгрузки осевых сил [6]. Энергию объемных потерь можно превратить в полезную энергию, если щелевые уплотнения использовать одновременно как гидростатические опоры, способные обладать не только большой радиальной жесткостью, но и эффективно демпфировать колебания ротора [7]. В этом случае энергия протечек не только может обеспечить необходимую несущую способность опор, но и снизить до допустимого уровня вибрации ротора даже при наличии значительной неуравновешенности [4]. Влияние среды особенно существенно при наличии больших градиентов скоростей и давлений, что характерно для малых зазоров щелевых уплотнений, на которых дросселируются большие перепады давления, а одна из стенок принадлежит вращающемуся и вибрирующему ротору [8].

Анализ литературы. Как указано в [5], ротор и щелевые уплотнения представляют замкнутую гидромеханическую систему. Этим обусловлена основная особенность и сложность проблем динамики роторов центробежных машин. Уплотнения не только изменяют критические частоты ротора, но и существенно влияют на амплитуды его вынужденных колебаний и на границы его устойчивости [2].

Динамические характеристики щелевых уплотнений как промежуточных опор исследованы в [12]. В ней получены линеаризованные вы-

© С.С. Шевченко, 2020

ражения радиальных гидродинамических сил и моментов, действующих на ротор со стороны потока жидкости в зазоре щелевого уплотнения. Силовые характеристики определяются геометрическими и режимными параметрами уплотнений: начальной конусностью и радиальным зазором, длиной и средним радиусом канала, дросселируемым перепадом давления, частотой вращения ротора, закруткой потока на входе в зазор, физическими свойствами жидкости. Анализ влияния щелевых уплотнений на динамику ротора позволяет выбирать их конструкцию так, чтобы во всем рабочем диапазоне уровень вибраций ротора не выходил за допустимые пределы [3].

Однако проблемы динамики роторов в щелевых уплотнениях несколько обойдены вниманием, поскольку для их решения требуется знание гидродинамических характеристик щелевых уплотнений. А это отдельная задача гидродинамики трехмерных нестационарных течений вязкой жидкости в кольцевых каналах, стенки которых вращаются и одновременно совершают радиально-угловые колебания [9].

Анализ литературы показал, что колебательные процессы, обусловленные гидродинамическими характеристиками уплотнений, и их влияние на динамику роторов недостаточно изучены.

Цель статьи. Получение аналитических зависимостей для расчета динамических характеристик гидромеханической системы ротор - щелевые уплотнения на основании построения и изучения её модели.

Постановка проблемы. Рассматриваются две типовые схемы однодискового ротора: с диском, находящимся между жесткими опорами (рис. 1,а) несимметричного (модель Р-1), симметричного $a = b$ (модель Р-1с) и консольного (рис. 1,б, модель Р-2). С обеих сторон диска (рабочего колеса) с массой *m* радиусом *R* и приведенной толщиной b_e расположены одинаковые щелевые уплотнения.

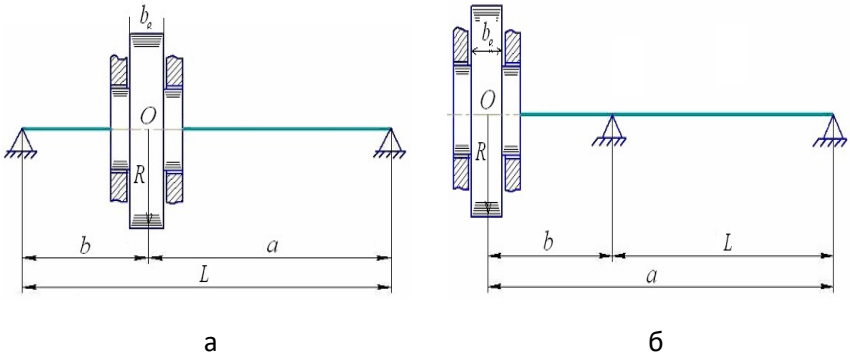

Рис. 1 – **Типовые схемы однодискового ротора в щелевых уплотнениях: а – с диском между опорами (модели Р-1, Р-1с); б – консольного (модель Р-2)**

Первая схема имитирует ротор одноступенчатого насоса с рабочим колесом двустороннего входа, вторая – ротор консольного насоса.

В обеих схемах радиальные смещения диска сопровождаются его поворотом в плоскости изогнутой оси вала. Инерционное сопротивление повороту характеризуется соответствующим гироскопическим моментом диска. Масса ротора сосредоточена в центре масс диска, а невесомый упругий вал вращается в жестких опорах.

Ротор статически и динамически неуравновешен: центр масс смещен относительно геометрического центра на величину эксцентриситета $\vec{a}(a_x, a_y)$, который представляет статическую неуравновешенность. Главные центральные оси инерции диска из-за перекоса посадки или других технологических погрешностей отклонены от главных осей сечения вала (главных осей жесткости вала) на углы γ_x, γ_y, характеризующие динамическую неуравновешенность ротора. Параметры неуравновешенности считаются заданными малыми величинами.

Модель динамической системы ротор – щелевые уплотнения. Упрощенная структурная схема системы ротор - щелевые уплотнения, показана на рис. 2. Радиальные (*x, y*) и угловые (ϑ_x,ϑ_y) колебания ротора во многом определяются гидродинамическими силами (*F*) и моментами (*M*), возникающими в уплотняющих зазорах (в кольцевых дросселях), а сами силы и моменты зависят от характера движения ротора и эксцентриситета его центра масс a. Еще одна обратная связь существует между геометрической формой зазора (средний радиальный зазор *H* и конусность ϑ_2) и давлением в зазоре *p* (*z,* φ): деформации уплотнительных колец определяются распределением давления, которое очень чувствительно к изменению величины и формы зазора. От скорости потока жидкости в зазоре *w* зависит также величина расхода через уплотнение *Q.*

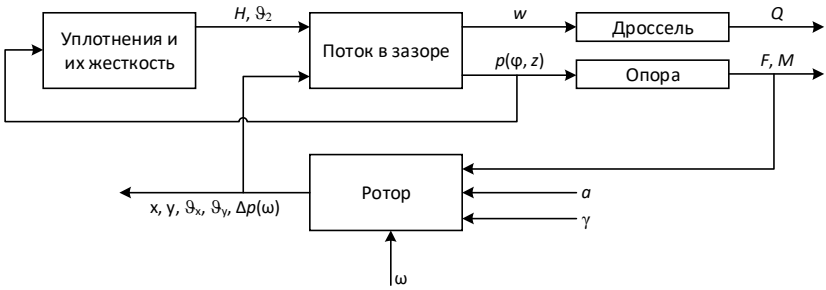

Рис.2 – **Структурная схема гидромеханической системы ротор – щелевые уплотнения**

Таким образом, при выборе конструкции щелевых уплотнений нужно учитывать не только их прямое назначение – уменьшать объемные по-

тери, но и не менее важную их функцию – обеспечивать необходимые вибрационные характеристики ротора.

Радиальные силы и моменты в щелевых уплотнениях. На рис. 3 показана модель щелевого уплотнения, которая представляет собой кольцевой дроссель, образованный внутренним цилиндром (валом) с малым углом конусности ϑ_A и внешним цилиндром (втулкой) с углом конусности ϑ_B; суммарный угол конусности канала $\vartheta_0 = \vartheta_B - \vartheta_A$. Параметр конусности канала $\theta_0 = \vartheta_0 l/2H$, $|\theta_0| \le 1$.

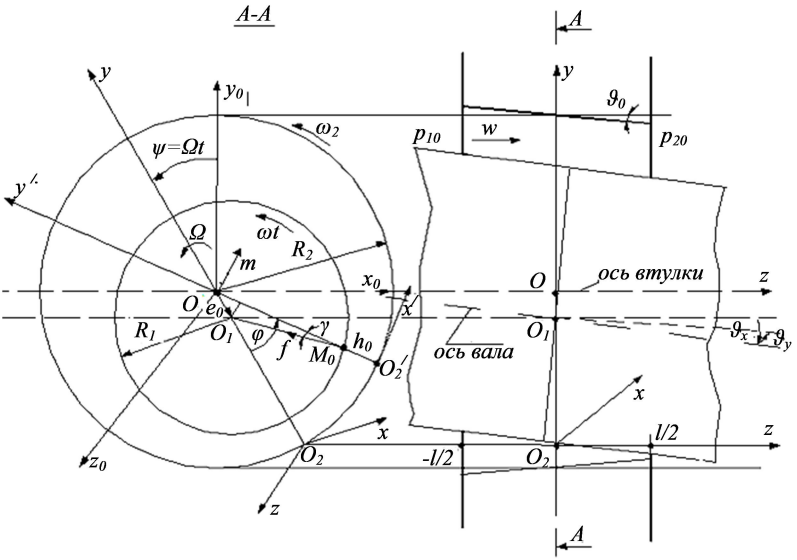

Рис. 3 – **Модель щелевого уплотнения с подвижной втулкой**

Вал и втулка вращаются вокруг собственных осей с частотами собственного вращения ω_1, ω_2. Сами оси вращаются вокруг неподвижного центра *O* с частотами прецессии Ω_1, Ω_2, а также совершают радиальные и угловые колебания. Оценка силовых характеристик для ламинарных и турбулентных режимов течения с учетом местных сопротивлений и с учетом закрутки потока на входе в зазор была проведена в [11].

Проекции на неподвижные оси координат отдельных составляющих гидродинамических сил и моментов

$$F_{s(x,y)} = F_{g(x,y)} + F_{d(x,y)} + F_{p(x,y)}, \; M_{s(x,y)} = M_{g(x,y)} + M_{d(x,y)} + M_{p(x,y)},$$

возникающих в одном щелевом уплотнении и отнесенных к массе ротора, имеют вид:

- силы и моменты, обусловленные инерцией жидкости:

$$\frac{F_{gx}}{m} = -k_g\left[\ddot{x} - \frac{12\theta_0 q_0}{Hl(2-n)}\dot{x} + \kappa\omega_a\dot{y} - \frac{2}{15}\kappa\omega_a\theta_0\frac{l}{2}\dot{\vartheta}_x\right],$$
$$\frac{F_{gy}}{m} = -k_g\left[\ddot{y} - \frac{12\theta_0 q_0}{Hl(2-n)}\dot{y} - \kappa\omega_a\dot{x} - \frac{2}{15}\kappa\omega_a\theta_0\frac{l}{2}\dot{\vartheta}_y\right], \quad (1)$$

$$\frac{M_{gx}}{m} = -k_g\frac{l}{30}\left(\frac{l}{2}\ddot{\vartheta}_x + 2\kappa\omega_a\theta_0\dot{x} + \kappa\omega_a\frac{l}{2}\dot{\vartheta}_y\right),$$
$$\frac{M_{gy}}{m} = -k_g\frac{l}{30}\left(\frac{l}{2}\ddot{\vartheta}_y + 2\kappa\omega_a\theta_0\dot{y} - \kappa\omega_a\frac{l}{2}\dot{\vartheta}_x\right); \quad (2)$$

- силы и моменты, обусловленные потоком вытеснения:

$$\frac{F_{dx}}{m} = -k_d\left[\dot{x} + \kappa\omega_a y - \frac{l}{5}\theta_0\left(\kappa\omega_a\vartheta_x - \dot{\vartheta}_y\right)\right],$$
$$\frac{F_{dy}}{m} = -k_d\left[\dot{y} - \kappa\omega_a x - \frac{l}{5}\theta_0\left(\kappa\omega_a\vartheta_y + \dot{\vartheta}_x\right)\right], \quad (3)$$

$$\frac{M_{dx}}{m} = -k_d\frac{l}{5}\left[\theta_0\left(\dot{y} - \kappa\omega_a x\right) + \frac{l}{12}\left(\kappa\omega_a\vartheta_y + \dot{\vartheta}_x\right)\right],$$
$$\frac{M_{dy}}{m} = k_d\frac{l}{5}\left[\theta_0\left(\dot{x} + \kappa\omega_a y\right) + \frac{l}{12}\left(\kappa\omega_a\vartheta_x - \dot{\vartheta}_y\right)\right]; \quad (4)$$

- силы и моменты, обусловленные дросселируемым на щелевом уплотнении перепадом давления Δp_0 (напорным течением):

$$\frac{F_{px}}{m} = -k_p\left[\left(\theta_0 + N\chi_m\right)x + \left(1 + 2\Delta\chi\right)\frac{l}{2}\vartheta_y\right],$$
$$\frac{F_{py}}{m} = -k_p\left[\left(\theta_0 + N\chi_m\right)y - \left(1 + 2\Delta\chi\right)\frac{l}{2}\vartheta_x\right], \quad (5)$$

$$\frac{M_{px}}{m} = -k_p\frac{l}{6}\left[N\Delta\chi y - 2\chi_m\frac{l}{2}\vartheta_x\right],$$
$$\frac{M_{py}}{m} = k_p\frac{l}{6}\left[N\Delta\chi x + 2\chi_m\frac{l}{2}\vartheta_y\right]. \quad (6)$$

Перейдем в формулах (1) – (6) к безразмерным координатам и приведенным силам и моментам, а также введем дополнительные обозначения

$$K_i = \frac{12q_0}{Hl(2-n)}, \quad j = \frac{ml^2}{60I}$$

где K_i – параметр, учитывающий локальную составляющую силы инерции жидкости; j – безразмерный параметр, характеризующий гидродинамические моменты в щелевом уплотнении: он преобразует коэффициенты радиальной жесткости k_g, k_d, k_p в соответствующие коэффициенты угловой жесткости $k_g j, k_d j, k_p j$. Выражения для вычисления силовых коэффициентов, входящих в формулы (1) – (6), были получены в [1] табл. 8.1.

Радиально-угловые колебания ротора в щелевых уплотнениях. Рассматривается ротор, вращающийся в двух симметрично расположенных щелевых уплотнениях с неподвижными внешними обоймами.

Значения сил и моментов будем удваивать по числу уплотнений. Для удобства дальнейших преобразований будем группировать составляющие по их зависимости от обобщенных координат $\left(F_3^*, M_3^*\right)$, обобщенных скоростей $\left(F_2^*, M_2^*\right)$ и обобщенных ускорений $\left(F_1^*, M_1^*\right)$:

$$-F_{1x}^* = 2k_g \ddot{u}_x, \; -F_{1y}^* = 2k_g \ddot{u}_y; \; -M_{1x}^* = -2k_g j\ddot{\theta}_x, \; -M_{1y}^* = 2k_g j\ddot{\theta}_y;$$

$$-F_{2x}^* = 2\left(k_d + k_g K_i \theta_0\right)\dot{u}_x + k_g \kappa\omega \dot{u}_y - \frac{2}{15} k_g \kappa\omega\theta_0 \dot{\theta}_x + \frac{4}{5} k_d \theta_0 \dot{\theta}_y;$$

$$-F_{2y}^* = -k_g \kappa\omega \dot{u}_x + 2\left(k_d + k_g K_i \theta_0\right)\dot{u}_y - \frac{4}{5} k_d \theta_0 \dot{\theta}_x - \frac{2}{15} k_g \kappa\omega\theta_0 \dot{\theta}_y;$$

$$-M_{2x}^* = j\left(2k_g \kappa\omega\theta_0 \dot{u}_x + 12k_d \theta_0 \dot{u}_y + 2k_d \dot{\theta}_x + k_g \kappa\omega \dot{\theta}_y\right);$$

$$-M_{2y}^* = j\left(-12k_d \theta_0 \dot{u}_x + 2k_g \kappa\omega\theta_0 \dot{u}_y - k_g \kappa\omega \dot{\theta}_x + 2k_d \dot{\theta}_y\right);$$

$$-F_{3x}^* = 2k_p\left(\theta_0 + N\chi_m\right)u_x + k_d \kappa\omega u_y - \frac{2}{5} k_d \kappa\omega\theta_0 \theta_x + 2k_p\left(1 + 2\Delta\chi\right)\theta_y;$$

$$-F_{3y}^* = -k_d \kappa\omega u_x + 2k_p\left(\theta_0 + N\chi_m\right)u_y - 2k_p\left(1 + 2\Delta\chi\right)\theta_x - \frac{2}{5} k_d \kappa\omega\theta_0 \theta_y;$$

$$-M_{3x}^* = j\left(-6k_d \kappa\omega\theta_0 u_x + 10k_p N\Delta\chi u_y - 20k_p \chi_m \theta_x + k_d \kappa\omega \theta_y\right);$$

$$-M_{3y}^* = j\left(-10k_p N\Delta\chi u_x - 6k_d \kappa\omega\theta_0 u_y - k_d \kappa\omega \theta_x - 20k_p \chi_m \theta_y\right).$$

Введем обозначения удвоенных коэффициентов сил

$$a_{31} = 2k_g; \; a_{21} = 2\left(k_d + k_g K_i \theta_0\right); \; a_{41} = k_g \kappa\omega; \; \alpha_2 = \frac{2}{15} k_g \kappa\omega\theta_0; \; \alpha_4 = \frac{4}{5} k_d \theta_0;$$

$$a_{31} = 2k_p\left(\theta_0 + N\chi_m\right); \; a_{51} = k_d \kappa\omega; \; \alpha_3 = \frac{2}{5} k_d \kappa\omega\theta_0; \; \alpha_5 = 2k_p\left(1 + 2\Delta\chi\right).$$

Теперь выражения относительных сил и моментов для двух щелевых уплотнений принимают вид:

$$-F_{1x}^{*} = a_{31}\ddot{u}_x;\ -F_{1y}^{*} = a_{11}\ddot{u}_y;\ -M_{1x}^{*} = a_{11}j\ddot{\theta}_x;\ -M_{1y}^{*} = a_{11}j\ddot{\theta}_y; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} -F_{2x}^{*} &= a_{21}\dot{u}_x + a_{41}\dot{u}_y - \alpha_2\dot{\theta}_x + \alpha_4\dot{\theta}_y; \\ -F_{2y}^{*} &- a_{41}\dot{u}_x + a_{21}\dot{u}_y - \alpha_4\dot{\theta}_x - \alpha_2\dot{\theta}_{\mathrm{y}}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -M_{2x}^{*} &= j\left[15\alpha_2\dot{u}_x + 15\alpha_4\dot{u}_y + 2k_d\dot{\theta}_x + \mathrm{a}_{41}\dot{\theta}_y\right]; \\ -M_{2y}^{*} &= j\left[-15\alpha_4\dot{u}_x + 15\alpha_2\dot{u}_y - \mathrm{a}_{41}\dot{\theta}_x + 2k_d\dot{\theta}_y\right]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -F_{3x}^{*} &= a_{31}u_x + a_{51}u_y - \alpha_3\theta_x + \alpha_5\theta_y; \\ -F_{3y}^{*} &= -a_{51}u_x + a_{31}u_y - \alpha_5\theta_x - \alpha_3\theta_{\mathrm{y}}; \\ -M_{3x}^{*} &= j\left(-15\alpha_3 u_x + 5\alpha_5\frac{N\Delta\chi}{1+2\Delta\chi}u_y - 10a_{31}\frac{\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m}\theta_x + a_{51}\theta_y\right); \\ -M_{3y}^{*} &= j\left(-5\alpha_5\frac{N\Delta\chi}{1+2\Delta\chi}u_x - 15\alpha_3 u_y - a_{51}\theta_x - 10a_{31}\frac{\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m}\theta_y\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для симметричных статически неуравновешенных роторов преобладающими являются радиальные колебания. Незначительные угловые колебания вызываются неизбежной динамической неуравновешенностью и возможными нарушениями симметрии ротора относительно поперечной вертикальной плоскости, проходящей через центр масс. Коэффициенты гидродинамических сил при этом нужно удваивать (по числу уплотнений).

Другой крайний случай преимущественно угловых колебаний возможен для симметричного статически уравновешенного ротора под действием динамической неуравновешенности. В этом случае необходимо удваивать гидродинамические моменты. Кроме того, возникающие при перекосах оси ротора относительно оси уплотнений радиальные гидродинамические силы отличаются по величине из-за отличия эксцентриситетов, радиальных скоростей и ускорений. Поэтому они создают дополнительный момент относительно центра рабочего колеса. Углы перекоса в обоих уплотнениях при одинаково расположенных втулках остаются одинаковыми, следовательно, составляющие сил, обусловленные угловыми колебаниями (с коэффициентами α_i), дополнительных моментов не создают.

Подробно дополнительные моменты от упругих сил рассмотрены в [7]. Для правого и левого уплотнений безразмерные обобщенные координаты, скорости и ускорения центра вала, которые понадобятся для вычисления моментов инерционных, диссипативных и гироскопических сил:

$$u'_x = u_x + \Delta u_x;\ u''_x = u_x - \Delta u_x;\ \Delta u_x = \frac{1}{H} l_c \vartheta_y = 2\frac{l_c}{l}\theta_y;$$

$$u'_y = u_y - \Delta u_y;\ u''_y = u_y + \Delta u_y;\ \Delta u_y = \frac{1}{H} l_c \vartheta_x = 2\frac{l_c}{l}\theta_x;$$

$$\ddot{u}'_x = \ddot{u}_x + \Delta\ddot{u}_x;\ \ddot{u}''_x = \ddot{u}_x - \Delta\ddot{u}_x;\ \Delta\ddot{u}_x = 2\frac{l_c}{l}\ddot{\theta}_y; \qquad (11)$$

$$\ddot{u}'_y = \ddot{u}_y - \Delta\ddot{u}_y;\ \ddot{u}''_y = \ddot{u}_y + \Delta\ddot{u}_y;\ \Delta\ddot{u}_y = 2\frac{l_c}{l}\ddot{\theta}_x.$$

Здесь использовано соотношение $\theta_{x,y} = \vartheta_{x,y} l/2H$. В формулах для ускорений не указаны центростремительные составляющие, так как они направлены по оси ротора и не влияют на его радиально-угловые колебания.

На основании (5) размерные силы в правом F'_3 и левом F''_3 уплотнениях следующие:

$$F'_{3x} = -mH\frac{a_{31}}{2}\left(u_x + \Delta u_x\right) = -F_{3x} - \Delta F_{3x};$$

$$F''_{3x} = -\frac{a_{31}}{2} mH\left(u_x - \Delta u_x\right) = -F_{3x} + \Delta F_{3x};$$

$$F'_{3y} = -mH\frac{a_{31}}{2}\left(u_y - \Delta u_y\right) = -F_{3y} + \Delta F_{3y};$$

$$F''_{3y} = -\frac{a_{31}}{2} mH\left(u_y + \Delta u_y\right) = -F_{3y} - \Delta F_{3y};$$

$$\Delta F_{3x} = a_{31} Hm\frac{l_c}{l}\theta_y, \quad \Delta F_{3y} = a_{31} Hm\frac{l_c}{l}\theta_x.$$

Дополнительные моменты от упругих сил следующие:

$$\Delta M_{3x} = -2l_c\Delta F_{3y} = -2a_{31} Hm\frac{l_c^2}{l}\theta_x;\ \Delta M_{3y} = -2l_c\Delta F_{3x} = -2a_{31} Hm\frac{l_c^2}{l}\theta_y,$$

а после деления на экваториальный момент инерции и умножения на $l/2H$

$$\Delta M^*_{3x} = \frac{\Delta M_{3x} l}{2HI} = -a_{31} j_c \theta_x; \quad j_c = \frac{ml_c^2}{I};$$

$$\Delta M^*_{3y} = \frac{\Delta M_{3y} l}{2HI} = -a_{31} j_c \theta_y.$$

Подобным образом вычисляются дополнительные моменты других составляющих радиальной силы, обусловленные различием обобщен-

ных координат, скоростей и ускорений (11) центров вала в правом и левом уплотнениях:

$$\Delta M_{1x}^{*} = -a_{11} j_c \ddot{\theta}_x, \ \Delta M_{1y}^{*} = -a_{11} j_c \ddot{\theta}_y;$$

$$\Delta M_{2x}^{*} = -a_{21} j_c \dot{\theta}_x, \ \Delta M_{2y}^{*} = -a_{21} j_c \dot{\theta}_y;$$

$$\Delta M_{4x}^{*} = -a_{41} j_c \dot{\theta}_y, \ \Delta M_{4y}^{*} = a_{41} j_c \dot{\theta}_x;$$

$$\Delta M_{5x}^{*} = -a_{51} j_c \theta_y, \ \Delta M_{5y}^{*} = a_{51} j_c \theta_x.$$

Приведенные добавки зависят от угловых координат, поэтому их нужно вводить в составляющие момента, определяемые углами поворота диска, угловыми скоростями и ускорениями. Обозначив суммарные составляющие гидродинамического момента в двух уплотнениях

$$M_{i(x,y)} = M_{i(x,y)}^{*} + \Delta M_{i(x,y)}^{*}, \quad i = 1,\ 2,\ 3,$$

с учетом (7) – (10) получим:

$$-M_{1x} = a_{11}\left(j + j_c\right)\ddot{\theta}_x, \ -M_{1y} = a_{11}\left(j + j_c\right)\ddot{\theta}_y;$$

$$-M_{2x} = 15 j\left(\alpha_2 \dot{u}_x + \alpha_4 \dot{u}_y\right) + \left(2k_d j + a_{21} j_c\right)\dot{\theta}_x + a_{41}\left(j + j_c\right)\dot{\theta}_y;$$

$$-M_{2y} = 15 j\left(-\alpha_4 \dot{u}_x + \alpha_2 \dot{u}_y\right) - a_{41}\left(j + j_c\right)\dot{\theta}_x + \left(2k_d j + a_{21} j_c\right)\dot{\theta}_y;$$

$$-M_{3x} = j\left(-15\alpha_3 u_x + 5\alpha_5 \frac{N\Delta\chi}{1 + 2\Delta\chi} u_y\right) -$$

$$-a_{31}\left(\frac{10\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m} j - j_c\right)\theta_x + a_{51}\left(j + j_c\right)\theta_y;$$

$$-M_{3y} = j\left(-5\alpha_5 \frac{N\Delta\chi}{1 + 2\Delta\chi} u_x - 15\alpha_3 u_y\right) -$$

$$-a_{51}\left(j + j_c\right)\theta_x - a_{31}\left(\frac{10\chi_m}{\theta_0 + N\chi_m} j - j_c\right)\theta_y.$$

Следует иметь в виду, что дополнительные моменты найдены для симметрично расположенных относительно центра масс колеса уплотнений. При нарушении такой симметрии несколько изменятся значения $\Delta u_{x,y}$ (11), что приведет к изменению численного коэффициента в выражении параметра j_c.

Рассматриваемый ротор в щелевых уплотнениях является колебательной системой восьмого порядка с четырьмя обобщенными координатами: $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$. Система колеблется относительно устойчивого

положения равновесия, поэтому корни характеристического уравнения – четыре пары комплексно сопряженных чисел. На переднем щелевом уплотнении центробежной ступени дросселируется давление, развиваемое ступенью. Это давление пропорционально квадрату частоты вращения рабочего колеса. Именно такие условия характерны для центробежных машин. Это отражается на форме частотных характеристик – зависимостей собственных частот от частоты вращения ротора. В этом случае перепад давления перестает быть независимым внешним воздействием, он связан дополнительным соотношением $\Delta p_0 = \mathrm{B}\omega^2$. В результате, внешним воздействием является только частота вращения, а эффект самоужесточения ротора усиливается.

Вынужденные совместные радиально-угловые колебания ротора при постоянном перепаде давления на уплотнениях описываются уравнениями [10]

$$a_1\ddot{u} + a_2\dot{u} + a_3 u \mp i\left(a_4'\dot{u} + a_5' u\right)\omega - \left(\alpha_2'\dot{\theta} + \alpha_3'\theta\right)\omega \mp$$
$$\mp i\left(\alpha_4\dot{\theta} + \alpha_5\theta - \alpha_0\theta\right) = \omega^2 a^* = \omega^2\left|a^*\right| e^{\pm i\omega t};$$
$$b_1\ddot{\theta} + b_2\dot{\theta} + b_3\theta \mp i\left(b_4'\dot{\theta} + b_5'\theta\right)\omega + \left(\beta_2'\dot{u} - \beta_3' u\right)\omega \mp$$
$$\mp i\left(\beta_4\dot{u} + \beta_5 u + \beta_0 u\right) = \left(1\text{-j}_0\right)\omega^2\gamma^* = \left(1\text{-j}_0\right)\omega^2\left|\gamma^*\right| e^{\pm i\omega t}.$$

Пользуясь стандартными программами, можно сразу находить численное решение этих уравнений. После перехода к безразмерным частотам $\overline{\omega} = \omega/\Omega_{u0}$ и ввода ряда обозначений, уравнения принимают вид

$$\left(U_{11} + iV_{11}\right)\tilde{u} + \left(U_{12} + iV_{12}\right)\tilde{\theta} = \mathrm{A}\overline{\omega}^2;$$
$$\left(U_{21} + iV_{21}\right)\tilde{u} + \left(U_{22} + iV_{22}\right)\tilde{\theta} = \Gamma\overline{\omega}^2.$$

Здесь $U_{11} + iV_{11}, U_{22} + iV_{22}$ – собственные операторы независимых радиальных и угловых колебаний соответственно. Перекрестные операторы $U_{12} + iV_{12}, U_{21} + iV_{21}$ характеризуют влияние угловых колебаний на радиальные и наоборот, т.е. взаимосвязанность этих колебаний.

Из системы неоднородных алгебраических уравнений после ряда преобразований получим амплитуды и фазы, выраженные через внешние возмущения:

$$u_a = \overline{\omega}^2\sqrt{\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)^2 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}};$$

$$\theta_a = \overline{\omega}^2\sqrt{\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)^2 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}};$$

$$\varphi_u = -arctg\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)V_0 - \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)U_0}{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)U_0 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)V_0};$$

$$\varphi_\vartheta = -arctg\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)V_0 - \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)U_0}{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)U_0 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)V_0}.$$

Пользуясь полученными формулами, можно построить амплитудные частотные характеристики как отношения амплитуд соответствующих колебаний к амплитудам внешних возбуждений.

Отличия закономерностей колебаний ротора в щелевых уплотнениях от его колебаний в воздухе обусловлены действием гидродинамических сил, возникающих в щелевых уплотнениях. Сила инерции и сила вязкого сопротивления уменьшают, а гироскопическая сила и сила гидростатической жесткости увеличивают модули собственных частот.

Увеличение собственных частот пропорционально корню квадратному из дросселируемого на уплотнениях перепада давления и зависит от конусности кольцевого дросселирующего зазора. Для типовых конструкций центробежных насосов собственные частоты роторов в уплотнениях с конфузорным $\left(\theta_0 = 0{,}3\right)$ каналом в 2 – 4 раза больше, чем в диффузорных $\left(\theta_0 = -0{,}3\right)$ уплотнениях. Перепад давления 1,5 МПа на конфузорных уплотнениях обеспечивает почти трехкратное увеличение собственной частоты ротора. Этим подтверждается возможность и эффективность одновременного использования щелевых уплотнений в качестве гидростатических опор, а значит, перспективность конструкций насосов без выносных масляных подшипников.

Циркуляционная сила, зависящая от частоты вращения, не влияет на величину собственных частот, но уменьшает модуль удельного коэффициента демпфирования и является основным дестабилизирующим фактором, приводит к потере устойчивости свободных колебаний. Циркуляционная сила пропорциональна коэффициенту закрутки потока в кольцевом канале, поэтому подавление закрутки расширяет область устойчивости ротора.

Гидродинамическая диссипативная сила зависит от конусности канала и в диффузорном канале может менять знак, превращаясь в силу отрицательного сопротивления, т.е. является еще одним дестабилизирующим фактором. В отличие от циркуляционной силы, обусловленной собственным вращением ротора, диссипативная сила не зависит от частоты вращения и может становиться отрицательной в отсутствие вращения. Таким образом, в уплотнениях с диффузорными каналами даже невращающийся ротор может выходить за границу колебательной устойчивости.

Выводы. На основании исследования гидромеханической модели ротор – щелевые уплотнения получены аналитические зависимости, описывающие радиально - угловые колебания ротора.

Силовые коэффициенты щелевых уплотнений определяются геометрическими (зазор, радиус, длина, конусность, форма входных кро-

мок) и эксплуатационными (перепад давления, диапазон рабочих частот вращения, физические свойства перекачиваемой среды) параметрами. Целенаправленным выбором этих параметров можно влиять на вибрационное состояние ротора и машины в целом.

Важной особенностью центробежных машин является то, что дросселируемые на щелевых уплотнениях перепады давления пропорциональны частоте вращения ротора. Этим обусловлен эффект самоужесточения ротора, приводящий к тому, что в большинстве случаев критические частоты отсутствуют. Самоужесточение усиливается гироскопическими моментами щелевых уплотнений, а для роторов дисковой конструкции – гироскопическим моментом диска.

Это особенно важно для машин с высокими параметрами. Например, в космической технике, где высокие частоты вращения вала и уплотняемое давление необходимо обеспечивать в сочетании с требованием минимизировать массу и габариты агрегата. То есть изначально «гибкий» в динамическом смысле ротор в сочетании с правильно спроектированными уплотнениями становится «жестким».

Для решения задач о совместных радиально-угловых колебаниях ротора с учетом всех гидродинамических сил и моментов, возникающих в щелевых уплотнениях, перспективным является использование численных методов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Марцинковский В.А.***, *Шевченко С.С.* Насосы атомных электростанций: расчет, конструирование, эксплуатация: монография / под общ. ред. С.С. Шевченко. Сумы: ЧФ «Изд-во «Университетская книга», 2018. 472 с.

2. ***Bai C.***, *Zhang, H., Xu, Q.* Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 50. P. 1–10.

3. ***Djaidir B.***, *Hafaifa A., Kouzou A.:* Faults detection in gas turbine rotor using vibration analysis under varying conditions // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 55(2). P. 393–406. doi: 10.15632/jtam-pl.55.2.393.

4. ***Ishida Y.***, *Yamamoto T.* Linear and nonlinear rotordynamnics. A modern treatment with applications. Verlag, Willey-VCH. 2012.

5. ***in C.***, *Xu Y., Zhou J.,* et al. Active magnetic bearings stiffness and damping identification from frequency characteristics of control systems. Cairo, Hindawi Publishing Corporation. 2016.

6. ***Korczak A.***, *Marcinkowski W., Peczkis G.* Wpływ szczelin uszczelniających na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej. Politechnika śląska. Prace naukowe, 2007.Z.18. P. 161-170.

7. ***Kundera Cz,*** *Marcinkowski W.* The effect of the annular seal parameters on the dynamics of the rotor system. - Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2010, Vol.15. No 3. P. 719-730.

8. ***Pavlenk I. V.,*** *Simonovskiy V. I., Demianenko M. M.* Dynamic analysis of centrifugal machines rotors supported on ball bearings by combined application of 3D and beam finite element models // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012053 2017, doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012053

9. ***Pavlenko I.***, *Simonovskiy V., Pitel' J., Demianenko M.* Dynamic analysis of centrifugal machines rotors with com-bined using 3D and 2D finite element models. Lüdenscheid, RAM-VERLAG. 2018.

10. ***Pavlenko I.,*** *Trojanowska J., Ivanov V., Liaposhchenko O.* Scientific and methodological approach for the identification of mathematical models of mechanical systems by using artificial neural networks. // 3-rd Conference on Innovation, Engineering and Entrepreneurship, Regional HELIX 2018, Lecture Notes in Electrical Engineering 505, P. 299–306 (2019), doi: 10.1007/978-3-319-91334-6_41.

11. ***Yashchenko A. S.***, *Rudenko A. A., Simonovskiy V. I., Kozlov O. M.* Effect of bearing housings on centrifugal pump rotor dynamics // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012054 (2017), doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012054.

12. ***Zhang K.***, *Yang Z.* Identification of load categories in rotor system based on vibration analysis. Sensors 17(7), 1676 (2017), doi: 10.3390/s17071676.

УДК 621.01:62-251:62-762

С.С. Шевченко, канд. техн. наук

МОДЕЛЬ І РОЗРАХУНОК ГІДРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ РОТОР – ЩІЛИННІ УЩІЛЬНЕННЯ

Побудовано модель гідромеханічної системи ротор - щілинні ущільнення, моделі однодискових роторів, розрахункова схема щілинного ущільнення з рухомою втулкою. Отримано аналітичні залежності для розрахунку динамічних характеристик гидромеханічної системи, що описують радіально - кутові коливання ротора відцентрової машини в щілинних ущільненнях. Отримані вирази для побудови амплітудних і фазових частотних характеристик.

Ключові слова: *математична модель; гідромеханічна система; радіально – кутові коливання; частотні характеристики.*

У відцентрових машинах енергію об'ємних втрат через щілинні ущільнення можна перетворити в корисну енергію, якщо їх використовувати одночасно як гідростатичні опори, здатні створювати не тільки велику радіальну жорсткість, а й ефективно демпфіювати коливання ротора. Модель динамічної системи ротор – щілинні ущільнення показана на рис. 1.

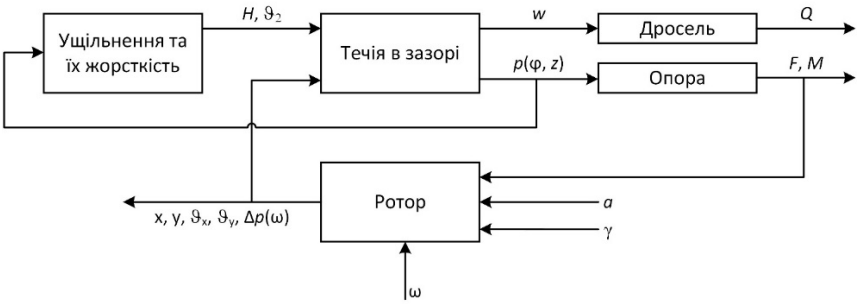

Рис. 1 – **Модель динамічної системи ротор – щілинні ущільнення**

Розглянутий ротор в щілинних ущільненнях є коливальною системою восьмого порядку з чотирма узагальненими координатами: $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$

Вимушені спільні радіально-кутові коливання ротора при постійному перепаді тиску на ущільненнях описуються рівняннями:

$$a_1\ddot{u} + a_2\dot{u} + a_3 u \mp i\left(a_4'\dot{u} + a_5' u\right)\omega - \left(\alpha_2'\dot{\theta} + \alpha_3'\theta\right)\omega \mp$$

$$\mp i\left(\alpha_4\dot{\theta} + \alpha_5\theta - \alpha_0\theta\right) = \omega^2 a^* = \omega^2\left|a^*\right| e^{\pm i\omega t};$$

$$b_1\ddot{\theta} + b_2\dot{\theta} + b_3\theta \mp i\left(b_4'\dot{\theta} + b_5'\theta\right)\omega + \left(\beta_2'\dot{u} - \beta_3' u\right)\omega \mp$$

$$\mp i\left(\beta_4\dot{u} + \beta_5 u + \beta_0 u\right) = \left(1\text{-j}_0\right)\omega^2\gamma^* = \left(1\text{-j}_0\right)\omega^2\left|\gamma^*\right| e^{\pm i\omega t}.$$

Користуючись стандартними програмами, можна відразу знаходити числові розв’язки цих рівнянь. Після переходу до безрозмірних частот $\overline{\omega} = \omega/\Omega_{u0}$ і введення ряду позначень, рівняння приймають вигляд:

$$\left(U_{11} + iV_{11}\right)\tilde{u} + \left(U_{12} + iV_{12}\right)\tilde{\theta} = \mathrm{A}\overline{\omega}^2;$$

$$\left(U_{21} + iV_{21}\right)\tilde{u} + \left(U_{22} + iV_{22}\right)\tilde{\theta} = \Gamma\overline{\omega}^2.$$

Тут $U_{11} + iV_{11}, U_{22} + iV_{22}$ – власні оператори незалежних радіальних і кутових коливань відповідно.

Перехресні оператори $U_{12} + iV_{12}, U_{21} + iV_{21}$ характеризують вплив кутових коливань на радіальні і радіальних на кутові, тобто взаємопов'язаність цих коливань. Із системи неоднорідних рівнянь після низки перетворень отримаємо амплітуди і фази, виражені через зовнішні збудження:

$$u_a = \overline{\omega}^2\sqrt{\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)^2 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}};$$

$$\theta_a = \overline{\omega}^2\sqrt{\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)^2 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}};$$

$$\varphi_u = -arctg\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)V_0 - \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)U_0}{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)U_0 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)V_0};$$

$$\varphi_\vartheta = -arctg\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)V_0 - \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)U_0}{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)U_0 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)V_0}.$$

Користуючись отриманими формулами, можна побудувати амплітудні частотні характеристики як відношення амплітуд відповідних коливань до амплітуд зовнішніх збуджень. Відмінності закономірностей коливань ротора в щілинних ущільненнях від його коливань в повітрі обумовлені дією гідродинамічних сил, що виникають в щілинних ущільненнях. Силові коефіцієнти щілинних ущільнень визначаються геометричними (зазор, радіус, довжина, конусність, форма вхідних кромок) і експлуатаційними (перепад тиску, діапазон робочих частот обертання, фізичні властивості середовища, що перекачується) параметрами. Цілеспрямованим вибором цих параметрів можна впливати на вібраційний стан ротора і машини в цілому.

UDC 621.01:62-251:62-762

S.S. Shevchenko, PhD (Tech.)

MODEL AND CALCULATION OF THE HYDROMECHANICAL SYSTEM ROTOR – GROOVE SEALS

A model of a hydromechanical system rotor – groove seals, models of single-disk rotors and a design diagram of groove seal with a movable sleeve have been built. Analytical relationships are obtained for computing the dynamic characteristics of the hydromechanical system, describing the radial - angular vibrations of the centrifugal machine rotor in groove seals. Expressions for computing amplitude and phase frequency characteristics are obtained.

Keywords: *mathematical model; hydromechanical system; radial - angular vibrations; frequency characteristics.*

In centrifugal machines, the energy of leakages through groove seals can be converted into useful energy if they are used simultaneously as hydrostatic bearings capable of not only having high radial stiffness, but also effectively damping rotor vibrations. A simplified block diagram of the rotor – groove seals system is shown in the Fig. 1.

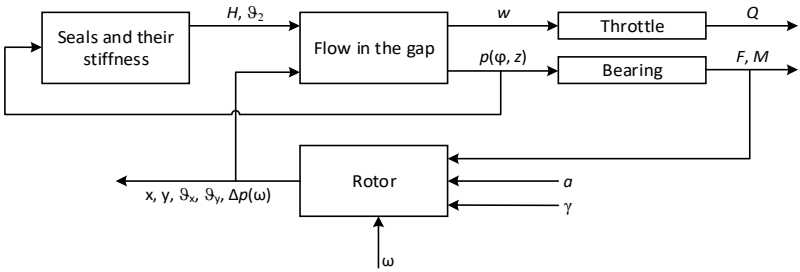

Fig.1 – **Model of hydromechanical system rotor – groove seals**

The considered rotor in groove seals is an oscillatory system of the eighth order with four generalized coordinates $u_x, u_y, \theta_x, \theta_y$. Forced joint

radial-angular oscillations of the rotor at a constant pressure drop across the seals are described by the equations:

$$a_1\ddot{u} + a_2\dot{u} + a_3 u \mp i\left(a'_4\dot{u} + a'_5 u\right)\omega - \left(\alpha'_2\dot{\theta} + \alpha'_3\theta\right)\omega \mp$$

$$\mp i\left(\alpha_4\dot{\theta} + \alpha_5\theta - \alpha_0\theta\right) = \omega^2 a^* = \omega^2\left|a^*\right|e^{\pm i\omega t};$$

$$b_1\ddot{\theta} + b_2\dot{\theta} + b_3\theta \mp i\left(b'_4\dot{\theta} + b'_5\theta\right)\omega + \left(\beta'_2\dot{u} - \beta'_3 u\right)\omega \mp$$

$$\mp i\left(\beta_4\dot{u} + \beta_5 u + \beta_0 u\right) = \left(1\text{-j}_0\right)\omega^2\gamma^* = \left(1\text{-j}_0\right)\omega^2\left|\gamma^*\right|e^{\pm i\omega t}.$$

Using standard programs, we can immediately find a numerical solution to these equations. After switching to dimensionless frequencies $\overline{\omega} = \omega/\Omega_{u0}$ and introducing a number of designations, the equations take the form:

$$\left(U_{11} + iV_{11}\right)\tilde{u} + \left(U_{12} + iV_{12}\right)\tilde{\theta} = \mathrm{A}\overline{\omega}^2;$$

$$\left(U_{21} + iV_{21}\right)\tilde{u} + \left(U_{22} + iV_{22}\right)\tilde{\theta} = \Gamma\overline{\omega}^2.$$

Here $U_{11} + iV_{11}, U_{22} + iV_{22}$ are the eigenoperators of independent radial and angular vibrations, respectively. Cross operators $U_{12} + iV_{12}, U_{21} + iV_{21}$ characterize the effect of angular vibrations on radial ones and radial vibrations on angular ones respectively, i.e. the interconnectedness of these fluctuations. From the system of inhomogeneous algebraic equations, after a series of transformations, we obtain the amplitudes and phases expressed through external perturbations:

$$u_a = \overline{\omega}^2\sqrt{\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)^2 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}};$$

$$\theta_a = \overline{\omega}^2\sqrt{\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)^2 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)^2}{U_0^2 + V_0^2}};$$

$$\phi_u = -arctg\frac{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)V_0 - \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)U_0}{\left(\mathrm{A}U_{22} - \Gamma U_{12}\right)U_0 + \left(\mathrm{A}V_{22} - \Gamma V_{12}\right)V_0};$$

$$\varphi_\vartheta = -arctg\frac{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)V_0 - \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)U_0}{\left(\Gamma U_{11} - \mathrm{A}U_{21}\right)U_0 + \left(\Gamma V_{11} - \mathrm{A}V_{21}\right)V_0}.$$

Using the obtained formulas, it is possible to construct the amplitude frequency characteristics as the ratio of the amplitudes of the corresponding

oscillations to the amplitudes of external excitations. Differences in the patterns of rotor oscillations in groove seals from its oscillations in air are due to the action of hydrodynamic forces arising in groove seals. Force coefficients of groove seals are determined by geometric (clearance, radius, length, taper, shape of the input edges) and operational (pressure drop, operating speed range, physical properties of the pumped medium) parameters. A purposeful choice of these parameters can influence the vibration state of the rotor and the machine as a whole.

REFERENCES

1. ***Martsinkovsky V. A.,*** *Shevchenko S. S.* Pumps of nuclear power plants: calculation, design, operation: / за ред. S. S. Shevchenko. Sumy: Private Fund «University Book Publishing House», 2018. 472с. (in Rassian).

2. ***Bai C.***, *Zhang, H., Xu, Q.* Subharmonic resonance of a symmetric ball bearing-rotor system // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 50. P. 1–10.

3. ***Djaidir B.***, *Hafaifa, A., Kouzou, A.:* Faults detection in gas turbine rotor using vibration analysis under varying conditions // Journal of Theoretical and Applied Mechanics 2017. Vol. 55(2). P. 393–406. doi: 10.15632/jtam-pl.55.2.393.

4. ***Ishida Y.***, *Yamamoto T.* Linear and nonlinear rotordynamnics. A modern treatment with applications. Verlag, Willey-VCH. 2012.

5. ***Jin C.***, *Xu Y., Zhou J.*, et al. (). Active magnetic bearings stiffness and damping identification from frequency characteristics of control systems. Cairo, Hindawi Publishing Corporation, 2016.

6. ***Korczak A.***, *Marcinkowski W., Peczkis G.* Wpływ szczelin uszczelniających na dynamikę zespołu wirującego pompy odśrodkowej. Politechnika śląska. Prace naukowe, 2007, Z.18. P. 161–170. (in Poland).

7. ***Kundera Cz,*** *Marcinkowski W.* The effect of the annular seal parameters on the dynamics of the rotor system. - Int. Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2010, Vol.15. No 3 P. 719–730.

8. ***Pavlenko I. V.,*** *Simonovskiy V. I., Demianenko M. M.:* Dynamic analysis of centrifugal machines rotors supported on ball bearings by combined application of 3D and beam finite element models. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012053 (2017), doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012053

9. ***Pavlenko I.***, *Simonovskiy V., Pitel J.,* Demianenko M.. Dynamic analysis of centrifugal machines rotors with com-bined using 3D and 2D finite element models. Lüdenscheid, RAM-VERLAG. 2018.

10. ***Pavlenko I.,*** *Trojanowska J., Ivanov V., Liaposhchenko O.* Scientific and methodological approach for the identification of mathematical models of mechanical systems by using artificial neural networks // 3rd Conference on Innovation, Engineering and Entrepreneurship, Regional HELIX 2018, Lecture Notes in Electrical Engineering 505, 299–306 (2019), doi: 10.1007/978-3-319-91334-6_41.

11. ***Yashchenko A.S.***, *Rudenko A.A., Simonovskiy V.I., Kozlov O.M.* Effect of bearing housings on centrifugal pump rotor dynamics. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 233(1), 012054 (2017), doi: 10.1088/1757-899X/233/1/012054.

12. ***Zhang K.***, *Yang Z.* Identification of load categories in rotor system based on vibration analysis. Sensors 17(7), 1676 (2017), doi: 10.3390/s17071676.

Институт проблем моделирования в энергетике
им. Г. Е. Пухова НАН Украины,
Киев, Украина.

Надійшла до редколегії 23.10.2020