DOI 10.15421/4221003
УДК 539.3

Е. Л. Гарт, д-р фіз.-мат. наук, Я. В. Рибалко

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ РОЗТАШУВАННЯ І МЕХАНІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЕЛІПТИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА ПРОЦЕС ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Досліджено напружено-деформований стан пружного неоднорідного середовища, яке змодельовано прямокутною пружною пластиною з круговим отвором і розташованими навколо нього декількома еліптичними включеннями. На основі скінченноелементного аналізу вивчено вплив способу розташування і механічних властивостей включень на концентрацію напружень в пластині. Дані рекомендації щодо зменшення концентрації напружень навколо отвору.

Ключові слова: пружна пластина; еліптичні включення; круговий отвір; напружено-деформований стан; коефіцієнт концентрації напружень; метод скінченних елементів; механічний ефект.

Вступ. Пластинчато-оболонкові конструкції знайшли широке застосування у багатьох галузях техніки – ракетно-космічній, авіації, судно- та машинобудуванні, будівництві, нафтовій промисловості та ін. Порушення суцільності конструкції на макро- і мікрорівні (отвори, виточки, пори, тріщини, наявність у матеріалі різноманітних включень тощо) є чинниками, що зумовлюють неоднорідність структури та мають суттєвий вплив на концентрацію напружень, процеси деформування і руйнування твердих тіл [1, 7, 8, 12, 18]. Подібні ефекти спричиняють накладки, підкріплення, що змінюють жорсткість системи.

Проблема визначення концентрації напружень біля отворів у пластинчато-оболонкових елементах конструкцій і способи її зниження становить надзвичайно важливий клас інженерних задач [3–6, 9, 13–17].

У даній роботі, як продовженні [5], проведено скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану (НДС) прямокутної пластини з одним круговим отвором і симетрично розташованими навколо нього під певним кутом відносно координатних осей еліптичними включеннями з іншого матеріалу. Досліджено вплив механічних властивостей включень, їх кількості, способу розташування та відстані між отвором та включеннями на концентрацію напружень навколо отвору.

Постановка задачі. Розглядається НДС плоского пружного неоднорідного середовища, що моделюється однорідною ізотропною прямокутною пластиною розмірами $l_1 \times l_2$ з центральним круговим отвором радіусу r . Навколо отвору симетрично розташовано декілька (два

або чотири) однакових еліптичних включення (a, b – більша і менша піввісі еліпсу відповідно) на відстані l між їх центрами під кутом 30° відносно осі абсцис (рис. 1).

Пластина знаходиться під дією одновісного рівномірного розтягувального навантаження ($p = \text{const}$), що не призводить до появи пластичних деформацій.

Досліджується вплив способу розташування і механічних властивостей включень на розподіл напружень в пластині навколо отвору.

Рис. 1 – Схема навантаження пластини з круговим отвором і еліптичними включеннями, розташованими під кутом 30° відносно осі Ox : а) два включення; б) чотири включення

Математична модель задачі. Задача про визначення НДС пружної ізотропної неоднорідної пластини у варіаційній постановці зводиться до знаходження мінімуму функціонала [2]:

$$\begin{aligned}
 I[u, v] = & \int_{\Omega_1} \left\{ 2\mu_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \\
 & + \sum_{i=2}^{n+1} \int_{\Omega_i} \left\{ 2\mu_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy - \int_{\gamma} (P_x u + P_y v) d\gamma,
 \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(x, y), v(x, y)$ – проекції вектора переміщень на осі Ox і Oy відповідно; λ_1, μ_1 – константи Ляме матеріалу пластини Ω_1 (матриці); λ_i, μ_i – константи Ляме матеріалу $(i - 1)$ -го включення Ω_i ($i = 2, n + 1$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n+1} \Omega_i$ – область визначення змінних x та y ; γ – границя області Ω , вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності $P(x, y) = (P_x(x, y), P_y(x, y))^T$.

Метод розв'язування. Постановлену задачу розв'язано за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ) [10, 11, 19]. Застосування цього методу для континуальної системи пов'язано з представленням її суку-

пністю певної кількості окремих частин скінченних розмірів (скінченних елементів), що мають ті ж фізико-механічні характеристики, що й вихідна конструкція. Далі точно або наближено вивчають НДС кожного скінченного елемента методами, відомими в будівельній механіці і теорії пружності: сил, переміщень або змішаним, з метою визначення в залежності від прийнятого методу аналізу переміщень, або зусиль, або і того і іншого в точках з'єднання скінченних елементів між собою (вузлах). Ці фактори приймають в якості основних невідомих МСЕ. Для знаходження невідомих складають і розв'язують систему алгебричних рівнянь, як правило, дуже високого порядку.

Для побудови скінченноелементної моделі вихідної задачі застосовано варіаційний принцип Лагранжа, при цьому використовувались трикутні шестивузлові лагранжеві скінченні елементи другого степеня. Навколо отвору, а також на межі включення і пластини застосовано адаптивну сітку з коефіцієнтом подрібнення 10 для збільшення цим самим точності апроксимації геометричних характеристик і функцій переміщень в межах скінченного елемента.

Рис. 2 – Скінченноелементна сітка:

а) фрагмент адаптивної сітки навколо отвору; б) вид скінченного елемента

Числовий аналіз. Розрахунки проведені на ПК Asus FX504 Notebook PC, GeForce GTX 1050 з тактовою частотою 2,4 GHz, оперативною пам'яттю 16 GB, розрядність системи – x64. Кількість скінченних елементів – 7234, кількість вузлів – 14343. Час розрахунків у середньому – 0,2 хв.

Дослідження здійснені для пластини розмірами 0,6 м × 0,8 м, з отвором радіусу $r = 0,02$ м, еліптичними включеннями з півосями $a = 0,04$ м, $b = 0,02$ м. Матеріали для пластини і включень: алюміній ($E_1=70$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_{0,2}=415$ МПа, $\sigma_B=470$ МПа), сталь ($E_2=210$ ГПа, $\nu = 0,33$, $\sigma_{0,2}=620$ МПа, $\sigma_B=720$ МПа). Навантаження розтягування $P(x, y) = (P_{xx}, y, P_{yx}, y)T$: $P_{xx}, y = p = 50$ МПа; $P_{yx}, y = 0$. Обрання матеріалів носить умовний характер. При проведенні комп'ютерного моделювання вважалось, що включення розташовані у площині пластини та між матрицею і включеннями задані умови жорсткого зчеплення.

Для числового аналізу введено коефіцієнт відносної жорсткості включення за формулою $k = E_{вкл} / E_{пл}$, де $E_{вкл}$ – модуль пружності включення

ня; E_{nl} – модуль пружності пластини (матриці). Розглянуто випадки, коли $k > 1$ («жорстке» включення) і $k < 1$ («м'яке» включення).

Аналіз впливу механічних характеристик, способу розташування включень відносно отвору і відстані між отвором і включеннями для випадку двох і чотирьох еліптичних включень проведено на основі побудованих графіків розподілу величини відносної інтенсивності напружень σ_i/p по розгортці отвору пластини (рис. 3, рис. 4).

На рис. 3 наведено розподіл σ_i/p вздовж розгортки отвору для випадку розташування двох еліптичних включень під кутом 30° відносно осі абсцис (рис. 1, а) для різних значень відстані l ($l=8r$; $5r$; $3r$; $2,5r$) при $k > 1$ (рис. 3, а) і $k < 1$ (рис. 3, б).

Рис. 3 – Розподіл σ_i/p по розгортці отвору пластини з двома включеннями для випадку рис. 1, а: а) $k > 1$; б) $k < 1$

Зі зближенням «жорстких» включень з отвором значення σ_i/p в місцях локальної концентрації зменшується на $\sim 13\%$ (рис. 3, а), а для «м'яких» включень, навпаки, збільшується на $\sim 25\%$ (рис. 3, б). При цьому відбувається зміна локації зон концентрації напружень: зміщення в

напрямку за годинниковою стрілкою у випадку «жорстких» включень, і у протилежному напрямку у разі «м'яких» включень. Тобто розташування включень під кутом 30° до осі Ox впливає на перерозподіл напружень в околі отвору в залежності від відстані між отвором і включеннями таким чином, що має місце своєрідний зсув зони максимальних напружень навколо локального концентратора: величина зсуву зростає при наближенні включень до отвору у порівнянні з випадком для пластини без включень. При цьому напрямок зсуву залежить від механічних характеристик включень.

На рис. 4, а і рис. 4, б наведено розподіл σ_i/p по розгортці отвору пластини для випадку розташування чотирьох еліптичних включень під кутом 30° до осі Ox (рис. 1, б) для різних значень відстані l ($l=8r, 5r, 3r, 2.5r$) при $k>1$ і $k<1$ відповідно.

Рис. 4 – Розподіл σ_i/p по розгортці отвору пластини з чотирма включеннями для випадку рис. 1, б: а) $k>1$; б) $k<1$

З рис. 4, а видно, що зі зближенням з отвором «жорстких» включень, розташованих під кутом 30° до координатної осі Ox , відносна інтенсивність напружень в місцях локальної концентрації зменшується на $\sim 34\%$.

У разі «м'яких» включень (рис. 3, б) коефіцієнт концентрації напружень (ККН), навпаки, збільшується на ~35%. При цьому механічний ефект, який спостерігався у випадку двох включень – відсутній. Тобто при симетричному розташуванні чотирьох однакових включень зсув зони максимальних напружень навколо локальних концентраторів не відбувається.

Порівнюючи отримані результати з [5], маємо, що за наявності двох включень, розташованих під кутом 30° , спостерігається такий самий механічний ефект зсуву зони максимальних напружень навколо отвору, як і у випадку розташування включень під кутом 45° , при цьому ККН тут можна зменшити на ~13% проти ~8%. Вказане розташування включень з певними механічними властивостями дає змогу керувати зсувом зони найбільшої концентрації напружень навколо отвору у заданому напрямку.

У разі чотирьох включень, як і в [5], ефект зсуву зони максимальних напружень не спостерігається, але при цьому ці способи розташування включень залишаються найкращими із розглянутих варіантів з точки зору найбільшого зменшення ККН. У розглянутому тут випадку розташування чотирьох «жорстких» включень ККН вдається зменшити на ~34% проти ~19% і ~26% [5] у порівнянні з пластиною без включень.

У табл. 1 наведено значення ККН для двох випадків розташування еліптичних включень (рис. 1) для різних варіантів відстані ($l=8r$; $5r$; $3r$; $2,5r$) між отвором та «жорстким» ($k>1$) або «м'яким» ($k<1$) включеннями.

Таблиця 1 – Коефіцієнт концентрації напружень

Задача Відстань l	Два включення під кутом 30° відносно осі Ox		Чотири включення під кутом 30° відносно осі Ox	
	$k>1$	$k<1$	$k>1$	$k<1$
$8r$	2,90	3,17	2,81	3,26
$5r$	2,81	3,32	2,57	3,53
$3r$	2,63	3,63	2,10	3,97
$2,5r$	2,61	3,77	1,98	4,04

У табл. 2 подано зміни ККН у відсотковому відношенні для розглянутих випадків у порівнянні з результатами для пластини з круговим отвором без включень, для якої ККН=3.

Таблиця 2 – Відхилення ККН $\delta(\%)$ для випадків, зображених на рис. 1 від значення ККН для пластини з отвором без включень

Задача Відстань l	Два включення під кутом 30° відносно осі Ox		Чотири включення під кутом 30° відносно осі Ox	
	$k>1$	$k<1$	$k>1$	$k>1$
$8r$	-3,33	+5,67	-6,33	+8,67
$5r$	-6,33	+10,67	-14,33	+17,67
$3r$	-12,33	+21,00	-30,00	+32,33
$2,5r$	-13,00	+25,67	-34,00	+34,67

Таким чином, встановлено:

1. У разі симетричного розташування двох еліптичних включень під кутом 30° відносно координатної осі Ox (рис. 1, а): при $k > 1$ зі зменшенням відстані l між включеннями та отвором спостерігається зменшення ККН, при цьому у разі найменшій із розглянутих відстаней цей показник зменшився на $\sim 13\%$; при $k < 1$, навпаки, величина ККН збільшується, у разі найменшій із розглянутих відстаней ККН зріс на $\sim 26\%$. Тут має місце механічний ефект. Спостерігається зсув зони максимальних напружень навколо отвору: у випадку «жорстких» включень – за годинниковою стрілкою (в напрямку від лінії розташування включень), у разі «м'яких» включень – у протилежному напрямку.

2. У разі симетричного розташування чотирьох еліптичних включень під кутом 30° відносно осі Ox (рис. 1, б): при $k > 1$ зі зменшенням відстані l відбувається зменшення величини ККН, при найменшій із розглянутих відстаней l значення ККН зменшилось на $\sim 34\%$; при $k < 1$ спостерігається збільшення ККН, у разі найменшій із розглянутих відстаней значення ККН збільшилось на $\sim 35\%$. При цьому зсуву зони максимальних напружень навколо отвору не відбувається.

Висновки. В результаті проведеного комп'ютерного моделювання і числового аналізу можна зробити висновок про суттєвий вплив взаємного розташування включень, їх кількості і механічних властивостей, а також відстані між отвором і включеннями на НДС пластини в околі локального концентратора напружень.

Із розглянутих варіантів розташування еліптичних включень навколо кругового отвору найкращим з точки зору зменшення концентрації напружень виявився варіант чотирьох «жорстких» еліптичних включень, що знаходяться під кутом 30° відносно осі абсцис. Це дало змогу зменшити ККН на $\sim 34\%$. Отриманий результат майже схожий з [5], там вдалося знизити ККН на $\sim 33\%$ у разі використання двох «жорстких» еліптичних включень, розташованих під кутом 0° відносно осі абсцис.

Певне розташування еліптичних включень («жорстких» або «м'яких») навколо кругового отвору впливає на зміну локації областей максимальних напружень навколо нього у заданому напрямку, що відкриває можливості для керування локацією зон концентрації напружень.

Перспективним є пошук раціональних параметрів включень (форми, кількості, механічних характеристик, розташування та ін.) для зменшення концентрації параметрів НДС навколо локальних концентраторів напружень.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов. К.: Наукова думка, 1985. 302 с.
2. **Васильду К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
3. **Гарт Э. Л.** Конечноеэлементный анализ плоскодеформируемых сред с включениями // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. 2011. Вип. 15, т. 2. С. 39–47.
4. **Гарт Э. Л., Панченко С. В.** Численный анализ напряжённно-деформированного состояния пластины с прямоугольным отверстием, подкреплённым треугольными

накладками // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпропетровськ: Ліра, 2015. Вип. 24. С. 35–47.

5. **Гарт Е. Л., Рибалко Я. В.** Взаємовплив кругового отвору і оточуючих його еліптичних включень при пружному деформуванні прямокутної пластини // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2019. Вип. 30. С. 5–18.

6. **Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А.** Компьютерное моделирование поведения упругой среды с двумя сопряженными эллипсообразными включениями // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2017. Вип. 26. С. 42–50.

7. **Леонов М. Я.** Механика деформации и разрушения. Фрунзе: Илим, 1981. 236 с.

8. **Морозов Е. М., Никишков Г. П.** Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 256 с.

9. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.

10. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

11. **Серпик И. Н.** Высокопроизводительные многосеточные алгоритмы строительной механики тонкостенных конструкций. М: Изд-во АСВ, 2005. 240 с.

12. **Штерн М. Б., Рудь В. Д.** Механічні та комп'ютерні моделі консолідації гранульованих середовищ на основі порошків металів і кераміки при деформуванні та спіканні / під ред. В. В. Скорохода. Луцьк: Луцьк. нац. техн. ун-т, 2010. 232 с.

13. **Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.** Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. 2017. Vol. 52, Iss. 6. P. 768–774.

14. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No. 1. P. 55–69.

15. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80, Iss. 2. P. 156–163.

16. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in the problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // J. Math. Sci. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 21–38.

17. **Hart E., Rybalko Y.** About the method for reducing the stress concentration around the circular hole in the plate through elliptic inclusions // Al-Farabi International congress on applied sciences-II (May 2–4, 2021). Nakhchivan, Azerbaijan: Nakhchivan university, 2021. P. 241–242.

18. **Kushnir R., Yasinsky A., Tokovyy Yu., Hart E.** Inverse thermoelastic analysis of a bi-material cylinder with interfacial friction // Materials. 2021. Vol. 14, No. 2657. P. 1–12.

19. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

УДК 539.3

Э. Л. Гарт, д-р физ.-мат. наук, Я. В. Рыбалко

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ И МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Исследовано напряженно-деформированное состояние упругой неоднородной среды, смоделированной прямоугольной упругой пластиной с круговым отверстием и расположенными вокруг него несколькими эллиптическими включениями. На основе конечноэлементного анализа изучено влияние способа расположения

и механических свойств включений на концентрацию напряжений в пластине. Даны рекомендации по уменьшению концентрации напряжений вокруг отверстия.

Ключевые слова: упругая пластина; эллиптические включения; круговое отверстие; напряженно-деформированное состояние; коэффициент концентрации напряжений; метод конечных элементов; механический эффект.

UDC 539.3

E. L. Hart, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Y. V. Rybalko

COMPUTER SIMULATION OF THE INFLUENCE OF POSITION AND MECHANICAL PROPERTIES OF ELLIPTIC INCLUSIONS FOR THE PROCESS OF DEFORMATION AN ELASTIC PLATE WITH A CIRCULAR HOLE

The stress-strain state of an elastic inhomogeneous medium modeled by a rectangular elastic plate with a circular hole and several elliptical inclusions located around it is investigated. On the basis of finite element analysis, the influence of the arrangement method and the mechanical properties of inclusions on the stress concentration in the plate have been studied. Recommendations are given for reducing the stress concentration around the hole.

Keywords: *elastic plate; elliptical inclusions; circular hole; stress-strain state; stress concentration factor; finite element method; mechanical effect.*

Introduction. Plate-shell structures have found wide application in many branches of technology: rocket and space, aviation, shipbuilding and mechanical engineering, construction, oil industry, etc. Violation of the structural integrity at the macro and micro levels (holes, fillets, grooves, pores, cracks, the presence of various inclusions in the material, etc.) are factors that cause the structure heterogeneity. These factors have a significant effect on the stress concentration, deformation and fracture processes of solids [1, 7, 8, 12, 18]. Similar effects are caused by overlays, reinforcements that change the rigidity of the system.

The problem of determining the stress concentration around the holes in the plate-shell structural elements and methods of its reduction is an extremely important class of engineering problems [3–6, 9, 13–17].

In this work, as a continuation of [5], the FEM analysis of the stress-strain state (SSS) of a rectangular plate with one circular hole and elliptical inclusions from another material symmetrically located around it at a certain angle relative to the coordinate axes is carried out. The influence of the mechanical properties of inclusions, their number, method of arrangement and distance between the hole and the inclusions on the stress concentration around the hole is investigated.

Formulation of the problem. We consider the SSS of a plane elastic inhomogeneous medium modeled by a homogeneous rectangular isotropic plate of size $l_1 \times l_2$ with a central circular hole of radius r . Several (two and four) identical elliptical inclusions are symmetrically located around the hole (a , b are larger and smaller the semiaxes of the ellipse, respectively) at a distance l between their centers at an angle of 30° relative to the abscissa axis.

The plate is under the action of a uniform uniaxial tensile load ($p = \text{const}$), which does not lead to the appearance of plastic deformations.

The influence of the method of arrangement and mechanical properties of inclusions on the distribution of stresses in the plate around the hole is investigated.

Analysis of numerical results. In the case of a symmetric arrangement of two elliptical inclusions at an angle of 30° to the Ox coordinate axis: for $k > 1$, with a decrease in the distance l between the inclusions and the hole, a decrease in the stress concentration factor (SCF) is observed, while at the smallest of the considered distances this indicator decreases to $\sim 13\%$; for $k < 1$, on the contrary, the SCF value increases; in the case of the smallest of the considered distances, the SCF increases by $\sim 26\%$. Here a mechanical effect occurs, a shift of the zone of maximum stresses around the hole is observed: in the case of solid inclusions is clockwise (in the direction from the line of inclusions), in the case of soft inclusions is vice versa direction.

With a symmetrical arrangement of four elliptical inclusions at an angle of 30° to the Ox axis: for $k > 1$, with a decrease in distance l , the SCF value decreases, at the smallest of the considered distances l , the SCF value decreased by $\sim 34\%$; for $k < 1$, an increase in SCF is observed; at the smallest of the considered distances, the SCF increased by $\sim 35\%$. In this case, no displacement of the zone of maximum stresses around the hole occurs.

Conclusions. As a result of computer modeling and numerical analysis, it is possible to draw conclusions about the significant influence of the mutual arrangement of inclusions, their number and mechanical properties, as well as the distance between the hole and inclusions on the SSS of the plate in the immediate vicinity of the local stress concentrator.

Of the considered options for the location of elliptical inclusions around a round hole, the best option from the point of view of reducing stress concentration was the option with four "hard" elliptical inclusions located at an angle of 30° relative to the abscissa axis. This made it possible to reduce the SCF by $\sim 34\%$. The result obtained is practically similar to [5], where it was possible to reduce the SCF by $\sim 33\%$ using two "hard" elliptical inclusions located at an angle of 0° to the abscissa axis.

A certain arrangement of elliptical inclusions ("hard" or "soft") around a round hole affects the change around it of the areas of maximum stresses in a given direction, which opens up the possibility of controlling the location of the stress concentration zone.

The search for rational parameters of inclusions (shape, quantity, mechanical characteristics, location, etc.) is promising to reduce the concentration of SSS parameters around local stress concentrators.

REFERENCES

1. **Vanin G. A.** Micromechanics of composites. Kiev: Naukova dumka, 1985. 302 p. (in Russian).
2. **Washizu K.** Variation methods in the theory of elasticity and plasticity. Moscow: Mir, 1987. 544 p. (in Russian).

3. **Hart E. L.** Finite element analysis of plane-deformable media with inclusions // Bulletin of Dnepropetr. University. Ser.: Mechanics. 2011. Vol. 15, iss. 2. P. 39–47. (in Russian).
4. **Hart E. L., Panchenko S. V.** Numerical analysis of the stress-strain state of a plate with a rectangular hole, supported by triangular overlays // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Col. of sci. art. Dnepropetrovsk: Lira, 2015. Vol. 24. P. 35–47. (in Russian).
5. **Hart E. L., Rybalko Y. V.** Interaction of the circular hole and the environment of its elliptic inclusions when elastic deformation of a rectangular plate // Problems of computational mechanics and strength of structures: Col. of sci. art. Dnipro: Lira, 2019. Vol. 30. P. 5–18. (in Ukrainian).
6. **Hudramovich V. S., Hart E. L., Strunin K. A.** Computer simulation of the behavior elastic medium with two connected elliptical inclusions // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Col. of sci. art. Dnipro: Lira, 2017. Vol. 26. P. 42–50. (in Russian).
7. **Leonov M. Y.** Mechanics of deformation and destruction. Frunze: Ilim, 1981. 236 p. (in Russian).
8. **Morozov E. M., Nikishkov G. P.** The method of finite elements in the mechanics of destruction. Moscow: Nauka, 1980. 256 p. (in Russian).
9. **Savin G. N.** Stress distribution around holes. Kiev: Naukova dumka, 1968. 888 p. (in Russian).
10. **Segerlind L.** Application of the finite element method. Moscow: Mir, 1979. 392 p. (in Russian).
11. **Serpik I. N.** High-performance multi-grid algorithms of structural mechanics of thin-walled structures. Moscow: ASV Publishing House, 2005. 240 p. (in Russian).
12. **Shtern M. B., Rud V. D.** Mechanical and computer models of consolidation of granulated environments based on powdered metals and ceramics in deformation and sintering / Edited by V. V. Skorohod. Lutsk: Lutsk nat. techn. Univ., 2010. 232 p. (in Ukrainian).
13. **Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.** Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. 2017. Vol. 52, Iss. 6. P. 768–774.
14. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 203. No. 1. P. 55–69.
15. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80, Iss. 2. P. 156–163.
16. **Hart E. L., Hudramovich V. S.** Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in the problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // J. Math. Sci. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 21–38.
17. **Hart E., Rybalko Y.** About the method for reducing the stress concentration around the circular hole in the plate through elliptic inclusions // Al-Farabi International congress on applied sciences-II (May 2–4, 2021). Nakhchivan, Azerbaijan: Nakhchivan university, 2021. P. 241–242.
18. **Kushnir R., Yasinsky A., Tokovyy Yu., Hart E.** Inverse thermoelastic analysis of a bi-material cylinder with interfacial friction // Materials. 2021. Vol. 14, No. 2657. P. 1–12.
19. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна

Надійшла до редколегії 01.09.2021