ISSN 2079–1836
2021, вип. 33

DOI 10.15421/4221015
УДК 539.3

А. Г. Шпорта, канд. фіз.-мат. наук, Т. С. Кагадій, д-р фіз.-мат. наук, О. Д. Онопрієнко, PhD

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

Узагальнення методу малого параметру поширено на двовимірні задачі електропружності. Наведено розв'язання деяких прикладів таких задач, яки можна розглядати у якості модельних. Крайові задачі теорії електропружності для плоских ортотропних тіл зводяться до послідовного розгляду задач теорії потенціалу. Показано, що при розв'язанні крайової задачі електропружності з відповідними крайовими умовами методом збурень механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

Ключові слова: *електропружність; двовимірні задачі електропружності; електричні складові; узагальнення методу збурень; п'єзоелектрики; вектор напруженості.*

Вступ. Широке застосування п'єзоелектриків у сучасній техніці змушує дослідників розглядати електромагнітопружність як єдину науку, яка поєднує електродинаміку, теорію магнетизму та механіку суцільного середовища. Раніше ці науки на практиці вивчались окремо. Необхідність нового погляду пов'язана з тим, що при деформуванні деяких матеріалів на їх поверхнях з'являються електричні заряди, пропорційні деформації. Але виявляється, що неможна нехтувати і зворотнім ефектом, який проявляється у виникненні механічних напружень під впливом електричного поля. Докладний огляд і останні оригінальні результати у цьому напрямку можна знайти у [1 – 6].

Оскільки ізотропні матеріали в електропружності не викликають інтересу, то особливу увагу слід приділити анізотропним матеріалам, а також матеріалам із сильною анізотропією. Активні матеріали, перш за все п'єзоелектричні і п'єзоелектромагнітні, часто використовуються в якості функціональних частин різних електронних пристроїв, включаючи датчики, перетворювачі і виконавчі механізми, оскільки ці матеріали здатні змінювати свою форму під дією електричного або магнітного поля. У багатьох випадках розміри згаданих пристроїв надзвичайно малі, але вони можуть піддаватися впливу дуже великих механічних, електричних і магнітних полів. Крім того, ці пристрої зазвичай складаються з елементів, які можуть бути виготовлені з різних матеріалів (п'єзоелектричні або п'єзоелектромагнітні елементи, електроди тощо).

Дослідження поведінки конструкцій, виготовлених з таких матеріалів виявляє суттєві математичні труднощі під час відповідних розрахунків.

© А. Г. Шпорта, Т. С. Кагадій, О. Д. Онопрієнко, 2021

Необхідність у вирішенні цих питань, яка проявилася на практиці, зумовила важливість розробки методів розрахунку контактних взаємодій, а також дослідження контактних задач з урахуванням п'єзоелектричної і п'єзоелектромагнітної складової.

Огляд останніх досягнень у теоретичних та експериментальних дослідженнях функціональних (інтелектуальних) матеріалів та конструкцій наведений у [7, 8]. Особлива увага приділяється матеріалам, які можуть працювати як датчики або виконавчі механізми, а саме – п'єзоелектричним і магнітопружним матеріалам [9 – 11]. Ці матеріали внутрішньо пов'язують механічні, електричні та магнітні поля.

Асимптотичний аналіз являє собою ефективний математичний апарат, який дозволяє дослідникам побудувати відповідне рівняння апроксимації і оцінити застосування різних гіпотез.

У даному дослідженні пропонується застосування методу збурень, розробленого в роботах А.В. Павленка і Т.С. Кагадій, до розв'язання двовимірних контактних задач електропружності. При цьому під час дослідження розглядаються електропружні матеріали з прямолінійною анізотропією. Узагальнення зазначеного асимптотичного методу дозволяє показати, що цілком можливо звести такі задачі до послідовного розв'язування крайових задач теорії потенціалу.

Постановка проблеми. Нехай через кожну точку однорідної анізотропної пластини проходять дві взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії. Припускаючи, що ці площини перпендикулярні відповідно декартовим координатним осям Ox, Oy, отримаємо наступні рівняння рівноваги, електростатики, електропружного стану і співвідношень Коші:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}=0; \quad \frac{\partial Э_x}{\partial y}-\frac{\partial Э_y}{\partial x}=0; \tag{2}$$

$$e_x = s_{11}^{D}\sigma_x + s_{12}^{D}\sigma_y + g_{11}^{\sigma_0}D_x;$$

$$e_y = s_{21}^{D}\sigma_x + s_{22}^{D}\sigma_y + g_{12}^{\sigma_0}D_x;$$

$$\gamma_{xy} = s_{66}^{D}\tau_{xy} + g_{26}^{\sigma,D}D_y;$$

$$Э_x = -g_{11}^{\sigma,D}\sigma_x - g_{12}^{\sigma,D}\sigma_y + \beta_{11}^{\sigma}D_x; \quad Э_y = -g_{26}^{\sigma,D}\tau_{xy} + \beta_{22}^{\sigma}D_y; \tag{3}$$

$$e_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}, \tag{4}$$

Тут σ_x, $\sigma_y\left(\tau_{xy}\right)$ - нормальні (дотичні) напруження; e_x, e_y - компоненти тензора деформації; D_x, D_y і $Э_x$; $Э_y$ - компоненти вектора індукції і напруженості електричного поля; s_{ij}^D - коефіцієнти деформації матеріалу тіла, виміряні при постійній індукції електричного поля; $g_{kj}^{\sigma,D}$ - п'єзоелектричні модулі деформації і напруженості, виміряні при постійних напругах індукції; β_{kl}^{σ} - коефіцієнти діелектричної сприйнятливості, виміряні при постійних напруженнях; U,V - компоненти вектора переміщення пластини.

З першого рівняння системи (2) випливає, що існує деяка скалярна функція $\phi=\phi(x,y)$, така, що

$$D_1=D_x=\frac{\partial\phi}{\partial y};\qquad D_2=D_y=-\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

Розв'язання крайової задачі електропружності може бути зведено до інтегрування системи рівнянь

$$\begin{aligned}
&U_{xx}+\varepsilon U_{yy}+\varepsilon m V_{xy}-\left(a_{11}-\varepsilon a_{26}\right)\phi_{xy}=0;\\
&\varepsilon V_{xx}+qV_{yy}+\varepsilon m U_{xy}+\varepsilon a_{26}\phi_{xx}-qa_{12}\phi_{yy}=0;\\
&-\left(a_{11}-\varepsilon a_{26}\right)U_{xy}+\varepsilon a_{26}V_{xx}-qa_{12}V_{yy}+\varepsilon b_{22}\phi_{xx}+b_{11}\phi_{yy}=0;
\end{aligned}\qquad (5)$$

$$\varepsilon=\frac{G}{B_1};\quad q=\frac{B_2}{B_1};\quad m=1+\frac{\nu_2 B_1}{G}=1+\frac{\nu_1 B_2}{G};$$

$$a_{11}=g_{11}^{\sigma,D}+\nu_2 g_{12}^{\sigma,D};\qquad a_{12}=g_{12}^{\sigma,D}+\nu_1 g_{11}^{\sigma,D};\qquad a_{26}=g_{26}^{\sigma,D};$$

$$b_{11}=g_{11}^{\sigma,D}a_{11}+g_{12}^{\sigma,D}a_{12}\frac{B_2}{B_1}+\beta_{11}^{\sigma}\frac{\sigma}{B_1};\qquad b_{22}=a_{26}^2+\beta_{22}^{\sigma}\frac{\sigma}{G},$$

при відповідних граничних умовах.

Компоненти тензора напружень і вектора напруженості в цьому випадку записуються наступним чином:

$$\sigma_1=B_1\left(U_x+\nu_2 V_y-a_{11}\phi_y\right);\qquad \sigma_2=B_2\left(\nu_1 U_x+V_y-a_{12}\phi_y\right);$$

$$\tau=G\left(U_y+V_x+a_{26}\phi_x\right);\qquad (6)$$

$$Э_1=-B_1a_{11}U_x-B_2a_{12}V_y+B_1b_{11}\phi_y;\quad Э_2=-Ga_{26}U_y-Ga_{26}V_x+Gb_{22}\phi_x.$$

Тут $\sigma_1=\delta\sigma_x$, $\sigma_2=\delta\sigma_y$, $\tau=\delta\tau_{xy}$, $B_1=\dfrac{E_1\delta}{1-\nu_1\nu_2}$, $B_2=\dfrac{E_2\delta}{1-\nu_1\nu_2}$, $Э_1=\delta Э_x$, $Э_2=\delta Э_y$, $G=G_*\delta$. Індекси x,y у рівняннях (5) і співвідно-

шеннях (6) позначають диференціювання по координатах; E_1, E_2 – модулі пружності уздовж головних напрямків x, y; G_x – модуль зсуву; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона.

Метод розв'язання поставленої проблеми. У реальних ортотропних матеріалах величина $\varepsilon = G/B_1$ завжди значно менша за одиницю. Величину ε можна розглядати як малий параметр при асимптотичному інтегруванні системи (5). Таке припущення можна зробити тому, що відношення $q = B_2/B_1$ може бути різним ($q \le 1$ або $q \ge 1$), але завжди залишається більше за ε. Тому значення q в подальшому будемо вважати порядку одиниці.

Щоб урахувати усі можливі відмінності між величинами шуканих функцій та їх швидкостями зміни вздовж координат x, y у пружних матеріалах вводяться афінні перетворення координат та шуканих функцій.

$$\xi_1 = \alpha\varepsilon^{1/2}x; \quad \eta_1 = y; \quad U = U^{(1)};$$

$$V = \varepsilon^{3/2}V^{(1)}; \quad \phi = \varepsilon^{3/2}\phi^{(1)}; \tag{7}$$

$$\xi_2 = x; \quad \eta_2 = \beta\varepsilon^{1/2}y; \quad U = \varepsilon^{3/2}U^{(2)};$$

$$V = V^{(2)}; \quad \phi = \varepsilon^2\phi^{(2)}. \tag{8}$$

Повне дотичне напруження складається з суми обох складових; через нього ж і здійснюється зв'язок між цими двома типами напружених станів. Залежно від навантаження одне з них має характер приграничного шару.

Таким чином, при механічному навантаженні п'єзоматеріалів, коли граничні умови задаються в напруженнях, переміщеннях або їх комбінаціях, розв'язки відповідних крайових задач будемо представляти у вигляді суперпозиції розв'язків цих двох типів напружено-деформованого стану:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}; \quad V = V^{(1)} + V^{(2)}; \quad \phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}.$$

Розшукуючи функції $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $\phi^{(n)}$ $(n = 1, 2)$ у вигляді ряду за степенями параметра ε, необхідно вибрати відповідні асимптотичні послідовності. Вид асимптотичної послідовності визначається структурою рівнянь (5) і порядком по ε похибки в крайових умовах, що виникає після розв'язання задачі в нульовому наближенні $(\varepsilon \to 0)$. Щоб урахувати всі можливі випадки, ці функції визначатимемо у вигляді рядів за параметром $\varepsilon^{1/2}$ (з перетворень (7), (8) видно, що рядів за меншими степенями параметра ε виникнути не може):

$$U^{(n)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}U^{n,j};\qquad V^{(n)}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}V^{n,j};$$
$$\phi^{(n)}=\sum_{j=0}^{\infty}\phi^{n,j},\qquad (n=1,2). \tag{9}$$

Коефіцієнти α, β також представимо у вигляді рядів по параметру $\varepsilon^{1/2}$ $\alpha=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\alpha_j$, $\beta=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{j/2}\beta_j$ причому $\alpha_0=\beta_0=1$, а коефіцієнти α_j,β_j $(j=1,2,...)$ знаходяться з тих же умов, що і для пружних матеріалів, а саме: в кожному з наближень в лівій частині рівнянь для визначення основних функцій $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ повинні залишатися оператори Лапласа цих функцій, а в правій частині відсутні компоненти вектора переміщень або їх похідні (в пружній задачі для визначення основних функцій в кожному з наближень праві частини обертаються на нуль). Допоміжні ж функції $V^{1,j}$, $U^{2,j}$, $\phi^{1,j}$, $\phi^{2,j}$ через основні виражаються простим інтегруванням.

Після розщеплення отриманої системи по параметру $\varepsilon^{1/2}$ прийдемо до нескінченної системи рівнянь щодо функцій $U^{1,j}$, $V^{1,j}$, $\phi^{1,j}$ $(j=0,1,...)$. При цьому будемо вважати, що $\alpha_{11}\sim\varepsilon\beta_{11}$, $b_{22}\sim\varepsilon^2 b_{11}$, $a_{12}\sim a_{26}\sim\varepsilon^3 b_{11}$. Наведемо ці рівняння для перших трьох наближень $(j=0,1,2)$.

При $j=0$:

$$U^{1,0}_{\xi\xi}+U^{1,0}_{\eta\eta}=0;\quad qV^{1,0}_{\eta\eta}+mU^{1,0}_{\xi\eta}=0;\quad -a_{11}U^{1,0}_{\xi\eta}+\varepsilon b_{11}\phi^{1,0}_{\eta\eta}=0;$$

При $j=1$:

$$U^{1,1}_{\xi\xi}+U^{1,1}_{\eta\eta}=0;\qquad qV^{1,1}_{\eta\eta}+mU^{1,1}_{\xi\eta}=0;\quad -a_{11}U^{1,1}_{\xi\eta}+\varepsilon b_{11}\phi^{1,1}_{\eta\eta}=0; \tag{10}$$

При $j=2$:

$$U^{1,2}_{\xi\xi}+U^{1,2}_{\eta\eta}-a_{11}\phi^{1,0}_{\xi\eta}=0;\qquad qV^{1,2}_{\eta\eta}+mU^{1,2}_{\xi\eta}=0;\qquad -a_{11}U^{1,2}_{\xi\eta}+\varepsilon b_{11}\phi^{1,2}_{\eta\eta}=0.$$

Тут і далі прийнято, що диференціювання (індекси ξ, η) виконуються за тими координатами ξ_n, η_n $(n=1,2)$, індекси яких збігаються з першими верхніми індексами функцій.

Після підстановки перетворень (8) в систему (5) з використанням відповідних розкладів і розщеплення за параметром $\varepsilon^{1/2}$ отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно функцій $U^{2,j}$, $V^{2,j}$, $\phi^{2,j}$ $\left(j=0,1,...\right)$, які визначають розв'язки другого типу.

Із системи (10) випливає, що в перших двох наближеннях $\left(j=0,1\right)$ основні функції $U^{1,j}$ ($V^{2,j}$ для другого напруженого стану) визначаються з рівнянь Лапласа (при $q=1$ або очевидній заміні однієї зі змінних), а допоміжні функції виражаються простим інтегруванням через основні.

У третьому наближенні $\left(j=2\right)$ і далі для напруженого стану першого типу функції $U^{1,j}$ знаходяться з рівняння Пуассона при відомій правій частині, яка містить тільки функцію ϕ, знайдену в попередніх наближеннях. Аналогічна ситуація має місце в напруженому стані другого типу для функції $V^{2,j}$, але починаючи з четвертого наближення $\left(j=3\right)$ і далі. Використовуємо перетворення (7), (8) і розкладання в виразах для переміщень, напружень і напруженостей (6) і представимо їх у вигляді рядів:

$$U=U^{1,0}+\varepsilon^{1/2}U^{1,1}+\varepsilon U^{1,2}+...;$$
$$V=V^{2,0}+\varepsilon^{1/2}V^{2,1}+\varepsilon V^{2,2}+\varepsilon^{3/2}\left(V^{2,3}+V^{1,0}\right)+..;$$

$$\sigma_1=\sigma_{1,0}+\varepsilon^{1/2}\sigma_{1,1}+\varepsilon\sigma_{1,2}+...=B_1\varepsilon^{1/2}\left[U_\xi^{1,0}+\varepsilon^{1/2}\left(U_\xi^{1,1}+\nu_2U_\eta^{2,0}\right)+\right.$$
$$\left.\varepsilon\left(U_\xi^{1,2}+U_\xi^{2,0}+\nu_2U_\eta^{2,1}-a_{11}\phi_\eta^{1,0}\right)+...\right];$$

$$\sigma_2=\sigma_{2,0}+\varepsilon^{1/2}\sigma_{2,1}+\varepsilon\sigma_{2,2}+...=$$
$$=B_2\varepsilon^{1/2}\left[V_\eta^{2,0}+\varepsilon^{1/2}\left(V_\eta^{2,1}+\nu_1U_\xi^{1,0}\right)+...\right];$$

$$\tau=\tau_0+\varepsilon^{1/2}\tau_1+\varepsilon\tau_2+...=$$
$$=G\left[U_\xi^{1,0}+V_\xi^{2,0}+\varepsilon^{1/2}\left(U_\eta^{1,1}+V_\xi^{2,1}\right)+\varepsilon\left(U_\eta^{1,2}+V_\xi^{2,2}\right)...\right];$$

$$\Theta_1=\Theta_{1,0}+\varepsilon^{1/2}\Theta_{1,1}+\varepsilon\Theta_{1,2}+...=-B_1a_{11}\varepsilon^{1/2}\left[U_\xi^{1,0}+\varepsilon^{1/2}U_\xi^{1,1}+\right.$$
$$\left.+\varepsilon\left(U_\xi^{1,2}+U_\xi^{2,0}\right)+...\right]-B_2a_{12}\varepsilon^{1/2}V_\eta^{2,0}+ \qquad (11)$$
$$+B_1b_{11}\varepsilon\varepsilon^{1/2}\left[\phi_\eta^{1,0}+\varepsilon^{1/2}\phi_\eta^{1,1}+\varepsilon\left(\phi_\eta^{1,2}+\phi_\eta^{2,0}\right)+...\right];$$

$$\Im_2 = \Im_{2,0} + \varepsilon^{1/2}\Im_{2,1} + \varepsilon\Im_{2,2} + \ldots = -Ga_{26}\left[\left(U_\eta^{1,0} + V_\xi^{2,0}\right) + \right.$$
$$+\varepsilon^{1/2}\left(U_\xi^{1,1} + U_\xi^{2,1}\right) + \left(U_\eta^{1,0} + V_\xi^{2,0}\right) + \varepsilon^{1/2}\left(U_\xi^{1,1} + U_\xi^{2,1}\right) + \ldots\Big] -$$
$$-Gb_{22}\varepsilon^2\left[\left(\phi_\xi^{1,0} + \phi_\xi^{2,0}\right) + \varepsilon^{1/2}\left(\phi_\xi^{1,1} + \phi_\xi^{2,1}\right) + \varepsilon\left(\phi_\xi^{1,2} + \phi_\xi^{2,2}\right) + \ldots\right].$$

При цьому враховувалося, що коефіцієнти Пуассона ν_1, ν_2 порядку $\varepsilon^{1/2}$, a_{12} порядку $\varepsilon^2 b_{11}$, a_{11} порядку εb_{11}. Зі співвідношень (10), (11) видно, що напружено-деформовані стани першого і другого типів пов'язані тільки через граничні умови. Оскільки основні функції $U^{2,j}$, $V^{2,j}$ визначаються з рівнянь Лапласа (Пуассона), то ефективність методу залежить від того, чи вдається сформулювати відповідні крайові задачі для знаходження цих функцій.

Аналіз граничних умов. Нехай на лінії, яка обмежує (наприклад, $x = const$, $V^{2,j}$) відомі нормальні σ_1 і дотичні τ напруження

$$\sigma_1 = f_1(y); \quad \tau = f_2(y).$$

Припускаємо, що ці функції можуть бути представлені рядами

$$f_n(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} f_{n,j}(y) \qquad (n = 1, 2).$$

У іншому випадку усі коефіцієнти при $\varepsilon^{j/2}$ обертаються на нуль.

Тоді на лінії, що обмежує $x = const$ маємо

$$\sigma_{1,j} = f_{1,j}; \quad \tau_j = f_{2,j}.$$

Для наочності докладно розглянемо нульове наближення ($j = 0$). Використовуючи результати попереднього пункту, приходимо до інтегрування рівнянь напруженого стану:

- першого типу (11) ($j = 0$) при наступних граничних умовах для функції $U_\xi^{1,0}$:

$$U_\xi^{1,0} = \left(B_1\varepsilon^{1/2}\right)^{-1} f_{1,0};$$

- другого типу ($j = 0$) з крайовими умовами для функції $V^{2,0}$:

$$V_\xi^{2,0} = G^{-1} f_{2,0} - U_\eta^{1,0}.$$

Якщо на лінії, що обмежує $x = const$, задані зміщення, маємо

$$U = \psi_1(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,\mathrm{j}} \,,\; V = \psi_2(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,\mathrm{j}} \,.$$

На цій лінії ($x = const$) $U_j = \psi_{1,\mathrm{j}}$, $V_j = \psi_{2,\mathrm{j}}$ граничні умови для функцій $U^{1,j}$, $V^{2,j}$ при $j = 0$ запишуться відповідно

$$U^{1,0} = \psi_{1,0}\,,\; V^{2,0} = \psi_{2,0}\,.$$

Аналогічним чином неважко отримати крайові умови для функцій $U^{1,0}$, $V^{2,0}$ в разі мішаної задачі.

Якщо відбувається лише електрична взаємодія, то компоненти вектора переміщень будуть суттєво меншими, ніж при механічному навантаженні.

При комбінованому, механічному та електричному (або ж магнітному) навантаженнях завдяки лінійності можна розглядати ці дві задачі (три види напружених станів) окремо. Повний розв'язок можна представляти у вигляді суперпозиції розв'язків окремих задач.

Узагальнення асимптотичного методу на двовимірні задачі електропружності перевірено для окремих модельних задач:

Задача 1. Нехай на границю півплощини $x \geq 0$, $|y| < \infty$ у початку координат $(0;0)$ діє нормальна зосереджена сила P_0, дотичні напруження при $x = 0$ відсутні, на нескінченності похідні компонент вектора переміщень обертаються на нуль, тобто граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_1 = -P_0 \delta(y)\,,\; \tau = 0 \;\; (x = 0)\,, \tag{12}$$

на нескінченності усі умови нульові. Тут $\delta(y)$ – дельта-функція Дірака.

У першому наближенні приходимо до інтегрування рівнянь (5) при наступних граничних умовах:

$$U_{0x} = -(P_0 / B_1)\delta(y) \text{ при } x = 0\,, \text{ (для НДС I типу)},$$

$$V_{0x} = -U_{0y} \text{ при } x = 0\,, \text{ (для НДС II типу)},$$

на нескінченності похідні обертаються на нуль.

При послідовному розв'язанні вказаних крайових задач отримаємо

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1^{-1} x}{\pi\left(\omega_1^{-2} x^2 + y^2\right)}\,,\; \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1}{\pi} \frac{y}{\left(\omega_1^{-2} x^2 + y^2\right)}\,,$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}=\frac{P_0}{B_1}\frac{\omega_1}{\pi}\frac{y}{\left(\omega_2^2x^2+y^2\right)},\ \frac{\partial V_0}{\partial y}=-\frac{P_0}{B_1}\frac{\omega_1}{\pi}\frac{x}{\left(\omega_2^2x^2+y^2\right)},$$

де $\omega_1^2=B_1/G,\ \ \omega_2^2=B_2/G$.

Оскільки $\tau=G\left(U_{0y}+V_{0x}\right)$, а $\lim\limits_{\omega_1^{-1}x\to 0+0}\dfrac{\omega_1^{-1}x}{\pi\left(\omega_1^{-2}x^2+y^2\right)}=\delta(y)$, то граничні умови (12) виконуються повністю.

Похибки, які виникають за рахунок допоміжних функцій, мають більш високий порядок малості та нівелюються при розв'язанні аналогічних задач у наступних наближеннях.

Задача 2. Якщо на границі півплощини $x\ge 0$, $|y|<\infty$ у початку координат заданий вектор індукції електричного поля

$$D_1=\varphi_y^{\Э}=d_1^0\delta(y),\ D_2=-\varphi_x^{\Э}=d_2^0\delta(y)\ \ (x=0),$$

то розв'язок рівняння (2) при вказаних граничних умовах має вигляд

$$D_1=\frac{1}{\pi k}\frac{d_1^0k^2x-d_2^0y}{k^2x+y^2},\ D_2=\frac{k}{\pi}\frac{d_1^0y+d_2^0x}{k^2x+y^2},\ k^2=\frac{B_1b_{11}}{Gb_{22}}.$$

При завданні на границі півплощини функції $\varphi^{\Э}$ як $\varphi^{\Э}=\varphi_0\delta(y)\ \ (x=0)$ отримаємо

$$\varphi^{\Э}(x,y)=\frac{\varphi_0kx}{\pi\left(k^2x^2+y^2\right)},$$

$$D_1=-\frac{\varphi_0 2k}{\pi}\frac{xy}{\left(k^2x^2+y^2\right)^2},\ D_2=\frac{\varphi_0k}{\pi}\frac{k^2x^2-y^2}{\left(k^2x^2+y^2\right)^2}.$$

Інші невідомі розшукуються за відповідними формулами.

Висновки і перспективи подальшого розвитку у даному напрямку. Подані приклади наведені у якості модельних задач та підтверджують, що за допомогою запропонованого узагальненого методу збурень розв'язання задач електропружності цілком можливо сформулювати відповідні крайові задачі для основних функцій, що дозволяє представити вихідну задачу електропружності у вигляді суперпозиції більш простих крайових задач, де механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, але мають взаємний вплив через крайові умови.

Цей метод дозволяє досліджувати більш широкий круг принципово нових і практично важливих задач електропружності. З використанням застосованого підходу можливе проведення попередньої оцінки напружено-деформованого стану конструкцій, механізмів або деталей при різних умовах контакту, можуть бути отримані аналітичні розв'язки різноманітних практично важливих задач.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Гринченко В. Т.***, *Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. К.: Наук. думка, 1989. 280 с.

2. ***Калоеров С. А.***, *Самодуров А. А.* Влияния значений пьезомодулей на пьезоэффект в задачах электромагнитоупругости // Теорет. и прикладная механика. 2010. Вып. 7. С. 118–130.

3. ***Калоеров С. А.***, *Самодуров А. А.* Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2014. № 57. С. 62–77.

4. ***Калоеров С. А.***, *Самодуров А. А.* Исследование электромагнитоупругого состояния пьезопластинки с подкрепленными отверстиями // Вісн. Донец. ун-та. Сер. А.: Природ. науки. 2013. Вып. 1. С. 42–48.

5. ***Онопрієнко О. Д.***, *Лобода В. В.* Електропровідна тріщина між різнорідними п'єзоелектричними матеріалами з контактуючими берегами // Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. 2015. № 1. С. 117–127.

6. ***Партон В. З.***, *Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.

7. ***Пастернак Я.М.***, *Сулим Г.Т., Пастернак Р.М.* Вивчення напруженого стану тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів: огляд публікацій до 2010 р. // Опір матеріалів і теорія споруд. 2015. № 95. С. 35–80.

8. ***Пастернак Я. М.***, *Сулим Г. Т., Пастернак Р. М.* Дія зосереджених джерел тепла в піроелектрику з тріщинами за сталої температури на їх берегах // Фізико-хімічна механіка матеріалів. 2015. Т. 51. С. 55–61.

9. ***Govorukha V.***, *Kamlah M., Sheveleva A.* Influence of concentrated loading on opening of an interface crack between piezoelectric materials in a compressive field // Acta Mechanica. 2015. Vol. 226, Iss. 7. P. 2379–2391. https://doi.org/10.1007/s00707-015-1329-z

10. ***Herrmann K. P.***, *Loboda V.V., Govorucha V.B.* On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial // Int. J. of Fracture. 2001. Vol. 111. P. 203–227.

11. ***Herrmann K. P.***, *LobodaV.V.* Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Archive of Applied Mechanics. 2000. Vol. 70. P. 127–143. https://doi.org/10.1007/s004199900052

УДК 539.3

А. Г. Шпорта, канд. физ.-мат. наук, Т. С. Кагадий, д-р физ.-мат. наук, О. Д. Оноприенко, PhD

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Обобщение метода малого параметра распространено на двумерные задачи электроупругости. Приведены решения некоторых примеров таких задач, которые можно рассматривать в качестве модельных. Краевые задачи

теории электроупругости для плоских ортотропных тел сводятся к последовательному рассмотрению задач теории потенциала. Показано, что при решении краевой задачи электроупругости с соответствующими краевыми условиями методом возмущений механические и электрические составляющие могут быть отделены, но имеют взаимное влияние через краевые условия.

Ключевые слова: *электроупругость; двумерные задачи электроупругости; электрические составляющие; обобщение метода возмущений; пьезоэлектрик; вектор напряженности.*

UDC 539.3

A. H. Shporta, PhD (Phys.-Math.), T. S. Kagadiy, Dr. Sci. (Phys.-Math.), O. D. Onopriienko, PhD

ANALYTICAL SOLUTIONS OF SOME ELECTROELASTICITY MODEL PROBLEMS

The generalization of the small parameter method is extended to two-dimensional problems of electroelasticity. Solutions of some examples of such problems are given, which can be considered as model ones. Boundary value problems of the theory of electroelasticity for plane orthotropic bodies are reduced to a sequential consideration of problems of potential theory. It is shown that when solving one or another boundary value problem of electroelasticity with the corresponding boundary conditions by the method of perturbations, the mechanical and electrical components can be separated, but they have a mutual influence through the boundary conditions.

Keywords: *electroelasticity, two-dimensional problems of electroelasticity, electrical components, generalization of the perturbation method, piezoelectrics, electric-field vector.*

The study of the behavior of structures made of piezoelectric materials reveals significant mathematical difficulties in the corresponding calculations.

The need to solve the problems, which arise in practice, necessitated the development of methods for calculating contact interactions, as well as the study of contact problems taking into account the piezoelectric and piezoelectromagnetic components.

Electroelastic materials with rectilinear anisotropy are considered during the research. The generalization of asymptotic method allows us to show that it is quite possible to reduce such problems to the sequential solution of boundary value problems of potential theory.

To take into account all possible differences between the values of the searched functions and their rates of change along the coordinates in the elastic materials, affine transformations of the coordinates and the searched functions are introduced.

$$\xi_1 = \alpha\varepsilon^{1/2}x;\ \eta_1 = y;\ U = U^{(1)};$$
$$V = \varepsilon^{3/2}V^{(1)};\quad \phi = \varepsilon^{3/2}\phi^{(1)}; \tag{1}$$
$$\xi_2 = x;\ \eta_2 = \beta\varepsilon^{1/2}y;\ U = \varepsilon^{3/2}U^{(2)};$$
$$V = V^{(2)};\quad \phi = \varepsilon^{2}\phi^{(2)}. \tag{2}$$

It is seen from the transformations (1), (2) that the solutions after the introduction of transformations (1) (or (2)) are changing relatively slowly along the coordinate x (or y) in comparison with similar solutions of the system obtained after the application of other transformations.

The total tangential stress consists of the sum of both components; the connection between these two types of stress states is carried out.

The generalization of the asymptotic method to two-dimensional problems of electroelasticity is checked for *some model problems.*

1. We suppose that a normal concentrated force P_0 acts on the boundary of the half-plane $x \geq 0$, $|y| < \infty$ at the beginning of the coordinates $(0;0)$, the tangential stresses at $x = 0$ are absent, the derivatives of the components of the displacement vector rotate to zero at infinity, so, the boundary conditions have the following form:

$$\sigma_1 = -P_0 \delta(y), \ \tau = 0 \ \ (x = 0), \tag{3}$$

all conditions are zero at infinity.

By solving the corresponding boundary value problems sequentially, we obtain

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1^{-1} x}{\pi\left(\omega_1^{-2} x^2 + y^2\right)}, \ \frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1}{\pi} \frac{y}{\left(\omega_1^{-2} x^2 + y^2\right)},$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} = \frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1}{\pi} \frac{y}{\left(\omega_2^2 x^2 + y^2\right)}, \ \frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{P_0}{B_1} \frac{\omega_1}{\pi} \frac{x}{\left(\omega_2^2 x^2 + y^2\right)},$$

where $\omega_1^2 = B_1/G, \ \ \omega_2^2 = B_2/G$.

2. The case is considered when at the boundary of the half-plane $x \geq 0$, $|y| < \infty$, at the beginning of the coordinates the vector of electric field induction $D_1 = \varphi_y^{\ni} = d_1^0 \delta(y), \ D_2 = -\varphi_x^{\ni} = d_2^0 \delta(y), \ (x = 0)$ is given.

The solution of equation (2) under the appropriate boundary conditions has the form

$$D_1 = \frac{1}{\pi k} \frac{d_1^0 k^2 x - d_2^0 y}{k^2 x + y^2}, \ D_2 = \frac{k}{\pi} \frac{d_1^0 y + d_2^0 x}{k^2 x + y^2}, \ k^2 = \frac{B_1 b_{11}}{G b_{22}}.$$

The proposed generalized perturbation method allows to formulate the corresponding boundary value problems for the main functions, which allows to present the initial problem of electroelasticity in the form of superposition of simpler boundary value problems, where mechanical and electrical components can be separated but interact through boundary conditions.

REFERENCES

1. ***Hrynchenko V. T***., *Ulytko A. F., Shulha N. A.* Electroelasticity. Kiev: Nauk. dumka. 1989. 280 p. (in Russian).

2. ***Kaloerov S. A***., *Samodurov A. A.* Influence of the values of piezomodules on the piezoelectric effect in problems of electromagnetoelasticity// Teoret. y prykladnaia mekhanyka. 2010.Vol. 75. P. 118–130. (in Russian).

3. ***Kaloerov S. A.,*** *Samodurov A. A.* The problem of electroviscoelasticity for multi-connected plates. Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia. 2014. No. 57. P. 62–77. (in Russian).

4. ***Kaloerov S.A.,*** *Samodurov A.A.* Study of the electromagnetoelastic state of a piezoplate with reinforced holes // Visn. Donets. un-that. Ser. A. Nature. science. 2013, No. 1. P. 42–48. (in Russian).

5. ***Onopriienko O. D.,*** *Loboda V. V.* Electrically conductive crack between heterogeneous piezoelectric materials with contacting shores. Visnyk Zaporizkoho natsionalnoho universytetu. Fizyko-matematychni nauky. 2015. No. 1. P. 117–127. (in Ukrainian)

6. ***Parton V. Z.,*** *Kudriavtsev B. A*. Electromagnetic elasticity of piezoelectric and electrically conductive bodies. Moscow: Nauka, 1988. 472 p. (in Russian).

7. ***Pasternak Ya.M.,*** *Sulym H.T., Pasternak R.M.* Study of the stress state of bodies from functional structurally inhomogeneous materials: a review of publications up to 2010. // Opir materialiv i teoriia sporud. 2015. No. 95. P.35–80. (in Ukrainian)

8. ***Pasternak Ya. M.,*** *Sulym H. T., Pasternak R. M.* The action of concentrated heat sources in pyroelectrics with cracks at a constant temperature on their shores. Fizyko-khimichna mekhanika materialiv, 2015. Vol. 51. P. 55–61. (in Ukrainian)

9. ***Govorukha V.***, *Kamlah M., Sheveleva A.* Influence of concentrated loading on opening of an interface crack between piezoelectric materials in a compressive field. Acta Mechanica. 2015. Vol. 226, Iss. 7, P. 2379–2391.

10. ***Herrmann K. P.***, *Loboda V.V., Govorucha V.B*. On contact zone models for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial. International J. of Fracture. 2001. Vol. 111. P. 203–227.

11. ***Herrmann K. P.***, *LobodaV.V*. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models. Archive of Applied Mechanics. 2000. Vol. 70. P. 127–143. https://doi.org/10.1007/s004199900052

НТУ «Дніпровська політехніка»,
Дніпро, Україна

Надійшла до редколегії 07.09.2021