DOI 10.15421/4222103
УДК 539.3

Е. Л. Гарт, д-р фіз.-мат. наук, Є. О. Поцелуйко

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН З ДВОМА КРУГОВИМИ ТА ЕЛІПТИЧНИМИ ОТВОРАМИ

Проведено комп'ютерне моделювання поведінки тонких пружних кусково-однорідних прямокутних пластин з двома центрально розташованими круговими та еліптичними отворами за дії одновісного розтягувального навантаження. Із застосуванням методу скінченних елементів досліджено вплив механічних і геометричних параметрів центральної вставки з іншого матеріалу, конфігурації та розташування отворів на концентрацію напружень навколо них. Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів щодо зниження концентрації напружень з результатами для відповідних однорідних пластин.

Ключові слова: *пружна кусково-однорідна пластина; кругові отвори; еліптичні отвори; коефіцієнт концентрації напружень; метод скінченних елементів.*

Вступ. Пластинчато-оболонкові елементи конструкцій широко застосовуються в різноманітних галузях техніки, енергетиці, будівництві та ін. Такі потужні галузі виробництва та проєктування, як авіа-, судно- та машинобудування та багато інших сфер, пов'язані з моделюванням та застосуванням тонкостінних конструкцій. Проте не завжди використовуються матеріали, однорідні за своєю структурою. Вони можуть містити такі особливості як отвори, тріщини, прошарки чужорідних середовищ, різні за складом і розмірами сторонні елементи (включення). Ці дефекти, не тільки тріщини, але і довільні неоднорідності матеріалу, перш за все тонкостінні, тому вони є потужними концентраторами напружень. Саме в їх околі починаються процеси пластичного деформування і руйнування [10, 17]. Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл з такого роду концентраторами напружень відносяться до однієї з важливих проблем механіки деформованого твердого тіла.

У промисловості широко застосовують пружні деталі, що являють собою тонкі пластинки з наявними отворами або виступами. При навантаженні пластинок з отворами поблизу їх границь виникає концентрація напружень [1], яка може несприятливо позначитися на їх міцності. Велика кількість робіт присвячена дослідженню НДС пластин з отворами та включеннями при різних зовнішніх навантаженнях [5–7]. Оскільки знаходження точного розв'язку крайових задач в аналітичному вигляді можливо лише в деяких окремих випадках навантаження тіл та при окремих умовах їх закріплення, то для інженерної практики особливо важливе значення мають наближені, але досить загальні, методи розв'язання задач прикладної теорії пружності.

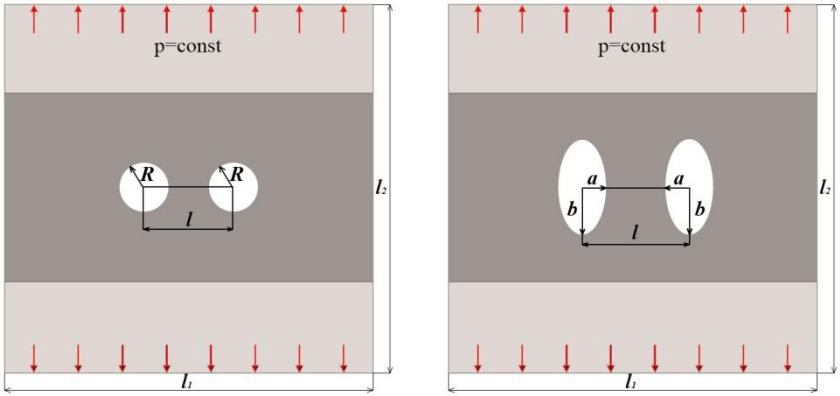
© Е. Л. Гарт, Є. О. Поцелуйко, 2022

Проблема визначення концентрацій напружень біля отворів у пластинах, підданих зовнішньому навантаженню, становить надзвичайно важливий клас інженерних задач.

До найбільш ефективних методів розв'язання вказаного класу задач відносять варіаційно-сіткові методи, зокрема метод скінченних елементів (МСЕ) [18], а також його проекційно-ітераційні схеми реалізації [2–4, 9, 11–16], які дозволяють суттєво зменшити витрати комп'ютерного часу розрахунків та прискорити збіжність процесу отримання числового розв'язку задачі.

У цій роботі за допомогою МСЕ проводиться дослідження НДС кусково-однорідних пружних пластин з двома отворами (круговими та еліптичними), із центральною вставкою з іншого матеріалу при заданих граничних умовах в напруженнях (одновісний розтяг). Досліджується вплив вибору матеріалу і ширини вставки (включення), а також величини відстані між отворами і їх конфігурації на концентрацію напружень у пластинах.

Постановка задачі. Розглядається НДС пружних тонких кусково-однорідних ізотропних прямокутних пластин товщини H, розмірами $l_1 \times l_2$ з двома однаковими круговими отворами радіусу R (рис. 1, а) та однаковими еліптичними отворами (a, b – менша і більша півосі еліпсу відповідно) (рис. 1, б), які розташовані по центру пластин вздовж осі Ox на відстані l між їх центрами. Пластини мають центральну вставку (включення) ширини h з іншого матеріалу та знаходяться під дією одновісного рівномірного розтягувального навантаження $p=const$, що не призводить до появи пластичних деформацій.



а) б)

Рис. 1 – **Геометрія та схема навантаження кусково-однорідних пластин з двома отворами: а) круговими; б) еліптичними**

Вважається, що включення змодельовано центральною вставкою, яка знаходиться у площині пластини і має однакову з нею товщину H; на границі включення з пластиною задано умови жорсткого зчеплення.

Вивчається: 1) вплив ширини вставки h на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН) для різних значень відстані між отворами (l=3a; 4a) для таких випадків:

а) *пластина з круговими отворами:* $h = 2R$; $h > 2R$ ($h = 3R$; $4R$); $h < 2R$ ($h = 1{,}5R$; R), де h – ширина вставки із матеріалу з механічними властивостями E_2, ν_2;

б) *пластина з еліптичними отворами:* $h = 2b$; $h > 2b$ ($h = 3b$; $4b$); $h < 2b$ ($h = 1{,}5b$; b);

2) НДС однорідної і кусково-однорідної пластин з двома круговими та еліптичними отворами в залежності від відстані l між отворами і ширини вставки h з точки зору найбільш небезпечних і найбільш доцільних конфігурацій щодо зменшення величини ККН.

У розрахунках прийнято: розміри пластини l_1=l_2 =0,3 *м*; радіус кругового отвору R=0,02 *м*; розміри еліптичного отвору (a=R=0,02 *м*, b =0,04 *м*); матеріал пластини – сталь (E_1 = 210 *ГПа*, ν_1 = 0,3); матеріал вставки – алюміній (E_2 = 70 *ГПа*, ν_2 = 0,36); ширина вставки h: 1) h=2b=0,08 *м*; 2) $h > 2b$=0,12 *м*; 0,16 *м*; 3) $h < 2b$=0,04 *м*; 0,06 *м*; розтягувальне навантаження p = 10 *МПа*.

Математична модель задачі. У варіаційній постановці вихідна задача призводить до мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії деформації системи [8]:

$$I[u,v] = \int_{\Omega_1}\left\{2\nu_1\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\nu_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}dx\,dy+\sum_{i=2}^{n+1}\int_{\Omega_i}\left\{2\nu_i\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+\lambda_i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\nu_i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}dx\,dy-\int_{\gamma} pv\,d\gamma, \quad (1)$$

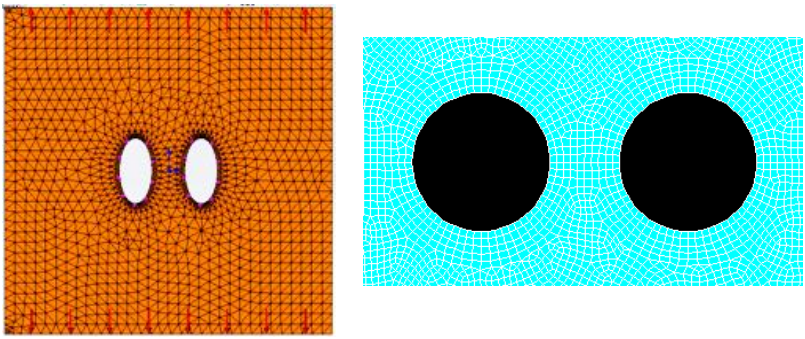
де $u(x,y), v(x,y)$ – проекції вектора переміщень на осі Ox і Oy відповідно; λ_1, ν_1 – константи Ляме матеріалу пластини Ω_1 (матриці); λ_i, ν_i – константи Ляме матеріалу $(i-1)$-го включення Ω_i ($i = \overline{2, n+1}$, n – кількість включень); $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n+1}\Omega_i$ – область визначення змінних x та y; γ – границя області Ω, вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності p.

Метод розв'язування. Вихідну варіаційну задачу для функціонала (1) розв’язано за допомогою МСЕ [18]. Ключова ідея цього методу при аналізі поведінки конструкції полягає у наступному: суцільне середовище (конструкція у цілому) моделюється шляхом розбиття її на області (скінченні елементи), у кожній з яких поведінка середовища описується за допомогою окремого набору обраних функцій, що представляють напруження й переміщення в зазначеній області. Ці набори функцій часто задаються в такій формі, щоб задовольнити умовам неперервності описуваних ними характеристик у всьому середовищі. Якщо поведінка конструкції описується єдиним диференціальним рівнянням, то одержати наближений розв’язок цього рівняння можна як за допомогою

МСЕ, так і за допомогою техніки розкладання в ряди або скінченно-різницевих схем. Якщо ж конструкція в цілому неоднорідна й складається з великої кількості окремих конструктивних елементів, поведінка кожного з яких описується своїм диференціальним рівнянням, то в цьому випадку, як правило, безпосередньо застосовують лише МСЕ.

Згідно з методикою МСЕ для отримання числового розв'язку прикладних задач механіки конструкцій потрібно будувати й розв'язувати систему алгебричних рівнянь. Переваги методу полягають у зручності формування рівнянь і можливості представлення зовсім нерегулярних і складних конструкцій і умов навантаження. Завдяки цьому методу можна відображати реальні аспекти, що виникають у прикладних задачах проєктування. Даний метод реалізований у великих універсальних комп'ютерних пакетах програм: NASTRAN, ANSYS, Solid Works та ін., що мають широке застосування.

Розрахунки здійснені при застосуванні ізопараметричних трикутних (шестивузлових) лагранжевих скінченних елементів другого степеня, при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимовано квадратичним поліномом. В областях концентрації напружень використовували адаптивну сітку з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10 (рис. 2).



а) б)

Рис. 2 **– Фрагменти адаптивної скінченноелементної сітки навколо отворів: а) еліптичних; б) кругових**

Числовий аналіз. Наведемо отримані результати числових розрахунків для двох моделей задач: для однорідних і кусково-однорідних пластин з двома отворами.

Модель однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами. Результати для ізотропних прямокутних пластин (розмірами 0,3×0,3 *м*) з двома однаковими круговими отворами радіусу R=0,02 *м* та двома однаковими еліптичними отворами (a=0,02 *м*, b=0,04 *м*), з матеріалу сталь (E_1 = 210 *ГПа*, v_1 = 0,3), що знаходяться під дією рівномірного одновісного навантаження розтягу p=10 *МПа*, подано у табл. 1.

Таблиця 1 **– Порівняння результатів для однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами**

Відстань між отворами	ККН		Відхилення Δ, %
	Кругові отвори	Еліптичні отвори	
l=3*a*	3,5	2,8	-20,9
l=4*a*	3,3	2,3	-30,3

Тут Δ – відхилення ККН однорідної пластини з двома еліптичними отворами від відповідного значення ККН однорідної пластини з двома круговими отворами у разі фіксованої відстані *l* між їх центрами.

З результатів, наведених у табл. 1, видно:

1) ККН однорідної пластини з двома еліптичними отворами менше ніж ККН відповідної пластини з двома круговими отворами (на ~20–30%);

2) відхилення ККН зростає зі зростанням відстані між отворами: якщо відстань між отворами *l*=4*a,* то відхилення буде більше на ~10% у порівнянні з випадком для *l*=3*a*.

Модель кусково-однорідної пластини з двома круговими та еліптичними отворами. Розглядаються ізотропні прямокутні пластини (розмірами 0,3×0,3 *м*) з двома круговими отворами радіусу *R*=0,02 *м* та двома еліптичними отворами (*a*=0,02 *м*, *b*=0,04 *м*) з матеріалу сталь (E_1=210 *ГПа*, v_1 =0,3), матеріал центральної вставки – алюміній (E_2 = 70 *ГПа*, v_2 = 0,36), ширина вставки *h*=2*R* (*h*=2*b*).

Результати порівняння концентрації напружень навколо отворів для відстаней *l*=3*a* і *l*=4*a* між центрами отворів наведено у табл. 2.

Таблиця 2 **– Порівняння результатів для кусково-однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами для *h*=2*R* (*h*=2*b*)**

Відстань між отворами	ККН		Відхилення Δ, %
	Кругові отвори (*h*=2*R*)	Еліптичні отвори (*h*=2*b*)	
l=3*a*	3,04	2,43	-20,1
l=4*a*	2,73	2,04	-25,3

Тут Δ – відхилення ККН кусково-однорідної пластини з двома еліптичними отворами від ККН відповідної кусково-однорідної пластини з двома круговими отворами у разі фіксованої відстані *l* між їх центрами.

З результатів, наведених у табл. 2, випливає:

1) ККН кусково-однорідної пластини з двома еліптичними отворами (*h*=2*b*) менше ніж ККН відповідної пластини (*h*=2*R*) з двома круговими отворами (на ~20–25%);

2) відхилення ККН зростає зі зростанням відстані між отворами: якщо відстань між отворами *l*=4*a,* то відхилення буде більше на ~5% у порівнянні з випадком для *l*=3*a*.

У разі «м'якої» вставки ширини *h*<2*R* (*h*<2*b*) концентрація напружень навколо отворів набуває значень, наведених у табл. 3.

З результатів, наведених у табл. 3, випливає:

1) ККН кусково-однорідної пластини з двома еліптичними отворами (*h*<2*b*) менше ніж ККН відповідної пластини (*h*<2*R*) з двома круговими отворами для випадку *h*=*b* (на ~11–17%);

2) відхилення ККН зменшується зі зростанням відстані між отворами: якщо відстань між отворами l=3a, то відхилення буде більше на ~5% у порівнянні з випадком для l=4a.

Таблиця 3 **– Порівняння результатів розрахунку ККН для кусково-однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами для $h<2R$ ($h<2b$)**

Відстань між отворами	ККН				Відхилення Δ, %	
	Кругові отвори ($h<2R$)		Еліптичні отвори ($h<2b$)			
	h=1,5R	h=R	h=1,5b	h=b	h=1,5R (h=1,5b)	h=R (h=b)
l=3a	3,0	2,9	2,40	2,41	-20,0	-16,9
l=4a	2,6	2,4	3,08	**2,13**	18,5	-11,3

У разі «м'якої» вставки ширини $h>2R$ ($h>2b$) концентрація напружень навколо отворів набуває значень, наведених у табл. 4.

Таблиця 4 **– Порівняння результатів розрахунку ККН для кусково-однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами для $h>2R$ ($h>2b$)**

Відстань між отворами	ККН				Відхилення Δ, %	
	Кругові отвори ($h>2R$)		Еліптичні отвори ($h>2b$)			
	h=3R	h=4R	h=3b	h=4b	h=3R (h=3b)	h=4R (h=4b)
l=3a	3,12	3,22	2,60	2,8	-16,6	-13,0
l=4a	2,92	3,04	2,23	2,3	-23,6	-24,3

З результатів, поданих у табл. 4, видно:

1) ККН кусково-однорідної пластини з двома еліптичними отворами ($h>2b$) менше ніж ККН відповідної пластини ($h>2R$) з двома круговими отворами для випадку h=3b (на ~17–23%);

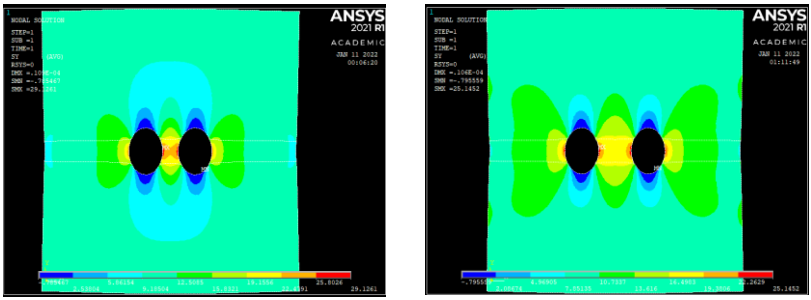
2) відхилення ККН збільшується зі зростанням відстані між отворами: якщо відстань між отворами l=4a, то відхилення буде більше на ~7–11% у порівнянні з випадком l=3a.

У табл. 5. наведено результати порівняння величини ККН однорідних і кусково-однорідних пластин з двома круговими отворами для усіх розглянутих випадків ширини вставки і величини відстані між отворами.

Таблиця 5 **– Результати розрахунку коефіцієнта концентрації напружень у пластині з двома круговими отворами**

Відстань між центрами отворів, l	Однорідна пластина з двома круговими отворами, ККН	Кусково-однорідна пластина з «м'якою» вставкою ширини h, ККН				
		h=R	h=1,5R	h=2R	h=3R	h=4R
3R	3,54	2,91	3,00	3,04	3,12	3,22
4R	3,28	**2,51**	2,62	2,73	2,92	3,04

З табл. 5 видно, що ширина «м'якої» вставки значно впливає на ККН пластини з круговими отворами: найкращим з точки зору зменшення ККН тут виявився варіант при $h=R$ і $l=4R$. У цьому випадку «м'яка» вставка дозволяє зменшити ККН на ~23%.



а) б)

Рис. 3 – **Розподіл напружень σ_y в пластині з двома круговими отворами і центральною вставкою ширини $h=R$: а) для $l=3R$; б) для $l=4R$**

У табл. 6. наведено аналогічні результати для однорідних і кусково-однорідних пластин з двома еліптичними отворами.

Таблиця 6 **– Результати розрахунку коефіцієнта концентрації напружень у пластині з двома еліптичними отворами**

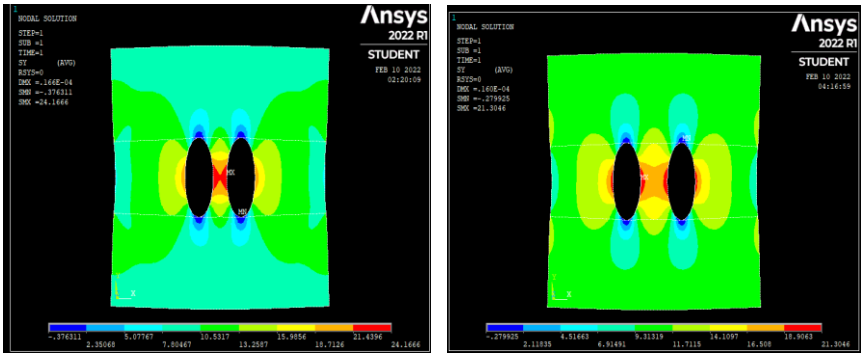
Відстань між центрами отворів, *l*	**Однорідна пластина з двома еліптичними отворами, ККН**	**Кусково-однорідна пластина з «м'якою» вставкою ширини h, ККН**				
		h=b	**h=1,5b**	**h=2b**	**h=3b**	**h=4b**
3*a*	2,8	2,43	2,4	2,41	2,59	2,75
4*a*	2,3	2,03	2,08	2,13	2,23	2,30

З табл. 6 видно, що ширина «м'якої» вставки також суттєво впливає на ККН пластини з еліптичними отворами: найкращим з точки зору зменшення ККН тут виявився варіант при $h=b$ і $l=4a$. У цьому випадку «м'яка» вставка дозволяє зменшити ККН на ~11%.

У табл. 7 наведено результати розрахунків для кусково-однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами при однаковій ширині вставки.

Таблиця 7 **– Порівняння результатів розрахунку ККН для кусково-однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами при однаковій ширині вставки**

Відстань між отворами	**ККН**						**Відхилення Δ, %**		
	Кругові отвори			**Еліптичні отвори**					
	I	**II**	**III**	**I**	**II**	**III**	**I**	**II**	**III**
	h=2R	*h=3R*	*h=4R*	*h=b*	*h=1,5b*	*h=2b*			
l=3a	3,04	3,12	3,22	2,43	2,40	2,41	-20,1	-23,1	-25,2
l=4a	**2,73**	2,92	3,04	**2,04**	2,08	2,13	-25,3	-28,8	-29,9



а) б)

Рис. 4 – **Розподіл напружень σ_y в пластині з двома еліптичними отворами і центральною вставкою ширини *h*=*b*: а) для *l*=3*a*; б) для *l*=4*a***

З табл. 7 видно, що ширина «м'якої» вставки, а також відстань між отворами значно впливають на ККН пластин з круговими та еліптичними отворами:

1) зі зростанням відстані між отворами ККН зменшується;

2) ККН в кусково-однорідній пластині з еліптичними отворами і «м'якою» вставкою менше, ніж у відповідній пластині з круговими отворами (на ~20–30%);

3) найкращим з точки зору зменшення ККН при однаковій ширині вставки тут виявився варіант (**I)** при *l*=4*a*, при цьому відхилення ККН ~25%.

Висновки. В результаті проведених досліджень НДС пружних кусково-однорідних пластин з двома круговими та еліптичними отворами, розташованими на певній відстані між собою, можна зробити наступні висновки:

- ККН навколо отворів в пластині безпосередньо залежить від кількості, конфігурації і способу розташування отворів у пластині: збільшення відстані між отворами призводить до зменшення величини ККН як для однорідної пластини, так і для кусково-однорідної з двома круговими або еліптичними отворами;
- у порівнянні з однорідною пластиною з одним малим центральним круговим отвором (задача Кирша, ККН=3) наявність другого кругового отвору, розташованого поряд на певній відстані вздовж осі Ox, призводить до збільшення величини ККН (табл. 5);
- ККН значно залежить від механічних характеристик матеріалу включення (вставки), а також від його ширини: за наявності «м'якого» центрального включення вдається зменшити величину ККН до ~25% (табл. 5, табл. 6);

• ККН залежить від ширини *h* вставки з іншого матеріалу. Менша із розглянутих варіантів величина *h* «м'якого» включення виявилася найкращою з точки зору зменшення ККН для обох видів отворів;

• при фіксованій ширині «м'якої» вставки ККН зменшується при збільшені відстані між центрами двох кругових та еліптичних отворів;

• виявляється, що ККН у пластині з двома еліптичними отворами дещо менше ніж у відповідній пластині з двома круговими отворами (табл. 7).

Таким чином, за рахунок певної комбінації сполучень матеріалу кусково-однорідної пластини можна впливати на величину ККН навколо кругових та еліптичних отворів в пластинах.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. ***Вайнберг Д. В.*** Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек: Справочное пособие. К.: Техника, 1969. 220 с.

2. ***Гарт Е. Л.***, *Бейцун В. С.* Напружено-деформований стан у двофазному композиційному матеріалі з урахуванням впливу перехідного шару між включенням і матрицею // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2018. Вип. 28. С. 34–44. https://pommk.dp.ua/index.php/journal/issue/view/17

3. ***Гарт Е. Л.***, *Семенча О. О.* Числове дослідження напружено-деформованого стану пружної трапецієвидної пластини з прямокутним отвором і стрічковим включенням // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2021. Вип. 33. С. 43–54. https://doi.org/10.15421/4221004.

4. ***Гарт Е. Л.,*** *Терьохін Б. І.* Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра. 2019. Вип. 30. С. 19–32.

5. ***Космодамианский А. С.*** Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. К.: Вища школа, 1975. 236 с.

6. ***Савин Г. Н.*** Распределение напряжений около отверстий. К.: Наукова думка, 1968. 888 с.

7. ***Савин Г. Н.***, *Тульчий В. И.* Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. К.: Наукова думка, 1971. 268 с.

8. ***Тимошенко С. П.,*** *Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

9. ***Gudramovich V. S.***, *Gart É. L., Strunin K. A.* Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. 2017. Vol. 52, Iss. 6. P. 768–774.

10. ***Haque A.***, *Ahmed L., Ramasetty A.* Stress concentrations and notch sensitivity in woven ceramic matrix composites containing a circular hole – an experimental, analytical, and finite element study // J. Amer. Ceramic Soc. 2005. Vol. 88, No. 8. P. 2195–2201.

11. ***Hart E. L.***, *Hudramovich V. S.* Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80, Iss. 2. P. 156–163.

12. ***Hart E. L.,*** *Hudramovich V. S.* Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in the problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // J. Math. Sci. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05285-7

13. ***Hart E. L.***, *Hudramovich V. S.* Application of the projection-iterative version of the local variation method to stability problems for spherical shells under localized loads // Mathematical and computer modelling of engineering systems : Collective monograph / In edition by Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine V. S. Hudramovich. – Riga, Latvia: Publishing House "Baltija Publishing", 2020. 158 p. 89-Chapter Manuscript-4793-1-10-20210216. P. 50–60. https://doi.org/10.30525/978-9934-26-019-3-4

14. ***Hart E. L.**, Hudramovich V. S.* Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // Strength of materials and theory of structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2022. Iss. 108. P. 77–86. http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-108/05-108_hart_hudramovich.pdf

15. ***Hart E. L.**, Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion // Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. 2021. Vol. 29, Iss. 1. P. 42–53. https://doi.org/10.15421/142103

16. ***Hudramovich V. S**, Hart E. L, Marchenko O. A.* Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure // Strength of Materials. 2021. Vol. 52, No. 6. P. 832–842. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7

17. ***Mohammadi M.**, Dryden J. R., Jiang L.* Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate // Intern. J. Solids Structures. 2011. Vol. 48. P. 483–491.

18. ***Zienkiewicz O. C.,** Taylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

UDC 539.3

E. L. Hart, Dr. Sci. (Phys.-Math.)
ORCID ID: 0000-0002-6075-2269

Ye. A. Potseluiko

COMPUTER SIMULATION OF BEHAVIOR OF PIECEWISE HOMOGENEOUS PLATES WITH TWO CIRCULAR AND ELLIPTICAL HOLES

Computer simulation of the behavior of thin elastic piecewise homogeneous rectangular plates with two centrally located circular and elliptical holes under the action of an uniaxial tensile load has been carried out. Using the finite element method, the influence of mechanical and geometric parameters of an insert made of another material, the configuration and location of holes on the stress concentration around them is investigated. A comparative analysis of the obtained stress concentration reduction results with results for corresponding homogeneous plates has been carried out.

Keywords: *elastic piecewise homogeneous plate; circular holes; elliptical holes; stress concentration factor; finite element method.*

Introduction. Plate-shell structural elements are widely used in various branches of technology, energy, construction, etc. However, materials that are homogeneous in structure are not always used. They may contain such features as holes, cracks, layers of foreign media, foreign elements (inclusions) of different composition and size. These defects are not only cracks, but also arbitrary inhomogeneities of the material, primarily thin-walled ones, so they are powerful stress concentrators. The problem of determining stress concentrations near holes in plates subjected to external pressure is an extremely important class of engineering problems [1, 5–8, 10, 17].

The most effective methods for solving this class of problems include variational-grid methods, in particular, the finite element method (FEM) [18], as well as its projection-iterative implementation schemes [2–4, 9, 11–16], which allow significantly to reduce the cost of computer time of calculations

and accelerate the convergence of the process of obtaining a numerical solution to the problem.

In this work, FEM is used to study the stress-strain state of piecewise homogeneous elastic plates with two holes (circular and elliptical), with a central insert made of another material under given boundary conditions in stresses (uniaxial tension). The influence of the choice of material and the width of the insert (inclusion), as well as the distance between the holes and their configuration on the stress concentration in the plates, is studied.

Numerical analysis. The stress-strain state (SSS) of elastic thin piecewise homogeneous isotropic rectangular plates of thickness H, dimensions $l_1 \times l_2$ with two identical circular holes of radius R and identical elliptical holes (a, b are the minor and major semi-axes of the ellipse of the corresponding) located in the center of the plates along the Ox axis at a distance l between their centers. The plates have a central insert (inclusion) of width h made of another material and are under the action of an uniaxial uniform tensile load $p=const$, which does not lead to the appearance of plastic deformations.

The following are studied: 1) the influence of the insert width h on the value of the stress concentration factor (SCF) for different values of the distance between the holes (l=3a; 4a) for the following cases:

a) *plate with circular holes*: $h = 2R$; $h > 2R$ ($h = 3R$; $4R$); $h < 2R$ ($h = 1.5R$; R), where h is the width of the insert made of a material with mechanical properties E_2, v_2;

b) *plate with elliptical holes*: $h = 2b$; $h > 2b$ ($h = 3b$; $4b$); $h < 2b$ ($h = 1.5b$; b);

2) SSS of homogeneous and piecewise homogeneous plates with two circular and elliptical holes, depending on the distance l between the holes and the width of the insert h in terms of the most dangerous and most expedient configurations to reduce the SCF value.

It is accepted in the calculations: plate dimensions $l_1 = l_2 = 0.3$ m; circular hole radius R=0.02 m; dimensions of the elliptical hole (a=R=0.02 m, b=0.04 m); plate material is steel (E_1 = 210 GPa, v_1 = 0.3); insert material is aluminium (E_2 = 70 GPa, v_2 = 0.36); insert width h: 1) h=2b=0.08 m; 2) $h > 2b$=0.12 m; 0.16 m; 3) h<2b=0.04 m; 0.06 m; tensile load p = 10 MPa.

It was found that the width of the "soft" insert, as well as the distance between the holes, have a significant effect on the SCF of plates with circular and elliptical holes:

1) with an increase in the distance between the holes, the SCF decreases;

2) SCF in a piecewise homogeneous plate with elliptical holes and a “soft” insert is less than in the corresponding plate with circular holes (by ~20–30%);

3) the best option from the point of view of reducing the SCF with the same width of the insert here turned out to be the option at l=4a (h=2R), while the deviation of the SCF is ~25%.

Conclusions. As a result of the studies of the SSS of elastic piecewise homogeneous plates with two circular and elliptical holes located at a certain distance between them, the following conclusions can be drawn:

• SCF around the holes in the plate directly depends on the number, configuration and arrangement of the holes in the plate: an increase in the distance between the holes leads to a decrease in the SCF value both for a

homogeneous plate and for a piecewise-homogeneous one with two circular or elliptical holes;

• Compared to a homogeneous plate with one small central circular hole (Kirsch problem, SCF=3), the presence of a second circular hole located side by side at a certain distance along the *Ox* axis leads to an increase in the SCF value;

• SCF significantly depends on the mechanical characteristics of the inclusion (insert) material, as well as on its width: in the presence of a “soft” central inclusion, it is possible to reduce the SCF value to ~25%;

• SCF depends on the width h of the insert made of another material. The smaller value h of the “soft” inclusion among the options considered turned out to be the best in terms of reducing the SCF for both types of holes;

• with a fixed width of the "soft" insert, the SCF decreases with an increased distance between the centers of two circular and elliptical holes;

• it turns out that the SCF in a plate with two elliptical holes is somewhat less than in the corresponding plate with two circular holes.

Thus, due to a certain combination of connections of the material of a piecewise homogeneous plate, it is possible to influence the magnitude of the SCF around circular and elliptical holes in the plates.

REFERENCES

1. ***Weinberg D. V.*** Stress concentration in plates near holes and fillets: Reference book. Kiev: Tekhnika, 1969. 220 p. (in Russian).
2. ***Hart E. L.****, Beitsun V. S.* Stress-strain state in a two-phase composite material, taking into account the effect of the transition layer between the inclusion and the matrix // Problems of computational mechanics and strength of structures: Col. of sci. art. Dnipro: Lira, 2018. Vol. 28. P. 34–44. https://pommk.dp.ua/index.php/journal/issue/view/17 (in Ukrainian).
3. ***Hart E. L.****, Semencha O. O.* Numerical investigation of the stress-strain state of elastic trapezoidal plate with rectangular hole and tape inclusionmatrix // Problems of computational mechanics and strength of structures: Col. of sci. art. Dnipro: Lira, 2021. Vol. 33. P. 43–54. https://doi.org/10.15421/4221004 (in Ukrainian).
4. ***Hart E. L***., *Terokhin B. I.* Choice of rational parameters of reinforcement elements in computer simulation of behavior of a cylindrical shell with two rectangular holes // Problems of computational mechanics and strength of structures: Col. of sci. art. Dnipro: Lira, 2019. Vol. 30. P. 19–32. https://doi.org/10.15421/4219024 (in Ukrainian).
5. ***Kosmodamianskiy A. S.*** Plane problem of elasticity theory for plates with holes, notches and protrusions. Kiev: Vishcha shkola, 1975. 236 p. (in Russian).
6. ***Savin G. N.*** Stress distribution around holes. Kiev: Naukova dumka, 1968. 888 p. (in Russian).
7. ***Savin G. N***., *Tulchiy V. I.* Plates reinforced with compound rings and elastic pads. Kiev: Naukova dumka, 1971. 268 p. (in Russian).
8. ***Timoshenko S. P.,*** *Goodier J. N.* Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1975. 576 p. (in Russian).
9. ***Gudramovich V. S.***, *Gart É. L., Strunin K. A.* Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // Materials Science. 2017. Vol. 52, Iss. 6. P. 768–774.
10. ***Haque A.****, Ahmed L., Ramasetty A.* Stress concentrations and notch sensitivity in woven ceramic matrix composites containing a circular hole — an experimental, analytical, and finite element study // J. Amer. Ceramic Soc. 2005. Vol. 88, No. 8. P. 2195–2201.
11. ***Hart E. L.****, Hudramovich V. S.* Projection-iterative modification of the method of local variations for problems with a quadratic functional // J. Appl. Math. Mech. 2016. Vol. 80, Iss. 2. P. 156–163.

12. ***Hart E. L.,*** *Hudramovich V. S.* Projection-iterative schemes for the implementation of variational-grid methods in the problems of elastoplastic deformation of inhomogeneous thin-walled structures // J. Math. Sci. 2021. Vol. 254, No. 1. P. 21–38. https://doi.org/10.1007/s10958-021-05285-7

13. ***Hart E. L.,*** *Hudramovich V. S.* Application of the projection-iterative version of the local variation method to stability problems for spherical shells under localized loads // Mathematical and computer modelling of engineering systems : Collective monograph / In edition by Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine V. S. Hudramovich. Riga, Latvia: Publishing House "Baltija Publishing", 2020. 158 p. 89-Chapter Manuscript-4793-1-10-20210216. P. 50–60. https://doi.org/10.30525/978-9934-26-019-3-4

14. ***Hart E. L.,*** *Hudramovich V. S.* Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // Strength of materials and theory of structures: Scientific-and-technical collected articles. Kyiv: KNUBA, 2022. Iss. 108. P. 77–86. http://opir.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-108/05-108_hart_hudramovich.pdf

15. ***Hart E. L.,*** *Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion // Journal of Optimization, Differential Equations and their Applications. 2021. Vol. 29, Iss. 1. P. 42–53. https://doi.org/10.15421/142103

16. ***Hudramovich V. S****, Hart E. L, Marchenko O. A.* Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure // Strength of Materials. 2021. Vol. 52, No. 6. P. 832–842. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7

17. ***Mohammadi M.,*** *Dryden J. R., Jiang L.* Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate // Intern. J. Solids Structures. 2011. Vol. 48. P. 483–491.

18. ***Zienkiewicz O. C.,*** *Taylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. New York: Elsevier, 2005. 632 p.

Дніпровський національний
університет імені Олеся Гончара,
Дніпро, Україна

Надійшла до редколегії 27.06.2022