

УДК 539.3

А. А. Дисковский, д-р техн. наук, А. А. Косиченко, канд. техн. наук,  
Рыбальченко Л. В., канд. эконом. наук

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО СТЕРЖНЯ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ

Оптимизация внутренней структуры шарнирно опертого функционально-градиентного двухкомпонентного стержня в задаче устойчивости проводится на основе метода гомогенизации. Целевая функция – распределение величин включений по длине стержня находится в классе кусочно-непрерывных функций. Рассмотренный пример показал увеличение критической нагрузки на 20% по сравнению со стержнем регулярной структуры.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный стержень, функционально-градиентный материал, включение, устойчивость, гомогенизация, оптимизация.

**Введение.** Для расчета конструкций из функционально-градиентного материала (ФГМ), как правило, применяют различные варианты методы конечных элементов (МКЭ) [3]. Но оптимизация внутренней структуры ФГМ с помощью МКЭ вызывает значительные вычислительные трудности, поскольку требует больших серий решений прямых задач. Для регулярных композитов альтернативой МКЭ служит метод гомогенизации [2]. В задачах устойчивости этот метод применялся в [4]. В [1] для расчета и оптимизации ФГ конструкций была предложена модификация метода гомогенизации, ниже эта модификация применяется для оптимизации внутренней структуры ФГМ стержня в задачах устойчивости.

**Постановка задачи.** В качестве примера оптимизации ФГМ конструкции рассмотрим задачу устойчивости ФГ двухкомпонентного стержня с включениями переменной величины (рис. 1).

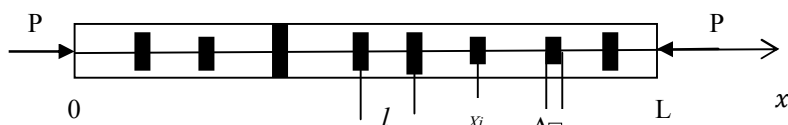


Рис. 1 – ФГ двухкомпонентный стержень:

$l = const$  – шаг между включениями;  $\Delta = const$  – длина включения;  
 $x_i$  – координата  $i$ -го включения,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n$  – количество включений;  
 $V(X_i)$  – объем  $i$ -го включения;  $P$  – сжимающие усилия

Модуль упругости двухкомпонентного стержня (рис. 1) представим в виде

$$E = E_m \left( 1 + k\Phi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right),$$

где  $E_m$  и  $E_v$  – модули упругости материала матрицы и включений;  $k = E_v/E_m$ ,  $x = X/L$ ;  $k = k(x)$  определяет закон изменения величины включений и представляет собой целевую функцию в задаче оптимизации структуры ФГМ;  $\Phi(x/\varepsilon)$  – периодическая функция с периодом  $\varepsilon = (l + \Delta)/L$ , при этом, как правило, на практике число включений велико, поэтому  $\varepsilon \ll 1$ .

Установим интервал возможных изменений целевой функции  $k = k(x)$ . Очевидно, что если материал включений более жесткий, чем материал матрицы, то  $k(x) \geq 0$ ; если менее жесткий или включения представляют собой полости, то  $k(x) \leq 0$ . Условие  $k(x_i) = 0$  означает, что  $i$ -е включение отсутствует. В дальнейшем ограничимся случаем  $k(x) \geq 0$ . Тогда в качестве верхней границы интервала изменения  $k(x)$  можно принять значение  $k_{max}$ , при котором возможна локальная, между включениями, потеря устойчивости стержня.

Рассмотрим шарнирно закреплённый ФГ двухкомпонентный стержень, сжимаемый силами  $P$ , приложенными к его концам (рис.1). Ограничимся рассмотрением малых деформаций и исследуем устойчивость, применяя статический метод Эйлера, оставаясь в рамках линейной теории упругости. Для вычисления минимального значения критической силы потери устойчивости используем вариационный принцип Рэлея. Кроме того, примем, что рассматриваемые распределения управляющей функций  $k(x)$  симметричны относительно точки  $x = 1/2$ .

**Метод решения.** Запишем основные соотношения задачи оптимального распределения величины включений  $k = k(x)$  по длине стержня, обеспечивающего максимизацию силы потери устойчивости  $P$ :

$$u_{xx} + a^{-1}pu = 0; \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0; \quad (2)$$

$$\int_0^1 k(x) dx = V; \quad p \rightarrow \max_k, \quad (3)$$

где  $u(x)$  – отклонение изогнутой оси стержня от линии действия сжимающих сил;  $a(x) = \left( 1 + k(x)\Phi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right)$ ;  $p = P/E_m I$ ,  $I$  – момент инерции поперечного сечения стержня;  $V$  – суммарный объем включений.

Для  $\varepsilon \ll 1$  задачу (1) – (3) можно упростить с помощью метода двумерной гомогенизации [1].

Следуя методу гомогенизации, введем в рассмотрение переменную

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad (4)$$

которую будем считать независимой от  $x$ , тогда оператор дифференцирования запишется в виде

$$(\dots)_x = (\dots)_x + (\dots)_\xi. \quad (5)$$

Прогиб  $u$  и собственное значение  $p$  представим в виде асимптотических разложений

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, \xi); \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n, \quad (6)$$

где  $u_s(x, \xi)$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  – периодические по  $\xi$  функции с периодом  $\varepsilon$ .

Подставим выражения (5) – (6) в уравнение (1) и проведем его асимптотическое расщепление по степеням  $\varepsilon$ . В результате с учетом граничных условий (2) получаем

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x); \quad u_1 = u_1(x); \\ u_{1\xi\xi} + u_{0xx} + \alpha^{-1}(x, \xi)p_0 u_0 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Проинтегрируем по  $\xi$  от 0 до 1 уравнение (7) с учетом периодичности по  $\xi$  составляющей разложения  $u_1(x, \xi)$ . В результате задачу максимизации силы потери устойчивости для нулевого приближения можно записать в виде

$$u_{0xx} + p_0 \alpha^{-1} u_0 = 0; \quad (8)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0; \quad (9)$$

$$\int_0^1 k(x) dx = V; \quad p_0 \rightarrow \max_k; \quad (10)$$

где  $\alpha(x) = \left( \int_0^1 (1 + k(x)\Phi(\xi))^{-1} d\xi \right)^{-1}$ .

Задача на собственные значения (8), (9) описывает потерю устойчивости гомогенизированного ФГ двухкомпонентного стержня (рис.1) у которого жесткости включений непрерывным образом распределены по всей длине стержня согласно закону изменения величины включений.

Получение условия стационарности для задачи (8) – (10) основывается на стандартных рассматриваниях [5]. Умножая уравнение (8) на  $u_0$  и интегрируя с учетом граничных условий (9), получаем отношение Рэлея

$$p_0 = \frac{\int_0^1 u_{0x}^2 dx}{\int_0^1 \alpha^{-1} u_0^2 dx}. \quad (11)$$

Из отношения (11) следует, что наименьшее собственное число уравнения (8) равно минимуму функционала

$$p_0 = \int_0^1 u_{0x}^2 dx \quad (12)$$

при дополнительном условии

$$\int_0^1 \alpha^{-1} u_0^2 dx = 1. \quad (13)$$

Составляем расширенный функционал Лагранжа, присоединяя к функционалу (12) ограничения (10), (13) с помощью множителей  $\lambda_1, \lambda_2$

$$J = \int_0^1 u_{0x}^2 dx + \lambda_1 \left( \int_0^1 \alpha^{-1} u_0^2 dx - 1 \right) + \lambda_2 \left( \int_0^1 k(x) dx - V \right). \quad (14)$$

Приравнявая выражение для первой вариации  $\delta J = 0$ , обусловленной варьированием переменной проектирования  $k(x)$ , получаем условие стационарности

$$u_0^2 = \lambda \alpha^2 \alpha_k^{-1}, \quad (15)$$

где  $\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$ .

Учет условия стационарности (15) приводит к корректной краевой задаче, которая позволяет определить переменную проектирования  $k(x)$  и составляющие разложений (6)  $-u_0(x); p_0$ .

Ограничение для переменной проектирования приводит к тому, что условие стационарности (15) должно выполняться, с учетом симметрии относительно точки  $x = 1/2$  при  $x_* \leq x \leq 1/2$ , где  $a(x) > 1$ , а при  $0 \leq x \leq x_*$  функция  $a(x) = 1$ . Последнее условие означает, что на участке  $0 \leq x \leq x_*$  включения отсутствуют. Для определения координаты  $x_*$  используются условия кинематической допустимости формы потери устойчивости – условия непрерывности функций  $u_0(x), u_{0x}(x)$  в точке  $x = x_*$

$$u_0^- = u_0^+; \quad u_{0x}^- = u_{0x}^+, \quad (16)$$

где  $(\dots)^- = \lim_{x \rightarrow x_* - 0} (\dots)$ ;  $(\dots)^+ = \lim_{x \rightarrow x_* + 0} (\dots)$ .

**Пример оптимизации.** Поскольку при использовании метода гоменизации усредняется податливость – обратная величина модуля упругости, естественно представить коэффициент  $a(x)$  в виде разложения Фурье его обратной величины  $a^{-1}$ . Ограничиваясь в этом разложении двумя слагаемыми, будем иметь

$$a = \frac{1}{\rho - z^2(x) \sin^2 2\pi n x}, \quad (17)$$

где  $\rho$  – определяет жесткость материала матрицы;  $z^2(x)$  – жесткость включений.

Для осредненного коэффициента (17) условие сохранения общего объема включений запишется в виде

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\rho - z^2} dx = v - const. \quad (18)$$

Уравнение состояния и условие стационарности, соответственно, будут:

$$u_{0xx} + p_0(\rho - z^2)u_0 = 0; \quad (19)$$

$$z \left( u_0^2 + \frac{2\lambda}{(\rho - z^2)^2} \right) = 0. \quad (20)$$

Из условия стационарности (20) следует, что

$$\rho - z^2 = \begin{cases} \rho, & x \in [0, x_*]; \\ \frac{\sqrt{2\lambda}}{u_0}, & x \in [x_*, 1/2]. \end{cases} \quad (21)$$

Подставляя выражение (21) в (19), получаем уравнение для определения функции управления  $z^2(x)$  на интервале  $[x_*, 1/2]$

$$\left(\frac{1}{\rho - z^2}\right)_{xx} + p_0 = 0. \quad (22)$$

Подставляя выражение (21) в условия (9), (16), получаем граничные условия для уравнения (22)

$$z(x_*) = 0; \quad z_x(1/2) = 0. \quad (23)$$

Интегрируя уравнение (22) с учетом граничных условий (23), получаем

$$\frac{1}{\rho - z^2} = \frac{p_0}{2} (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) + \frac{1}{\alpha}, \quad (24)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{2} - x$ ;  $\bar{x}_* = \frac{1}{2} - x_*$ .

Подставляя выражение (24) в изопериметрическое условие (21), получаем

$$p_0 = \frac{3}{2} \frac{2\rho v - 1}{\rho \bar{x}_*^3}. \quad (25)$$

Для определения  $\bar{x}_*$  найдем выражения для  $u_0$  на интервалах  $[0, x_*]$  и  $[x_*, 1/2]$ . Подставляя их в условия непрерывности (16), получаем уравнение для определения зависимости размера приграничной зоны, свободной от включений  $x_*$  от суммарной величины включений  $v$

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{2\rho v - 1}{\bar{x}_*}} \sin \left( \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2\rho v - 1}{\bar{x}_*^3} \frac{1 - 2\bar{x}_*}{2}} \right) = 1. \quad (26)$$

График зависимости  $x_* = x_*(v)$ , при  $\rho = 1$ ;  $v = 1 \div 10$ , полученный на основе соответствующих численных решений уравнения (26), представлен на рис. 2.

Для оценки эффективности применения ФГМ предлагаемой оптимальной структуры определим величину критической силы  $\bar{p}_0$  потери устойчивости шарнирно закрепленного композитного стержня регулярной структуры ( $z = \text{const}$ ) при том же объеме включений. В этом случае  $\rho - z^2$

$$\bar{p}_0 = 2\pi^2 v. \quad (27)$$

На рис. 3 приведены результаты исследования эффективности применения ФГМ предлагаемой оптимальной структуры по сравнению с композитным материалом регулярной структуры на основе относительного повышения критической силы потери устойчивости

$$\delta = \frac{(p_0 - \bar{p}_0)}{\bar{p}_0} \times 100\%. \quad (28)$$

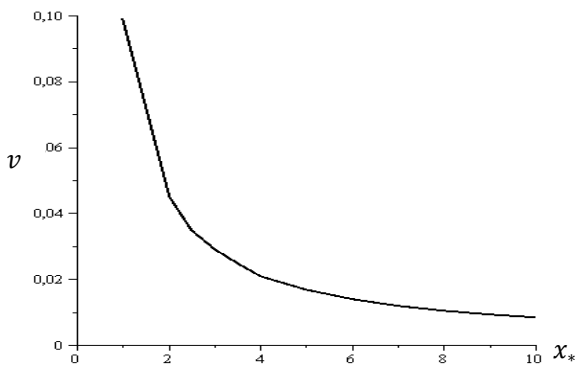


Рис. 2 – Зависимость координаты  $x_*$  от суммарной величины включений  $v$  при  $\rho = 1$ ;  $v = 1 \div 10$

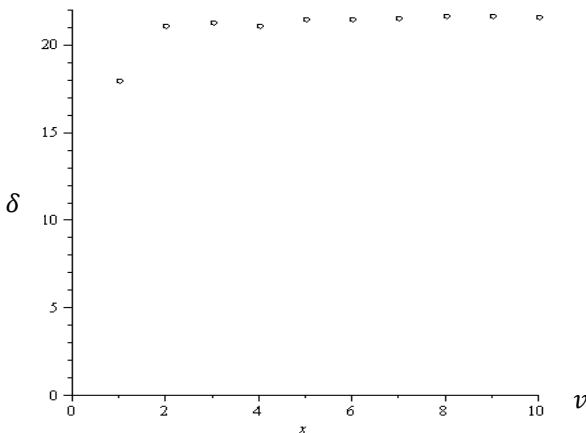


Рис. 3 – Повышение критической силы ФГМ стержня оптимальной структуры относительно критической силы двухкомпонентного стержня регулярной структуры  $\delta$  в зависимости от доли включений в общей массе стержня, при  $\rho = 1$ ;  $v = 1 \div 10$

Как видно из рис. 3, эффективность применения ФГМ оптимальной структуры, начиная с  $v = 1$ , практически не зависит от соотношения суммарной величины включений и матрицы, и изменяется в диапазоне  $21,12 \div 21,65\%$ .

На рис. 4 показана оптимальная структура ФГМ двухкомпонентного стержня при аппроксимации модуля упругости с помощью выражения (17) при  $\rho = 1$ ;  $v = 2$ .

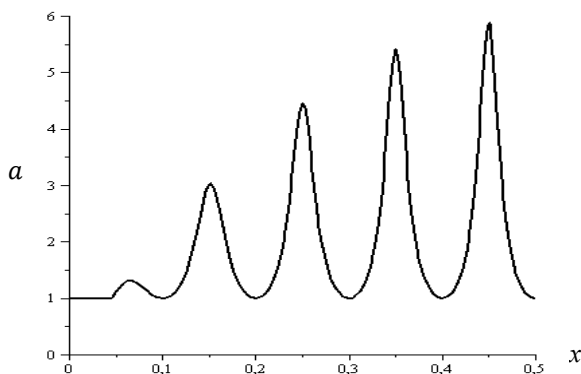


Рис. 4 – Оптимальная структура ФГМ двухкомпонентного стержня при аппроксимации модуля упругости (17)  $\rho = 1$ ;  $\nu = 2$ .

**Выводы.** На основании анализа оптимальной структуры ФГМ двухкомпонентного стержня (рис. 4) можно заключить, что оптимизация структуры включает в себя два механизма. Первый – выделение приграничных зон свободных от включений. При этом приграничные зоны стержня, свободные от включений, уменьшаются при увеличении доли суммарной величины жесткостей включений в общей жесткости стержня (рис. 2). Второй механизм оптимизации – распределение величин включений по некоторому закону. Характер оптимального распределения величин включений по длине стержня, как и ожидалось, близок к характеру оптимального распределения толщин шарнирно закрепленного стержня переменной толщины [5] – основной объем включений концентрируется в его средней части.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. **Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Diskovsky A. A.** Functionally graded rod with small concentration of inclusions: homogenization and optimization//*International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 91. P.189–197.
2. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* // North-Holland, Amsterdam. – 1978.
3. **Cadman J., Zhou Sh., Chen Y., Li Q.** On design of multi-functional microstructural materials // *Journal of Materials Science*. 2012. Vol. 48. No 1. P. 51–66.
4. **Huang Y., Li X. F.** Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity// *Journal of Engineering Mechanics*. 2010. Vol. 137. P. 73–81.
5. **Keller J. B., Niordson F.I.** The tallest column //*Journal of Mathematical Mechanics*. 1966. Vol. 16. No. 5. P. 433–446.

УДК 539.3

*О. А. Дисківський, д-р техн. наук, О. О. Косиченко, канд. техн. наук,  
Л. В. Рибальченко, канд. екон. наук*

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО СТЕРЖНЯ В ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ**

Оптимізація внутрішньої структури шарнірно опертого функціонально-градієнтного двокомпонентного стержня в задачі стійкості проводиться на основі методу гомогенізації. Цільова функція – розподіл величин включень за довжиною стержня, знаходиться в класі частково-безперервних функцій. Розглянутий приклад показав збільшення критичного навантаження на 20% у порівнянні зі стержнем регулярної структури.

*Ключові слова:* функціонально-градієнтний стержень, функціонально-градієнтний матеріал, включення, стійкість, гомогенізація, оптимізація

UDC 539.3

*A. A. Diskovsky, Dr. Sci. (Tech.), A. A. Kosichenko, PhD (Tech.),  
L. V. Rybalchenko PhD (Econ.),*

## **OPTIMAL STRUCTURAL DESIGN OF A FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL BEAM WITH A STABILITY CRITERION**

The problem of an optimized structural of the simply supported beam made from functionally graded material enabling achievement of a maximum buckling load is studied by employing the homogenization method. The target functions belong to the class of piece-wise continuous functions. The relative increase in the general buckling load of the functionally graded beam on amount of 20% in comparison to a beam with regular inclusions has been achieved.

*Keywords:* functionally graded beam, functionally graded material, inclusion, stability, homogenization, optimization

For calculation functionally graded material (FGM) design, as a rule, used the different variants of finite element method (FEM) [1]. But optimization of the internal structure FGM by means of the FEM causes the significant computing difficulties since requires the greater series of the decisions of the direct problems. For regular composition materials by alternative FEM used the homogenization method [2]. In problem of stability homogenization method was used in [3]. In [4] for calculation and optimization functionally graded (FG) design was offered modification of the homogenization method, below this modification is used for optimization of the internal structure FGM beam (Fig. 1) in problem of stability.

A simply supported FG two-component beam (Fig. 1) is considered. The beam is compressed by the forces  $P$  acting on its ends. Small deformations are assumed and the static Euler method is implemented. In order to compute the minimum value of the buckling force, the Rayleigh variation principle is employed. Since a symmetric problem with the same boundary conditions at the beam ends is considered, it is assumed that the possible distribution of the control functions  $k(x)$  and  $f'(x)$  is symmetric with respect to  $x = 0.5$ . The symmetry of the problem also implies the symmetry of the buckling form  $u(x)$  which yields  $u_x(0.5) = 0$ .



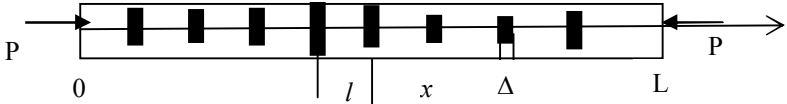


Fig. 1 – The FG two-component beam:  $l = const$  – step between inclusions;  $\Delta = const$  is the inclusion length;  $x_i$  is the coordinate of the  $i$ -th inclusion,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n$  is the number of inclusions;  $V(X_i)$  is the volume of the  $i$ -th inclusion;  $P$  – the compressing efforts

The eigen function  $u$  and the eigenvalue  $p$  can be presented in the following form

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, \xi); \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n, \quad (1)$$

where the functions  $u_s(x, \xi)$ ,  $s=0,1,2,\dots$  are periodic with respect to  $\xi$  and have the non-dimensional period 1;  $p_s = const$ . Finally, the problem regarding the maximum buckling force is recast to the following form

$$u_{0xx} + p_0 \tilde{a}^{-1} u_0 = 0; \quad (2)$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0; \quad u_{0x}(0.5) = 0; \quad (3)$$

$$\int_0^1 \tilde{a}(x) dx = v = const, \quad p_0 \rightarrow \max_{k_k}. \quad (4)$$

Where  $\tilde{a}(x) = \left( \int_0^1 a(x)^{-1} d\xi \right)^{-1}$ ,  $a(x) = \left( 1 + k(x) \Phi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right)$ ;  $p = \frac{P}{E_m l}$ ,  $I$  is the moment of inertia of the transversal beam cross-section.

The stationary conditions for the boundary value problem (2) – (4) are derived based on the standard approach reported in reference [5]. The first variation of the extended Lagrange functional, generated by variation of the variable  $k(x)$ , yields the following stationary condition

$$u_0^2 = \lambda \tilde{a}^2 \tilde{a}_k^{-1}. \quad (5)$$

The constrain  $\tilde{a}(x) \geq 1$  introduced to the design variable guarantee a satisfaction to the stationary condition (5). On the other hand, the symmetry condition regarding the point  $x = 0.5$  satisfies (5) for  $x_* \leq x \leq 0.5$ , where  $a(x) > 1$ , where as for  $0 \leq x \leq x_*$  we have  $a(x) = 1$ . The latter condition means that there is lack of inclusions in the interval  $0 \leq x \leq x_*$ . In order to find the coordinate  $x_*$ , the following kinematic conditions are formulated for the functions  $u_0(x)$ ,  $u_{0x}(x)$  at the point  $x = x_*$ :

$$u_0^- = u_0^+; \quad u_{0x}^- = u_{0x}^+. \quad (6)$$

Where  $(\dots)^- = \lim_{x \rightarrow x_* - 0} (\dots)$ ;  $(\dots)^+ = \lim_{x \rightarrow x_* + 0} (\dots)$ .

For example of optimization

$$a(x) = \frac{1}{1 - z^2(x) \sin^2(\pi n x)}, \quad (7)$$

where  $z^2(x) = k(x) < 1$ , we have

$$p_0 = \frac{3(2\nu-1)}{2\bar{x}_*^3}; \quad u_0 = C \sin \sqrt{p_0}x, \quad x \in [0, x_*];$$

$$u_0 = \sqrt{2\lambda} \left( \frac{p_0}{2} (\bar{x}_*^2 - \bar{x}^2) + 1 \right), \quad x \in [x_*, 0.5]. \quad (8)$$

The optimal structure of the FG beam quantified through  $a(x)$  governed by formula (7) is presented in Fig. 2 for fixed  $\rho = 1$  and  $\nu = 2$ .

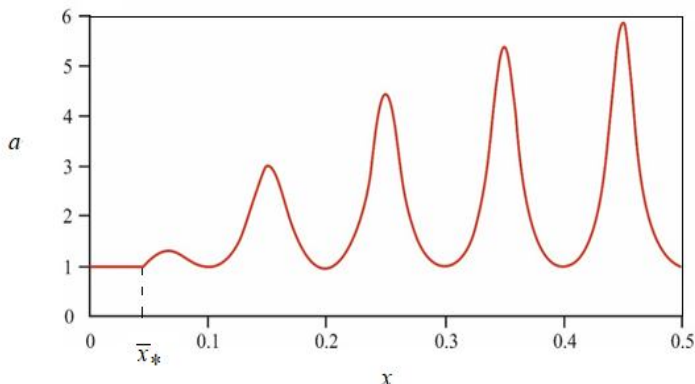


Fig. 2 – Optimized structure of FG beam ( $\nu = 2$ ) with parameter (7)

## REFERENCES

1. **Andrianov I. V., Awrejcewicz J., Diskovsky A. A.** Functionally graded rod with small concentration of inclusions: homogenization and optimization // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 91. P.189–197.
2. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** *Asymptotic Analysis for Periodic Structures* // North-Holland, Amsterdam. – 1978.
3. **Cadman J., Zhou Sh., Chen Y., Li Q.** On design of multi-functional microstructural materials // *Journal of Materials Science*. 2012. Vol. 48. No 1. P. 51–66.
4. **Huang Y., Li X. F.** Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity // *Journal of Engineering Mechanics*. 2010. Vol. 137. P. 73–81.
5. **Keller J. B., Niordson F. I.** The tallest column // *Journal of Mathematical Mechanics*. –1966. Vol. 16, No. 5. P. 433–446.

Дніпропетровський державний  
університет внутрішніх справ,  
Дніпро, Україна

Надійшла до редакції 20.10.2018