

УДК 539.3

О. В. Кудін

## СТІЙКІСТЬ ТРИШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПРИ ОСЬОВОМУ СТИСКАННІ

Розглядається задача стійкості тришарової циліндричної оболонки з нелінійно-пружним заповнювачем та ізотропними несучими шарами при дії осьового стискаючого навантаження. Приводяться рівняння рівноваги тришарової оболонки. Методом Рітца визначено значення критичного навантаження у випадку лінійно-пружного та нелінійно-пружного заповнювача.

*Ключові слова:* тришарова циліндрична оболонка, нелінійно-пружний заповнювач, метод Рітца, стійкість, осьове стискання.

**Вступ.** Тришарові елементи конструкцій широко застосовуються в авіа- та суднобудуванні, космічній промисловості, цивільному будівництві, радіоелектроніці та інших галузях промисловості.

Переважна більшість досліджень по статичі тришарових конструкцій виконано в припущенні лінійної залежності між напруженнями та деформаціями. Такі матеріали як мідь, сплав алюмінієвої бронзи, мартенівська сталь, дюралюміній, полімерні матеріали та композити вже на стадії малих деформацій відхиляються від закону пружності Гука [9]. Тобто, для таких матеріалів існує область деформацій, в якій може застосовуватись геометрична лінеаризація основних рівнянь теорії пружності, але закон пружності Гука вже не описує поведінку матеріалу з достатньою точністю. Тому актуальною залишається задача дослідження напружено-деформованого стану тришарових пластин та оболонок при врахуванні нелінійної пружності окремих шарів.

**Модель деформування циліндричної оболонки.** Розглянемо тришарову циліндричну оболонку (рис. 1). Будемо вважати, що шари оболонки виконано з ізотропних матеріалів. При цьому, для матеріалу обшивок оболонки вважається справедливим закон Гука, а заповнювач вироблено з нелінійно-пружного матеріалу, що описується законом пружності в формі Г. Каудерера [5].

Оскільки товщини обшивок  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  для тришарових конструкцій значно менші ніж товщина шару заповнювача  $h$ , для обшивок приймається гіпотеза Кірхгофа-Лява. Для заповнювача приймається гіпотеза про

лінійний розподіл тангенціальних переміщень по товщині та нестисливість матеріалу заповнювача в поперечному напрямі.

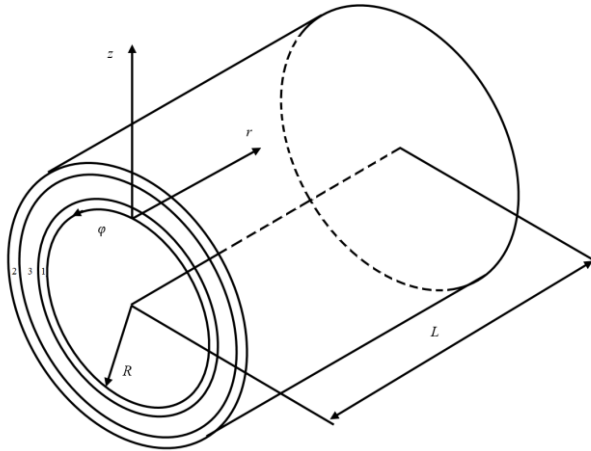


Рис. 1 – Тришарова циліндрична оболонка

Переміщення позначимо наступним чином  $u_1(r, \varphi)$ ,  $u_2(r, \varphi)$  – переміщення серединної поверхні заповнювача,  $u_3(r, \varphi)$  – прогин,  $\psi_1(r, \varphi)$ ,  $\psi_2(r, \varphi)$  – кути повороту перетинів заповнювача відносно вісей координат  $z$  та  $r$  відповідно.

Гіпотеза ламаної лінії дозволяє за допомогою переміщень середньої площини заповнювача оболонки  $u_1(r, \varphi)$ ,  $u_2(r, \varphi)$ ,  $u_3(r, \varphi)$  та кутів повороту  $\psi_1(r, \varphi)$ ,  $\psi_2(r, \varphi)$  перетинів заповнювача обчислити переміщення в будь-якій точці тришарової оболонки. Розподіл переміщень в обшивках та кути повороту нормалей можна представити наступним чином [2]:

$$\begin{aligned} u_1^i &= u_1 + c^i \psi_1 + \gamma^i \psi_1^i; \\ u_2^i &= u_2 + c^i \psi_2 + \gamma^i \psi_2^i; \\ u_3^i &= u_3; \\ \psi_1^i &= \frac{1}{\delta_1^i} \left( -\frac{1}{A_1} u_{3,1} + k_1 u_1 + k_1 c^i \right); \\ \psi_2^i &= \frac{1}{\delta_2^i} \left( -\frac{1}{A_2} u_{3,2} + k_2 u_2 + k_2 c^i \right), \end{aligned}$$

де

$$A_1 = 1; A_2 = R; k_1 = 0; k_2 = \frac{1}{R}; \gamma_1 = z - \delta_1; \gamma_2 = z - \delta_1 - h;$$

$$c^1 = -\frac{h}{2}; c^2 = \frac{h}{2}; \delta_1^1 = 1 + k_1 \delta_1; \delta_1^2 = 1 + k_1 (\delta_1 + h);$$

$$\delta_2^1 = 1 + k_2 \delta_1; \delta_2^2 = 1 + k_2 (\delta_1 + h).$$

Тут  $u_1^i(r, \varphi)$ ,  $u_2^i(r, \varphi)$ ,  $u_3^i(r, \varphi)$  – розподіл переміщень по товщині обшивок,  $\psi_1^i(r, \varphi)$ ,  $\psi_2^i(r, \varphi)$  кути повороту перетинів по товщині обшивок,  $i = 1, 2$  – номер шару обшивки згідно рис. 1.

Наведемо далі рівняння деформованого та напруженого стану оболонки.

**Деформований стан оболонки.** Деформований стан тришарової циліндричної оболонки згідно прийнятих гіпотез запишеться аналогічно рівнянням М. А. Алфутова [2].

Для зовнішніх шарів:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -(z - \delta_1)u_{3,rr} + u_{1,r} - \frac{1}{2}h\psi_{1,r}; \\ \varepsilon_\varphi &= -\frac{(z - \delta_1)}{(\delta_1 + R)^2}u_{3,\varphi\varphi} + \frac{1}{\delta_1 + R}u_{2,\varphi} - \\ &\quad - \frac{h}{2(\delta_1 + R)}\psi_{2,\varphi} + \frac{(-z + 2\delta_1 + R)}{(\delta_1 + R)^2}u_{3(r,\varphi)}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= -\frac{2(z - \delta_1)}{\delta_1 + R}u_{3,r\varphi} + \frac{(-z + 2\delta_1 + R)}{(\delta_1 + R)^2}u_{1,\varphi} - \\ &\quad - \frac{h(-z + 2\delta_1 + R)}{(\delta_1 + R)^2}\psi_{1,\varphi} + \frac{(z + R)}{\delta_1 + R}u_{2,r} - \frac{h(z + R)}{2(\delta_1 + R)}\psi_{2,r}; \\ \varepsilon_r^* &= -(z - \delta_1 - h)u_{3,rr} + u_{1,r} + \frac{1}{2}h\psi_{1,r}; \\ \varepsilon_\varphi^* &= -\frac{(h - z + \delta_1)}{(\delta_1 + R + h)^2}u_{3,\varphi\varphi} + \frac{1}{\delta_1 + R + h}u_{2,\varphi} + \\ &\quad + \frac{h}{2(\delta_1 + R + h)}\psi_{2,\varphi} + \frac{(-z + 2\delta_1 + 2h + R)}{(\delta_1 + R + h)^2}u_{3(r,\varphi)}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r\varphi}^* = & -\frac{2(h-z+\delta_1)}{\delta_1+R+h}u_{3,r\varphi} + \frac{(-z+2\delta_1+2h+R)}{(\delta_1+R+h)^2}u_{1,\varphi} + \\ & + \frac{h(-z+2\delta_1+2h+R)}{2(\delta_1+R+h)^2}\psi_{1,\varphi} + \frac{(z+R)}{\delta_1+R+h}u_{2,r} + \frac{h(z+R)}{2(\delta_1+R+h)}\psi_{2,r}. \end{aligned}$$

Для шару заповнювача:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= (z-\delta_1-\frac{h}{2})\psi_{1,r}+u_{1,r}; \\ \tilde{\varepsilon}_\varphi &= \frac{4(-z+2\delta_1+h+R)u_{2,\varphi}}{(2\delta_1+2R+h)^2} + \frac{h-2z+2\delta_1}{2\delta_1+R+2h}\psi_{2,\varphi} + \frac{4(-z+2\delta_1+h+R)}{(2\delta_1+2R+h)^2}u_3(r,\varphi); \\ \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} &= \frac{4(-z+2\delta_1+R+h)}{(2\delta_1+2R+h)^2}u_{1,\varphi} - \frac{h-2z+2\delta_1}{2\delta_1+2R+h}\psi_{1,\varphi} + u_{2,r} + \left(z-\delta_1-\frac{h}{2}\right)\psi_{2,r}; \\ \tilde{\varepsilon}_{rz} &= u_{3,r} + \psi_1(r,\varphi); \\ \tilde{\varepsilon}_{\varphi z} &= \frac{4(-z+2\delta_1+R+h)}{(2\delta_1+2R+h)^2}u_{3,\varphi} - \frac{4(-z+2\delta_1+R+h)}{(2\delta_1+2R+h)^2}u_2(r,\varphi) + \frac{2(-z+2\delta_1+R+h)}{(2\delta_1+2R+h)}\psi_2(r,\varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Визначимо далі напружений стан в шарах тришарової циліндричної оболонки.

**Напружений стан оболонки з ізотропного матеріалу.** Напруження в обшивках оболонки у випадку ізотропного матеріалу визначається законом Гука [6]:

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq \delta_1 : \\ \sigma_r = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi); \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r); \quad \tau_{r\varphi} = G\varepsilon_{r\varphi}, \\ \delta_1 + h \leq z \leq \delta_1 + h + \delta_2 : \\ \sigma_r^* = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_r^* + \mu\varepsilon_\varphi^*); \quad \sigma_\varphi^* = \frac{E}{(1-\mu^2)}(\varepsilon_\varphi^* + \mu\varepsilon_r^*); \quad \tau_{r\varphi}^* = G^* \varepsilon_{r\varphi}^*. \end{aligned} \quad (3)$$

де  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$  – модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона відповідно матеріалу шару  $0 \leq z \leq \delta_1$ ; позначення з індексом (\*) в (3) відповідають механічним характеристикам матеріалу шару  $\delta_1 + h \leq z \leq \delta_1 + h + \delta_2$ .

Напружений стан в середньому шарі визначається виразами [5, 7]:

$$\delta_1 \leq z \leq h:$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_r &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_r - \varepsilon_0), \\ \tilde{\sigma}_\varphi &= 3\tilde{K}(1 + \chi_2 \varepsilon_0^2) \varepsilon_0 + 2\tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2)(\tilde{\varepsilon}_\varphi - \varepsilon_0),\end{aligned}\quad (4)$$

$$\tilde{\tau}_{r\varphi} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \tilde{\varepsilon}_{r\varphi}, \quad \tilde{\tau}_{rz} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \tilde{\varepsilon}_{rz}, \quad \tilde{\tau}_{\varphi z} = \tilde{G}(1 + \gamma_2 \psi_0^2) \tilde{\varepsilon}_{\varphi z}.$$

В (4) позначено:  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{K}$  – модулі зсуву та об'ємної деформації матеріалу;  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0^2$  – середнє відносне подовження та інтенсивність деформацій зсуву:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_\varphi + \tilde{\varepsilon}_z), \\ \psi_0^2 &= \frac{8}{9}(\tilde{\varepsilon}_r^2 + \tilde{\varepsilon}_\varphi^2 + \tilde{\varepsilon}_z^2 - \tilde{\varepsilon}_r \tilde{\varepsilon}_\varphi - \tilde{\varepsilon}_\varphi \tilde{\varepsilon}_z - \tilde{\varepsilon}_z \tilde{\varepsilon}_r) + \frac{2}{3}(\tilde{\varepsilon}_{r\varphi}^2 + \tilde{\varepsilon}_{rz}^2 + \tilde{\varepsilon}_{\varphi z}^2), \\ \tilde{\varepsilon}_z &= -\frac{\tilde{\mu}}{1 - \tilde{\mu}}(\tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\varepsilon}_\varphi), \quad \tilde{\mu} = \frac{1}{2} \frac{3\tilde{K} - 2\tilde{G}}{3\tilde{K} + \tilde{G}}.\end{aligned}$$

Параметр  $\gamma_2$  характеризує зміну форми елемента конструкції в нелінійно-пружній стадії його деформування, визначається експериментально згідно з [5, 9]. Параметр  $\chi_2$  характеризує зміну об'єму елемента, далі у розрахунках приймається  $\chi_2 = 0$ .

**Повна енергія оболонки.** Повна енергія деформації оболонки запишеться наступним чином [2]:

$$\begin{aligned}E &= \iint \left( \int_0^{\delta_1} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{r\varphi} \varepsilon_{r\varphi}) \delta_1^1 \delta_2^1 dz + \int_{\delta_1+h}^{\delta_1+h+\delta_2} (\sigma_r^* \varepsilon_r^* + \sigma_\varphi^* \varepsilon_\varphi^* + \tau_{r\varphi}^* \varepsilon_{r\varphi}^*) \delta_1^2 \delta_2^2 dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\delta_1}^{\delta_1+h} (\tilde{\sigma}_r \tilde{\varepsilon}_r + \tilde{\sigma}_\varphi \tilde{\varepsilon}_\varphi + \tilde{\tau}_{r\varphi} \tilde{\varepsilon}_{r\varphi} + \tilde{\tau}_{rz} \tilde{\varepsilon}_{rz} + \tilde{\tau}_{\varphi z} \tilde{\varepsilon}_{\varphi z}) \delta_3^1 \delta_3^2 dz - A \right) dr d\varphi = 0\end{aligned}\quad (5)$$

$$\text{де } \delta_3^1 = 1 + k_1 \left( \delta_1 + \frac{h}{2} \right), \quad \delta_3^2 = 1 + k_2 \left( \delta_1 + \frac{h}{2} \right).$$

У (5)  $A$  – робота зовнішніх сил. У задачі стійкості при осьовому стисканні далі приймемо  $A = -\frac{1}{2} T_{kp} u_{3,r}^2 R$  [1].

Підставляючи (1)–(4) в (5) отримаємо повну енергію деформації оболонки, що виражена через переміщення серединної площини заповнювача

оболонки  $u_1(r, \varphi)$ ,  $u_2(r, \varphi)$ ,  $u_3(r, \varphi)$  та кутів повороту  $\psi_1(r, \varphi)$ ,  $\psi_2(r, \varphi)$  перетинів заповнювача. Повний вираз (5) після підстановки (1)–(4) не приводиться через свою громіздкість.

Функціонал повної енергії (5) далі використовуємо у методі Рітца для визначення критичного навантаження.

Зауважимо, що рівняння (1)–(5) відрізняються від аналогічних рівнянь М. А. Алфутова [2] тим, що використовується квадратичний закон пружності у формі Г. Каудерера [5]. Це дозволяє проаналізувати вплив нелінійної пружності матеріалу заповнювача на напружено-деформований стан тришарової оболонки, зокрема, на величину критичних навантажень.

**Стійкість ізотропної тришарової циліндричної оболонки при стисканні.** Розглянемо задачу стійкості тришарової циліндричної оболонки при осьовому стисканні (рис. 2). Вважаємо, що форма втрати стійкості – вісесиметрична.

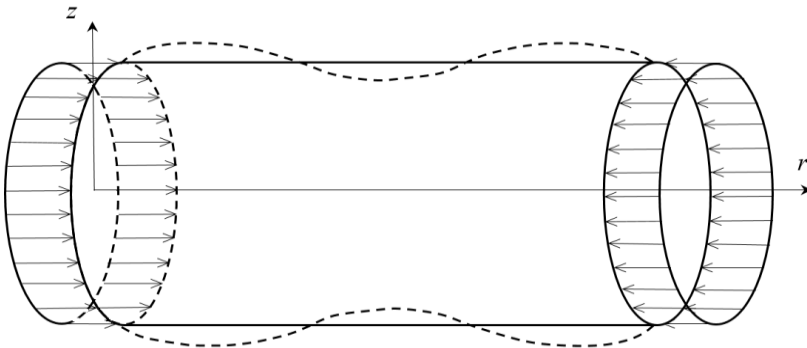


Рис. 2 – Втрата стійкості циліндричною оболонкою при осьовому стисканні

Приймаючи до уваги симетрію деформованого стану оболонки та відсутність кутових переміщень у даній постановці задачі, в рівняннях (1), (2) слід покласти  $u_2 = 0$ ,  $\psi_2 = 0$ ; переміщення  $u_1(r)$ ,  $u_3(r)$  та кут повороту  $\psi_1(r)$  не залежать від координати  $\varphi$ . Вважаємо, що оболонка шарнірно оперта.

Для розв'язання задачі у лінійній та нелінійній постановці застосуємо метод Рітца. У якості координатних функцій приймемо наступні апроксимації шуканих переміщень та кута повороту перетинів заповнювача:

$$u_1(r) = \sum_{j=1}^n A_j \cos\left(\frac{j\pi r}{L}\right);$$

$$u_3(r) = \sum_{j=1}^n B_j \sin\left(\frac{j\pi r}{L}\right); \quad (6)$$

$$\psi_1(r) = \sum_{j=1}^n C_j \sin\left(\frac{j\pi r}{L}\right).$$

Розглянемо розв'язання задачі у лінійній постановці.

Після підстановки координатних функцій (6) у функціонал енергії (5) та диференціювання за параметрами  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$  отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно параметрів:

$$E_{,A_j} = 0; \quad E_{,B_j} = 0; \quad E_{,C_j} = 0. \quad (7)$$

Далі, визначення критичного навантаження зводиться до задачі на власні значення для отриманої системи (7).

У якості частинного випадку розглянемо стійкість одношарової оболонки з наступними параметрами:  $E = 203200 \text{ МПа}$ ,  $\mu = 0,27$ ,  $\delta = 0,003 \text{ м}$ ,  $L = 3 \text{ м}$ ,  $R = 1,5 \text{ м}$ . Значення критичного навантаження, отримане за описаною вище процедурою дорівнює  $\sigma_{кр}^1 = 727 \text{ МПа}$ .

Порівняймо отримане значення критичного навантаження зі значенням, отриманим за формулою [4]:

$$\sigma_{кр}^* = kE \frac{\delta}{R}. \quad (8)$$

При цьому, для визначення коефіцієнту  $k$  використаємо формулу:

$$k = 0,606 - 0,546 \left( 1 - e^{\frac{1}{16} \sqrt{\frac{R}{\delta}}} \right) + 0,9 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{\delta}{R} \right),$$

запропоновану у роботі [3], яку рекомендується застосовувати у діапазоні радіусів та довжин циліндричної оболонки:

$$10^2 \leq \frac{R}{\delta} \leq 4 \cdot 10^3; \quad 0,031 \leq \frac{L}{R} \leq 5.$$

Значення, отримане за формулою (8) –  $\sigma_{кр}^* = 922 \text{ МПа}$ .

Таким чином, значення критичного навантаження  $\sigma_{кр}^1$  відрізняється від  $\sigma_{кр}^*$ , розрахованого за відомими формулами на 21%, що дозволяє зробити висновок про адекватність побудованої моделі та можливість використання запропонованих у даній статті рівнянь для розв'язання задач стійкості тришарових оболонок.

Розглянемо аналогічну задачу стійкості тришарової циліндричної оболонки. Параметри оболонки приймемо наступними:  $E = 203200 \text{ МПа}$ ,  $\mu = 0,27$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона обшивок оболонки;  $\tilde{G} = 2,77 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $\tilde{K} = 6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  – модулі зсуву та об'ємної деформації заповнювача відповідно; товщина обшивок  $\delta_1 = \delta_2 = \delta = 0,0005 \text{ м}$ , товщина заповнювача  $h = 0,002 \text{ м}$ ,  $L = 3 \text{ м}$ ,  $R = 1,5 \text{ м}$ .

Значення критичного навантаження для даної оболонки у лінійно-пружному випадку ( $\gamma_2 = 0$ ) –  $\sigma_{кр}^3 = 1248 \text{ МПа}$ .

Для розв'язання нелінійної задачі поступимо аналогічно [7, 8]. Після підстановки координатних функцій (6) в функціонал енергії (5) та застосування методу Рітца отримаємо системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Наприклад, якщо в рядах (6) покласти кількість членів ряду  $n = 4$ , отримаємо:

$$L_i(T_{кр}, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, C_4) = 0,$$

де  $L_i$  – деякий нелінійний алгебраїчний оператор,  $i = 1, \dots, 12$ .

Оскільки, при втраті стійкості коефіцієнти  $B_j$  функції прогину набувають ненульового значення, можна, задаючись близьким до нуля коефіцієнтом  $B_1$ , визначити критичне зусилля  $T_{кр}$ .

Критичне навантаження для тришарової циліндричної оболонки з параметрами, описаними вище, у нелінійно-пружному випадку ( $\gamma_2 = -3,878 \cdot 10^5$ ) –  $\sigma_{кр}^{3*} = 1397 \text{ МПа}$ .

**Висновок.** Побудовано основні рівняння теорії пружності для задачі стійкості тришарової циліндричної оболонки з нелінійно-пружним заповнювачем при осьовому стисканні. Розглянутий числовий приклад свідчить, що вплив нелінійної пружності матеріалу заповнювача призводить до збільшення значення критичного навантаження на 11%. Отриманий результат відповідає результатам робіт [7, 8].



## БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Алфутов Н. А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н. А. Алфутов. – М. : Машиностроение, 1991. – 336 с.
2. **Алфутов Н. А.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М. : Машиностроение, 1984. – 264 с.
3. **Вайнгартен В. И.** Устойчивость упругих тонкостенных цилиндрических и конических оболочек при осевом сжатии / В. И. Вайнгартен, Е. Дж. Морган, П. Сейд // Ракетная техника и космонавтика (пер. с англ.). – 1965. – Т. 3, № 3. – С. 151–157.
4. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2-е, перераб. и доп. / А. С. Вольмир. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
5. **Каудерер Г.** Нелинейная механика. Пер. с нем. / Г. Каудерер. – М. : Изд-во иностр. лит., 1961. – 777 с.
6. **Можаровський М. С.** Теорія пружності, пластичності і повзучості: підручник. / М. С. Можаровський. – К. : Вища школа, 2002. – 308 с.
7. **Тамуров Ю. Н.** Вариант обобщенной теории трёхслойных пологих оболочек с учётом обжатия физически нелинейного заполнителя / Ю. Н. Тамуров // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 12. – С. 39 – 45.
8. **Тамуров Ю. Н.** Уравнения изгиба и устойчивости трехслойных оболочек с ортотропными и нелинейно-упругими свойствами материалов / Ю. Н. Тамуров // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1990. – №20. – С. 102–112.
9. **Цурпал И. А.** Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов / И. А. Цурпал. – К. : Техника, 1976. – 176 с.

*А. В. Кудин*

### УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Рассматривается задача устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с нелинейно-упругим заполнителем и изотропными обшивками под действием осевого сжатия. Приводятся уравнения равновесия трехслойной оболочки. Методом Ритца определяются значения критической нагрузки в случаях линейно-упругого и нелинейно-упругого заполнителя.

*Ключевые слова:* трехслойная цилиндрическая оболочка, нелинейно-упругий заполнитель, устойчивость, осевое сжатие, метод Ритца.

*O. V. Kudin*

### STABILITY OF SANDWICH CYLINDRICAL SHELLS WITH NONLINEAR ELASTIC CORE UNDER AXIAL COMPRESSION

The problem of stability of a three-layered cylindrical shell with nonlinear isotropic elastic core and skins under axial compression is investigated. The equations of equilibrium of a three-layer shell are given. The values of the critical load in the cases of linear elastic and nonlinear elastic filler using Ritz method are determined.

*Keywords:* sandwich cylindrical shells, nonlinear elastic core, buckling, axial compression, Ritz method.

In this paper we derive nonlinear equation for total potential energy of cylindrical sandwich shells with isotropic face sheets and nonlinear elastic core material according to [5].

Using the Ritz method we obtain linear systems of equations in case of linear elastic core material and nonlinear systems of equations in case of nonlinear elastic core material. We can determine eigenvalue associated with a linear systems and find buckling stress for sandwich cylindrical shells under axial compression with linear elastic core material.

Buckling stress obtained from nonlinear equation for total potential energy in case of nonlinear elastic core material.

Numerical results are considered for sandwich cylindrical shells with linear and nonlinear elastic core in comparison with existent results. The effect of considering nonlinear elastic core material on the buckling stress of sandwich shells is described. We show that the difference between linear buckling stress and nonlinear buckling stress is around 11%.

## REFERENCES

1. **Alfutov N. A.** Stability of Elastic Structures / N. A. Alfutov. – M. : Mashinostroenie, 1991. – 336 p. (in Russian).
2. **Alfutov N. A.** Calculation of laminated composite plates and shells / N. A. Alfutov, P. A. Zinoviev, B. G. Popov. – M. : Mashinostroenie, 1984. – 264 p. (in Russian).
3. **Weingarten V. I.** Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression / V. I. Weingarten, E. J. Morgan, P. Seide // *Raketnaya tekhnika i kosmonavtika* (trans. from eng.). – 1965. – Vol. 3, № 3. – P. 151–157. (in Russian).
4. **Vol'mir A. S.** Stability of deformed systems. Izd. 2-e, pererab. i dop. / A. S. Vol'mir. – M. : Nauka, 1967. – 984 p. (in Russian).
5. **Kauderer H.** Nonlinear Mechanics. Trans. from ger. / H. Kauderer. – M. : Izd-vo inostr. lit., 1961. – 777 p. (in Russian).
6. **Mozharovskiy M. S.** Elasticity, Plasticity and Creep Theory: tutorial / M. S. Mozharovskiy. – K. : Vishha shk., 2002. – 308 p. (in Ukrainian).
7. **Tamurov Yu. N.** Vibrational process in a three-layer shell with nonuniform compression of a physically nonlinear filler / Yu. N. Tamurov // *International Applied Mechanics*. – 1990. – Vol. 26, № 12. – P. 39 – 45. (in Russian).
8. **Tamurov Yu. N.** Equations of bending and stability of sandwich shells with orthotropic and nonlinear elastic properties of materials / Yu. N. Tamurov // *Issled. po teor. plastin i obolochek*. – 1990. – № 20. – P. 102–112. (in Russian).
9. **Curpall. I. A.** Calculation of structural elements of the nonlinear-elastic materials / I. A. Curpall. – K. : Technika, 1976. – 176 p. (in Russian).

*Запорізький національний університет,  
Запоріжжя, Україна*

*Надійшла до редколегії 10.02.2014*