

УДК 539.3

О. П. Козачок, канд. фіз.-мат. наук

МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТУ ПРУЖНОГО ТІЛА І ТЕКСТУРОВАНОЇ КВАЗІЕЛІПТИЧНИМИ ВИЇМКАМИ ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ З УРАХУВАННЯМ МІЖКОНТАКТНОЇ РІДИНИ, ЩО НЕ ЗМОЧУЄ ЇХ ПОВЕРХНІ

Змодельовано безфрикційний контакт пружного тіла та текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи, коли у середніх частинах міжповерхневих просвітів міститься нестислива рідина, що не змочує поверхні тіл, а на краях – газ, що перебуває під сталим тиском. Внаслідок поверхневого натягу рідини виникає перепад тисків у рідині й газі, який визначається за формулою Лапласа. Сформульовану контактну задачу для пружного півпростору зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від висоти просвітів і трансцендентного рівняння для визначення ширини рідинного містка.

Ключові слова: контакт, пружне тіло, жорстка основа, міжповерхневі просвіти, нестислива рідина, сингулярне інтегральне рівняння

Вступ. Одним із способів підвищення показників працездатності контактних з'єднань є текстуровання поверхонь, яке полягає у формуванні регулярно (періодично) розташованих виїмок, ямок чи канавок однакової форми на межі твердого тіла. Для створення регулярної поверхні використовують різноманітні технології [7]: лазерне текстуровання, точне алмазне точіння, тиснення, гравіювання, вібропрокат, струменеву абразивну обробку, мікроелектроерозійну обробку, шліфування тощо. За контакту текстурованих поверхонь між ними виникають періодично розташовані міжконтактні просвіти. Під час експлуатації тіл з такими поверхнями внаслідок різних процесів (конденсації, адсорбції, тощо) просвіти можуть частково чи повністю заповнюватися рідиною. Результати численних експериментальних досліджень показали [10, 14], що в разі присутності рідинних плівок на поверхнях тіл, під час їх контакту в міжконтактних просвітах можуть утворитися рідинні містки. На форму меніска (бічної поверхні рідинного містка, що межує з газом) впливають параметри рідини та матеріалів тіл. Коли контактний кут між рідиною та поверхнею не перевищує 90° , рідина змочує поверхні тіл (тобто вони є гідрофільними) та під дією поверхневого натягу локалізується в більш вузьких частинах міжконтактних просвітів, формуючи рідинні містки з меніском ввігнутої форми. Якщо контактний кут між рідиною та поверхнею перевищує 90° , рідина не змочує поверхні тіл (тобто вони є гідрофобними) та локалізується в тих частинах просвітів, де їх висота є най-

більшою, формуючи рідинні містки з меніском випуклої форми. Вплив рідинних містків на контактну поведінку тіл зростає зі зменшенням розмірів тіл та висоти рельєфу поверхонь.

Вперше взаємодію випуклих тіл з урахуванням впливу рідинних міжповерхневих містків вивчено в [8, 15]. Розв'язано [9, 12] контактні задачі для тіл з номінально плоскими поверхнями, які мають поодинокі або періодично розташовані просвіти, що містять один вид заповнювача – рідину або газ. У [3, 6, 11, 13] досліджено контактні задачі теорії пружності для двох пружних тіл з урахуванням рідинних містків. Вплив газорідинного заповнювача просвітів на взаємодію пружного тіла і жорсткої основи, текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи за наявності у міжповерхневих просвітах рідини, що не змочує їх поверхні.

Дана робота присвячена моделюванню контакту пружного тіла та текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи за наявності у міжповерхневих просвітах рідини, що не змочує їх поверхні.

Постановка контактної задачі. Розглянемо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має нескінченну систему розташованих з періодом d мілких тунельних виїмок ширини $2a$, форма яких описується парною функцією

$$r(x) = -A \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2(\pi x / d)}{\operatorname{tg}^2(\pi a / d)} \right)^{1/2}, \quad (1)$$

такою що $A \approx 2a$. Півпростір притискається до основи рівномірно розподіленими на нескінченності стискальними навантаженнями P^∞ . Внаслідок нерівності основи між тілами виникають просвіти висоти $h(x)$ (рис. 1).

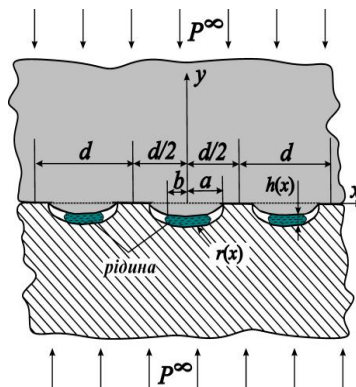


Рис. 1 – Схема контакту пружного тіла та жорсткої основи

Вважаємо, що вони частково заповнені нестисливою рідиною, що повністю не змочує поверхні тіл (крайовий кут змочування $\theta = 180^\circ$), а частково газом, що перебуває під сталим тиском P_1 . Кількість рідини в кож-

ному просвіті однакова і залишається незмінною при навантаженні. Тому виконується умова збереження рідини

$$\ell \int_{-b}^b h(x) dx = V_0, \quad (2)$$

де $\ell = 1$ м; V_0 – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини кожного просвіту у його поздовжньому напрямі.

Під дією поверхневого натягу σ рідина локалізується у середній частині просвітів, де її висота найбільша, і формуватиме міжповерхневий рідинний місток на ділянках $(-b + kd, b + kd)$, а газ – на краях просвітів на ділянках $(-a + kd, -b + kd) \cup (b + kd, a + kd)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Перепад тисків визначається формулою Лапласа [1]

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{2\sigma}{h(b)}. \quad (3)$$

У процесі навантаження змінюватимуться висота просвітів $h(x)$, висота меніска $h(b)$, ширина рідинних містків $2b$ і тиск рідини P_2 .

Контактно-крайові умови сформульованої плоскої контактної задачі мають вигляд

– уздовж просвітів $|x - kd| < a$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad x \in (-c + kd, c + kd), \quad (4)$$

$$\sigma_{yy} = -P_2, \quad x \in (-b + kd, b + kd), \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} = -P_1, \quad x \in (-a + kd, -b + kd) \cup (b + kd, a + kd); \quad (6)$$

– на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad (7)$$

$$v = 0; \quad (8)$$

– на нескінченності ($y \rightarrow \pm \infty$):

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (9)$$

Тут σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – складова вектора переміщень уздовж осі Oy .

Методика розв'язування задачі. Використовуючи метод комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі, напруження і переміщення в пружному півпросторі подамо у вигляді [2]

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) + P^\infty,$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - P^\infty, \quad (10)$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \frac{3 - \kappa}{4}P^\infty, \quad (11)$$

де $z = x + iy$; $\Phi(z)$ – кусково-голоморфна у площині $D = D_1 \cup D_2$ функція, що згасає на нескінченності $y \rightarrow \pm\infty$; D_1 і D_2 – верхня $y > 0$ і нижня $y < 0$ півплощини; $\kappa = 3 - 4\nu$; G , ν – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пружного тіла.

Якщо виразити комплексний потенціал $\Phi(z)$ через похідну від висоти просвітів $h'(x)$ [2]

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \left[\int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt - \int_{-a}^a r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-z)}{d} dt \right], \quad (12)$$

де $K = 2(1 - \nu) / G$, то подання (10), (11) задовольнятимуть усім контактноточно-крайовим умовам (4) – (9), за винятком умов (5) і (6).

Задовольнивши за допомогою подань (10) – (12) умовам (5), (6), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно $h'(x)$

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt = K(P^\infty - P(x)) + \frac{2}{d} \int_{-a}^a r'(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-x)}{d} dt. \quad (13)$$

Заміною змінних $\xi = \operatorname{tg} \pi x / d$, $\eta = \operatorname{tg} \pi t / d$, $\alpha = \operatorname{tg} \pi a / d$, $\beta = \operatorname{tg} \pi b / d$ трансформуємо СІР (13) з ядром Гільберта у СІР з ядром Коші

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2\pi(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P(\xi)) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad |\xi| \leq \alpha, \quad (14)$$

$$\text{де } P(\xi) = \begin{cases} P_1 + 2\sigma / h(\beta), & |\xi| \leq \beta, \\ P_1, & \beta < |\xi| \leq \alpha. \end{cases}$$

У крайніх точках просвітів повинні виконуватись умови рівності нулю висоти зазорів, які у нових змінних мають вигляд

$$h(\pm\alpha) = 0. \quad (15)$$

Після врахування форми виїмок (1) СІР (14) набуде вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2\pi(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P(\xi)) - \frac{A}{\alpha}, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (16)$$

У зв'язку з наявністю на межі основи кутових точок шукатимемо необмежений [2] у точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок рівняння (16)

$$h'(\xi) = \left(\frac{K(P^\infty - P_1)}{2\pi} - \frac{2K\sigma}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \frac{\xi d\sqrt{\alpha^2 + 1}}{(1 + \xi^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} - \frac{K\sigma d}{2\pi^2 h(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha, \xi, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi, -\beta)}{1 + \xi^2} - \frac{A}{\alpha} \frac{\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (17)$$

Для визначення висоти просвітів $h(\xi)$ необхідно проінтегрувати вираз (17) з урахуванням умови (15). Оскільки цей інтеграл не вдається взяти аналітично, функцію $h(\xi)$ будемо визначати наближено, подавши $h'(\xi)$ у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишова 1-го роду

$$h'(\xi) = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell (2\ell + 1) T_{2\ell+1} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right). \quad (18)$$

Невідомі коефіцієнти Θ_ℓ будемо визначати з системи $L + 1$ лінійних алгебричних рівнянь, яку отримаємо, прирівнявши вирази (17) і (18) у точках колокацій $\xi_j = \alpha \cos(\pi j / (2L + 3))$, $j = 1, \dots, L + 1$, за які вибрано нулі полінома Чебишова $T_{2L+3}(\xi/\alpha)$.

Проінтегрувавши (18), з урахуванням (15), знаходимо висоту просвітів

$$h(\xi) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell U_{2\ell} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right), \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (19)$$

Підставивши (19) в умову збереження кількості рідини (2), отримаємо трансцендентне рівняння для невідомої півширини β ділянки з рідиною

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell U_{2\ell} \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) d\xi = \frac{Ad(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1)}{\alpha} V_0. \quad (20)$$

Контактне зближення тіл Δv^∞ [2] буде мати вигляд

$$\Delta v^\infty = \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right) - \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell \alpha^{-2\ell} (-1)^\ell \left(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right)^{2\ell+1}. \quad (21)$$

Висновки. Змодельовано контакт пружного тіла та текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи, коли у міжповерхневих просвітах міститься нестислива рідина, що не змочує поверхні тіл, та газ, що перебуває під сталим тиском. Під дією поверхневого натягу рідина формує рідинний місток у середніх частинах просвітів. Перепад тисків у рідині та газі визначається формулою Лапласа. Ширина ділянки рідинних містків і висота просвітів задалегідь невідомі та змінюються разом з навантаженням. Сформульовану контактну задачу зведено до СІР з ядром Гільберта відносно висоти міжконтактних просвітів, яке після заміни змінних трансформовано у СІР з ядром Коші, і трансцендентного рівняння відносно довжини ділянки з рідиною, яке отримано з умови збереження кількості рідини. Слід зазначити, що отримане СІР відносно похідної від висоти просвітів є нелінійним, оскільки містить невідомий тиск рідини, який залежить від невідомої висоти меніска. Також наведено вираз для контактного зближення тіл.

Публікація містить результати досліджень, проведених за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф75/141-2018 Державного фонду фундаментальних досліджень.

БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОСИЛАННЯ

1. **Арцыбышев С. А.** Курс физики. Ч. 1. Механика и теплота .М.: Учпедгиз, 1951. 671 с.
2. **Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.** Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. Львів : Растр-7, 2018. 200 с.
3. **Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.** Вплив міжповерхневих рідинних містків на контактну взаємодію тіл з хвилястим рельєфом // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. 2016. Вип. 24. С. 34–46.
4. **Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.** Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. 2015. Вип. 22. С. 67–76.
5. **Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.** Контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою квазіеліптичних виїмок, частково заповнених рідиною, яка змочує поверхні тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2017. Т.60. №1. С. 132–140.
6. **Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.** Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // Теорет. і прикл. механіка. 2013. Вип. 7(53). С 45–52.
7. **Etsion I.** Improving tribological performance of mechanical components by laser surface texturing // Tribology Letters. 2004. Vol.17. No. 4. P. 733–737.
8. **Goryacheva I. G., Makhovskaya Yu. Yu.** Adhesive interaction of elastic bodies // J. Appl. Math. Mech. 2001. Vol. 65. No. 2. P. 273–282.
9. **Kit G. S., Martynyak R. M., Machishin I. M.** The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // Int. Appl. Mech. 2003. Vol. 39. No. 3. P. 292–299.

10. **Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S.** Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribol. Int. 2003. Vol. 36. No. 4–6. P. 329–333.

11. **Kozachok O. P., Martynyak R. M.** Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mechanics of Solids. – DOI: 10.1177/1081286518781679.

12. **Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.** Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. Vol. 222. No. 2. P. 131–142.

13. **Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.** Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Mater. Sci. 2016. Vol. 51, No. 6. P. 804–813.

14. **Zheng J., Streater J. L.** A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribol. Lett. 2004. Vol. 16. No. 1-2. P. 1–9.

15. **Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F. G.** Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // Phys. Rev. B. 2002. Vol. 66. No. 15. P. 155436 (8 p.).

УДК 539.3

О. П. Козачок, канд. физ.-мат. наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТА УПРУГОГО ТЕЛА И ТЕКСТУРИРОВАННОЙ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ВЫЕМКАМИ ЖЕСТКОЙ ОСНОВЫ С УЧЕТОМ МЕЖКОНТАКТНОЙ ЖИДКОСТИ, НЕ СМАЧИВАЮЩЕЙ ИХ ПОВЕРХНОСТИ

Смоделирован безфрикционный контакт упругого тела и текстурированной квазиэллиптическими выемками жесткой основы, когда в средних частях межповерхностных зазоров содержится несжимаемая жидкость, не смачивающая поверхности тел, а на краях - газ, находящийся под постоянным давлением. Вследствие поверхностного натяжения жидкости возникает перепад давлений в жидкости и газе, который определяется формулой Лапласа. Сформулированная контактная задача для упругого полупространства сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта относительно производной от высоты зазоров и трансцендентного уравнения для определения ширины жидкостного мостика.

Ключевые слова: контакт, упругое тело, жесткая основа, межповерхностные зазоры, несжимаемая жидкость, сингулярное интегральное уравнение.

UDC 539.3

O. P. Kozachok, PhD (Phys.-Math.)

MODELING OF CONTACT BETWEEN AN ELASTIC BODY AND A RIGID BASE TEXTURED WITH QUASI-ELLIPTIC GROOVES TAKING INTO ACCOUNT INTERSTITIAL LIQUID THAT DOES NOT WET THEIR SURFACES

The frictionless contact between an elastic body and a rigid base textured with quasi-elliptical grooves is modeled for the case when central parts of interface gaps contain incompressible liquid that does not wet the surfaces of the bodies, and end parts of the gaps are filled with gas under constant pressure. Due to the surface tension of the liquid, a pressure drop described by the Laplace formula occurs in the

liquid and the gas. The formulated contact problem for an elastic half-space is reduced to the singular integral equation with the Hilbert kernel for a derivative of the gaps height and a transcendental equation for the liquid bridge width.

Keywords: *contact, elastic body, rigid base, interface gaps, incompressible liquid, singular integral equation*

One of the ways to increase the performance of contacting elements is the surface texturing, which consists in formation of regular (periodically) located grooves or pits of the same shape on the body surface. Various technologies are used to create a regular surface [7]. When the textured surface is in contact with a smooth one, an array of periodically located gaps arises at the interface between the bodies. The interface gaps can be partially or completely filled with liquid due to various processes (condensation, adsorption, etc.). A number of experimental studies [10, 14] have shown that liquid bridges are present in the interface gaps when the contacting surfaces are coated with liquid films. When the liquid dampens the contacting surfaces, it is localized in the narrower parts of the interface gaps under the action of the surface tension, and when it does not wet the surfaces it is localized in those parts of the gaps where their height is the greatest. The influence of liquid bridges on the contact behavior of bodies increases with decreasing body sizes and the maximum height of the surface relief.

For the first time, the interaction of convex bodies taking into account the influence of liquid interface bridges has been studied in [8, 15]. In [9, 12], the contact problems for bodies with nominally flat surfaces in the presence of a single gap or an array of periodically located gaps containing one type of filler, liquid or gas were solved. The contact problems for two elastic bodies taking into account liquid bridges were investigated in [3, 6, 11, 13]. The effect of the gaseous filler of the gaps on the interaction of an elastic body and a rigid base of various surface texture shapes was considered in [2, 4, 5].

This article is devoted to the investigation of the contact between an elastic body and a rigid base textured with quasi-elliptical grooves in the presence of the interstitial liquid that does not wet the surfaces of the interface gaps. The liquid forms bridges in the central parts of the gaps under the influence of surface tension, and in the end parts of the gaps, there is gas under constant pressure. Due to the surface tension of the liquid, there is a difference in the pressure in the liquid and the gas, which is described by the Laplace formula. The width of the liquid bridge and the height of the gaps are unknown in advance and vary with the applied load. The contact problem formulated for the elastic half-space is reduced to the singular integral equation with the Hilbert kernel for the derivative of the gaps height and the transcendental equation for the liquid bridge width.

REFERENCES

1. **Artsybyshev S. A.** Physics course. Part 1. Mechanics and heat. Moscow: Uchpedgiz, 1951. 671 p. (in Russian).
2. **Kozachok O. P., Martynyak R. M., Slobodian B. S.** Interaction between bodies with regular relief in the presence of an interstitial medium. Lviv : Rastr-7, 2018. 200 p. (in Ukrainian).

3. **Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.** Influence of interstitial liquid bridges on contact interaction between bodies with wavy relief // *Phys.-math. modeling and inform. technologies.* 2016. Iss. 24. P. 34–46. (in Ukrainian).
4. **Kozachok O. P., Slobodian B.S., Martynyak R. M.** Effect of interfacial liquid bridges on contact between an elastic body and a rigid base with a periodic array of rectangular grooves // *Phys.-math. modeling and inform. technologies.* – 2015. Iss. 22. P. 67–76. (in Ukrainian).
5. **Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.** The contact between an elastic body and a rigid base with a periodic array of quasielliptic grooves partially filled with liquid that wets the surfaces of bodies // *Mathematical methods and physical-mechanical fields.* 2017. Vol. 60. No 1. P. 132–140. (in Ukrainian)
6. **Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.** Interaction of elastic bodies with periodic surface topography in the presence of liquid bridges in the interface gaps // *Teor. Prikl. Mekh.* 2013. Iss. 7(53). P 45–52. (in Russian).
7. **Etsion I.** Improving tribological performance of mechanical components by laser surface texturing // *Tribology Letters.* 2004. Vol.17. No. 4. P. 733–737.
8. **Goryacheva I. G.,** Makhovskaya Yu. Yu. Adhesive interaction of elastic bodies // *J. Appl. Math. Mech.* 2001. Vol. 65. No. 2. P. 273–282.
9. **Kit G. S., Martynyak R. M., Machishin I. M.** The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // *Int. Appl. Mech.* 2003. Vol. 39. No. 3. P. 292–299.
10. **Kobatake S., Kawakubo Y., Suzuki S.** Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // *Tribol. Int.* 2003. Vol. 36. No. 4–6. P. 329–333.
11. **Kozachok O. P., Martynyak R. M.** Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Mathematics and Mechanics of Solids.* – DOI: 10.1177/1081286518781679.
12. **Kozachok O. P., Slobodian B.S., Martynyak R.M.** Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // *J. Math. Sci.* – 2017. Vol. 222. No. 2. P. 131–142.
13. **Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.** Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // *Mater. Sci.* 2016. Vol. 51, No. 6. P. 804–813.
14. **Zheng J., Streater J. L.** A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // *Tribol. Lett.* 2004. Vol. 16. No. 1-2. P. 1–9.
15. **Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F. G.** Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // *Phys. Rev. B.* 2002. Vol. 66. No. 15. P. 155436 (8 p.).

*Інститут прикладних проблем
механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Львів, Україна*

Надійшла до редколегії 14.09.2018